ANALÍZIS (2),B kurzus **ÖSSZEVONT VIZSGADOLGOZAT** **2001. június 18.**
Műszaki Informatika szak Munkaidő: 90 perc

I. rész

1) Feladat (6 pont)*
Gömbi koordináták segítségével írja le az alábbi térrészt!

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \qquad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \leq 0$$

2) Feladat (8 pont)*

$$\int\int_T e^{2y-3x} dT = ? \qquad T : x \geq 0, \quad y \leq 0$$

3) Feladat (16 pont)*

$$f(z) = \sin(j\overline{z})$$

a) $u(x, y) = \mathrm{Re} f(z) = ?, \quad v(x, y) = \mathrm{Im} = f(z) = ?$

b) Definiálja egy komplex változós függvény deriválhatóságát és regularitását!
Írja fel a Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket!

c) Hol differenciálható és hol reguláris a fenti f függvény?

4) Feladat (9 pont)*

$$f(z) = \frac{sin(jy^2)}{z^2(z-j)}$$

a) Hol és milyen szingularitása van f-nek?

b)

$$I = \oint_{|z+j|=5} f(z)dz, \qquad \mathrm{Re} I = ?, \quad \mathrm{Im} I = ?$$

II. rész

1) Feladat (10 pont)
$x = e^t$ helyettesítéssel vezessen be új független változót az

$$x^2 y'' - xy' + 2y = x$$

differenciálegyenletben! Milyen típusú differenciálegyenlethez jutott?
(A differenciálegyenletet nem kell megoldania!)

2) Feladat (15 pont)

$$\int\int_T \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dT = ?, \qquad T : (x-2)^2 + y^2 \leq 4; \quad y \leq x; \quad y \geq -x$$

3) Feladat (20 pont)

a) Fogalmazza meg a függvénysorra vonatkozó Cauchy kritériumot!

b) Mondja ki és bizonyítsa be a Weierstrass kritériumot!

c) Mutasson példát a Weierstrass kritérium alkalmazására!

4) Feladat (17 pont)
Adjon elégséges tételt a függvény és Taylor sorának egyezőségére! (Bizonyítson!)

5) Feladat (16 pont)

a) Milyen tulajdonságait ismerjük a gradiensvektornak? Állítását bizonyítsa be!

b) Hogyan írható fel az $u = f(x, y, z)$ függvény $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó szintalakzata P_0 pontbeli érintősíkjának egyenlete?

6) Feladat (22 pont)

a) Definiálja a Laurent sort!
Milyen esetben lesz a Laurent sorból Taylor sor? Indokoljon!

b)

$$f(z) = \frac{\sinh 2x - \sin 2x}{z^8}$$

Sorfejtés segítségével állapítsa meg, hogy milyen szingularitása van f-nek $z = 0$-ban!

$$\oint_{|z+j|=5} f(z) dz = ?$$

(pdf by Zizi)