Aláíráspótló vizsga
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Két szabályos dobókockával dobunk. Jelölje S_i azt az eseményt, hogy a dobott számok összege *legalább* i ($i = 2, 3, \dots, 12$). Legyen továbbá MAX_j az az esemény, hogy a dobott számok maximumának értéke j ($j = 1, 2 \dots, 6$). Fejezzük ki a fenti események és a halmazműveletek segítségével az alábbi eseményeket. **A kifejezések helyességének indoklása is szükséges.**

$$A = \{\text{a dobott számok összege 7}\}, \qquad B = \{\text{két darab 2-est dobunk}\},$$

$$C = \{\text{a dobott számok mindegyike 1-es vagy 6-os}\}.$$

(A C eseménybe azon eseteket is beleértjük, mikor nem fordul elő mindkét szám.)

Megoldás:

(3 pont) S_7 azt jelenti, hogy legalább 7 az összeg, S_8 pedig azt, hogy legalább 8. Az A esemény tehát pontosan akkor teljesül, ha S_7 teljesül, de S_8 nem, tehát $A = S_7 \cap \overline{S_8}$.

(3 pont) A MAX_2 esemény azt jelenti, hogy a dobott számok legnagyobbika 2-es, azaz hogy két darab 2-est vagy egy darab 1-est és egy darab 2-est dobunk. Ez utóbbi esetet kizárhatjuk, ha biztosítjuk, hogy ne lehessen 3 az összeg, de 4 viszont igen. Tehát $B = MAX_2 \cap S_4$ megfelelő lesz.

(4 pont) Az az eset, amikor mindkét szám 6-os, úgy is kifejezhető, hogy a számok összege (legalább) 12, azaz ezt az esetet S_{12} írja le. Az az eset, amikor mindkét szám 1-es, úgy is kifejezhető, hogy a dobott számok maximuma 1, azaz ez pont a MAX_1 esemény. Végül az, hogy egy darab 1-est és egy darab 6-ost dobunk, úgy fejezhető ki, hogy a számok összege 7, továbbá a maximumuk 6. Tehát $C = S_{12} \cup MAX_1 \cup (S_7 \cap \overline{S_8} \cap MAX_6)$.

2. Megkeverünk egy pakli magyar kártyát, majd egymás után visszatevés nélkül kihúzunk belőle 4 lapot.

a) Mi a valószínűsége, hogy pontosan egy ászt húzunk?

b) Mi a valószínűsége, hogy pontosan két ászt húzunk?

c) Mi a valószínűsége, hogy legalább egy ászt húzunk?

(Egy pakli magyar kártya 32 különböző lapból áll, és 4 darab ászt tartalmaz.)

Megoldás:

(1 pont) Összesen $\binom{32}{4}$-féleképp választhatunk ki 4 lapot a 32-ből, ez tehát az eseménytér elemszáma.

a)

(1 pont) Ha pontosan egy ászt húzunk, az úgy lehetséges, hogy a 4 húzott lapból egyet az ászok közül választunk, míg a maradék 3 lapot ettől függetlenül a 28 másik lapból,

(1 pont) ezt $\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{3}$-féleképp tehetjük meg,

(1 pont) tehát

$$\mathbb{P}(\text{pontosan 1 ászt húzunk}) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{3}}{\binom{32}{4}} = \frac{1638}{4495} \approx 0{,}3644.$$

b)

(1 pont) Ha pontosan két ászt húzunk, az úgy lehetséges, hogy a 4 húzott lapból kettőt a 4 ász közül választunk, míg a maradék 2 lapot ettől függetlenül a 28 másik lapból,

(1 pont) ezt $\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{2}$-féleképp tehetjük meg,

(1 pont) tehát

$$\mathbb{P}(\text{pontosan 2 ászt húzunk}) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{32}{4}} = \frac{567}{8990} \approx 0{,}0631.$$

c)

(1 pont) Egyszerűbb a komplementer esemény valószínűségét kiszámolni, ez pedig az, hogy egy ászt sem húzunk.

