1	2	3	4	5	6	$\sum$

FMInf_AlkAlg 3. vizsga 22-01-18 **Neptun:** ____________ **Név:** ______________________________

*A vizsga feladatainak **eredményeit erre** az oldalra kell írni, a **mellékszámításokat a hátoldalra** és ha oda nem fér, külön lapra, melynek jobb felső sarkán legyen rajta a név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Sikeres a vizsga ha az elért pontok száma legalább 8.*

1. Igaz–Hamis I|H *(5 pont – hibás válasz −0.5 pont)*

a) Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpárja az $\mathbf{A}$, $(\mu, \mathbf{x})$ pedig az $\mathbf{B}$ mátrixnak, akkor $(\lambda\mu, \mathbf{x})$ sajátpárja az $\mathbf{AB}$ mátrixnak. $\boxed{\text{I}}$

b) Legyen $\mathcal{V}$ egy valós, véges dimenziós euklideszi tér, $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris leképezés, és $\mathbf{c} \in \operatorname{Im} L$. Ekkor egyetlen olyan $\mathbf{x}$ vektor létezik, melyre $L\mathbf{x} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{x} \perp \operatorname{Ker} L$. $\boxed{\text{I}}$

c) Az $\mathbb{R}^2$ téren a $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ formula skaláris szorzást definiál. nem pozitív definit $\boxed{\text{H}}$

d) Akkor mondjuk a valós $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokra hogy kongruensek ($\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$), ha van olyan invertálható valós $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{AC}$ $\boxed{\text{H}}$

e) Az $n \times n$-es komplex $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor normális, ha unitéren diagonalizálható. $\boxed{\text{I}}$

2. Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve egészítsük ki a mondatot valamely tétel vagy definíció alapján! *(4 pont)*

a) Az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ felbontás ismeretében hogyan adnánk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását?

$\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$

b) Van-e bázisa a zérustérnek, és ha igen, adjuk meg!

van, az üreshalmaz, azaz $\emptyset$

c) Hogyan definiáljuk a $\|.\|_a$ vektornorma által indukált mátrixnormát?

$\|\mathbf{A}\|_a = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|_a = 1} \|\mathbf{Ax}\|_a$

d) Karikázzuk be azokat a fügvényeket, melyek értelmezve vannak az $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Jordan-mátrix spektrumán!

$\sqrt{x}$ $\quad \underline{\sqrt{x^3}}$ $\quad \underline{\operatorname{sgn}(x-1)}$) $\quad \operatorname{sgn}(x)$

3. Számítsuk ki a következőket! *(3 pont)*

a) Adjunk meg az $\mathbf{A}$ Cholesky-felbontását, ha ismerjük $\mathbf{A}$ LU-felbontását, nevezetesen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Egy mátrix karakterisztikus polinomja $(1-x)^5(1+x)^3$. Karikázzuk be azokat a polinomokat, amelyek a minimálpolinomjai lehetnek:

$\underline{x^2 - 1}$, $\quad x - 1$, $\quad x^2 - 2x + 1$, $\quad \underline{(x-1)^5(x+1)}$

c) Írjuk fel a polárfelbontását annak a mátrixnak, melynek a szinguláris felbontása $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$(\mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{T})(\mathbf{UV}^\mathsf{T}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix Frobenius-, 1, és 2-normáját! *(2 pont)*

$\|\mathbf{A}\|_F = \|\mathbf{A}\|_2 = 13$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 17$ (F-norma az elemek négyzetösszegének négyzetgyöke; az 1-norma a max abszolút oszlopösszeg; a 2-norma $= \sigma_1 =$ az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 169 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ legnagyobb sajátértékének négyzetgyökével $= 13$)

5. Írjuk fel az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix egy Jordan-bázisát és Jordan-felbontását! *(4 pont)*

$\chi(\lambda) = (3-\lambda)^3$, a sajátaltér $\operatorname{span}((1,0,0),(0,0,1))$, így 2 Jordan-lánc van, egy lehetséges Jordan-bázis

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-3\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}-3\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-3\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

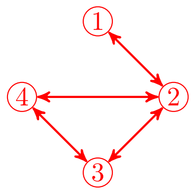
Az $\mathbf{A}$ Jordan-felbontása e bázissal ($\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$, ahol $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{y}_1]$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Irreducibilis-e és primitív-e az alábbi mátrix? A választ indokoljuk néhány szóban és/vagy egy alkalmas gráffal és/vagy mátrixszal. *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

1. mo: Irreducibilis, mert erősen összefüggő a gráfja, és $\mathbf{A}^4 > \mathbf{O}$, így primitív.



2. mo: $\mathbf{A}^2$ irreducibilis és van pozitív elem a főátlóban (a hurokélek nincsenek berajzolva), így $\mathbf{A}^2$ és vele $\mathbf{A}$ is primitív, és ha primitív, akkor irreducibilis is. (Kevés, hogy $\mathbf{A}^2$ főátlójában van pozitív elem, ha nem ellenőrizzük, hogy irreducibilis-e)