(1 pont) Ez pedig úgy lehetséges, hogy a 4 húzott lapot a 28 ásztól különböző lapból választjuk. Ezt $\binom{28}{4}$-féleképp tehetjük meg,

(1 pont) tehát

$$\mathbb{P}(\text{legalább 1 ászt húzunk}) = 1 - \mathbb{P}(\text{nem húzunk ászt}) = 1 - \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}} = \frac{3097}{7192} \approx 0{,}4306.$$

3. Az A, B és C események mindegyike $\frac{1}{3}$ valószínűséggel következik be, továbbá az A és B, valamint a B és C események egymást kizáróak. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(A \cap C)$ valószínűséget, ha tudjuk, hogy $\frac{1}{9}$ annak a valószínűsége, hogy az A, B és C események egyike sem következik be. Függetlenek-e az A és C események?

Megoldás:

(1 pont) A feladat szövege alapján $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = \dfrac{1}{9}$,

(1 pont) ezért

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = \frac{8}{9}.$$

(1 pont) Másrészt a *szita-formula* alapján

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

(Akkor is jár a pont, ha a formula neve nincs kiírva, de maga a formula jó.)

(1 pont) Itt $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{3}$,

(1 pont) és mivel A és B ill. B és C egymást kizáró események, így

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

(1 pont) Ebből $A \cap B \cap C \subset A \cap B$ miatt az is következik, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

(1 pont) Behelyettesítve a szita-formulába

$$\frac{8}{9} = 3 \cdot \frac{1}{3} - 0 - 0 - \mathbb{P}(A \cap C) + 0 = 1 - \mathbb{P}(A \cap C),$$

(1 pont) azaz $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{9}$.

(1 pont) Mivel $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \frac{1}{9}$,

(1 pont) így tehát $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap C)$, azaz az A és C események függetlenek.

4. Egy városban ugyanannyi férfi van, mint nő, és ott minden 100 férfi közül 5, ill. minden 10 000 nő közül 25 színvak. Mennyi a valószínűsége, hogy a színvakokról vezetett nyilvántartásból egy találomra választott karton egy férfi adatait tartalmazza?

Megoldás:

(0 pont) Jelölje F, N ill. S azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen választott városlakó férfi, nő ill. színvak.

(1 pont) A kérdéses valószínűség: $\mathbb{P}(F \mid S) =$?

(1 pont) A(z egyszerű) Bayes-tétel szerint

(1 pont)

$$\mathbb{P}(F \mid S) = \frac{\mathbb{P}(S \mid F)\,\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(S)}.$$

(1 pont) Mivel F és N teljes eseményrendszert alkot,

(1 pont) így a teljes valószínűség tétele szerint

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \mid F)\,\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(S \mid N)\,\mathbb{P}(N).$$

(1 pont) A feladat szövege alapján $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(N) = \frac{1}{2}$,

(1 pont) továbbá $\mathbb{P}(S \mid F) = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$

(1 pont) és $\mathbb{P}(S \mid N) = \dfrac{25}{10\,000} = \dfrac{1}{400} = 0{,}0025$.

(1 pont) Azaz

$$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{400} \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{800} = 0{,}02625,$$

(1 pont) tehát

$$\mathbb{P}(F \mid S) = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{21}{800}} = \frac{20}{21} \approx 0{,}9524.$$

5. Egy falusi búcsúban az egyik sátorban célbalövéssel lehet plüssjátékokat nyerni. Egy 1 m átmérőjű kör alakú céltáblára kell lőni légpuskával, nyereményt pedig akkor lehet választani, ha valaki beletalál a tábla középpontja körüli 10 cm sugarú körbe. Gréta nagyon szeretne egy plüss pingvint, ezért elhatározza, hogy addig próbálkozik, amíg el nem találja a középső kis kört (utóbbi esetben persze egy tetszőleges játékot választhat magának). Egy próbálkozásért 200 forintot kell fizetnie (és mindig csak a soron következő 1 db próbálkozásért fizet). Viszont a légpuska nem éppen optimális beállításainak, valamit Gréta lövészetben való járatlanságának köszönhetően feltehető, hogy találatai egymástól függetlenül, egyenletesen véletlenszerűen oszlanak el az egész céltáblán (Gréta elszántságából adódóan azért azt is feltehetjük, hogy minden lövés eltalálja a céltáblát). Mennyi Gréta próbálkozásai számának a várható értéke? Mi a valószínűsége annak, hogy Gréta több mint 1000 forintot költ el a céllövöldében?

Megoldás:

(1 pont) Jelölje X Gréta lövéseinek a számát, ekkor X egy valószínűségi változó.

(1 pont) Gréta egy lövése megfelel egy pont véletlen választásának egy 1 m átmérőjű K körön, ez tehát az eseménytér.

(1 pont) A K kör sugara 0,5 m, azaz 50 cm, így területe $T(K) = 50^2\pi \approx 7853{,}9816 \text{ cm}^2$

(1 pont) Egy adott lövésnél annak a p valószínűsége, hogy Gréta beletalál a középső k 10 cm sugarú kis körbe

$$p = \frac{T(k)}{T(K)} = \frac{10^2\pi}{50^2\pi} = \frac{1}{25}.$$

(1 pont) Mivel a lövések egymástól függetlenek, és a siker bekövetkezésének esélye mindig p, így $X \sim Geo(p)$.

(1 pont) A geometriai eloszlású változók várható értékének képlete szerint $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = 25$, tehát várhatóan ennyi lövésre lesz szüksége Grétának.

(1 pont) Az, hogy Gréta több mint 1000 forintot költ, éppen azt jelenti, hogy 5-nél többször lő, vagyis a $\mathbb{P}(X > 5)$ valószínűséget keressük.

(1 pont) A komplementer eseményre áttérve

$$\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X \le 5) = 1 - (\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5)),$$

(1 pont) behelyettesítve

$$1 - p(1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + (1-p)^4) = 1 - p \cdot \frac{1 - (1-p)^5}{1 - (1-p)} = (1-p)^5.$$

(1 pont) Tehát a keresett valószínűség $\left(\frac{24}{25}\right)^5 = 0{,}8154$.

6. Az X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\sqrt{t}}, & \text{ha } t \in (0;1), \\ 0, & \text{különben}, \end{cases}$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ egy paraméter. Határozzuk meg α értékét, valamint az X eloszlásfüggvényét ill. várható értékét.

Megoldás:

(1 pont) Mivel f_X sűrűségfüggvény, így

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\, ds = 1$$

kell teljesüljön.

(1 pont) Azaz a Newton–Leibniz-formula szerint

$$1 = \int_0^1 \frac{\alpha}{\sqrt{s}}\, ds = \alpha \left[2\sqrt{s}\right]_0^1 = 2\alpha,$$

(1 pont) ezért $\alpha = \frac{1}{2}$.

(1 pont) Az X eloszlásfüggvénye (definíció szerint)

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\, ds.$$

(1 pont) Ha $t \le 0$, akkor ez az integrál 0,

(1 pont) illetve ha $t > 1$, akkor (mivel 1-nél nagyobb számokra $f_X(s) = 0$)

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\,ds = 1.$$

(1 pont) Ha pedig $0 < t \leq 1$, akkor

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds = \int_{0}^{t} \frac{1}{2\sqrt{s}}\,ds = \left[\sqrt{s}\right]_0^t = \sqrt{t}.$$

(0 pont) Összefoglalva

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \leq 0, \\ \sqrt{t} & \text{ha } 0 < t \leq 1, \\ 1 & \text{ha } t > 1. \end{cases}$$

(1 pont) A várható érték definíciója alapján

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s f_X(s)\,ds$$

(1 pont)

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{s}}{2}\,ds$$

(1 pont)

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$