

**1. feladat (4+14 pont)**

a) Legyen  $A \in \mathbb{R}$ ,  $x_0$  pedig az  $f$  függvény értelmezési tartományának torlódási pontja! Mit jelent az, hogy  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ?

b) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{13 - x^2} = 3,$$

azaz adjon meg egy lehetséges  $\delta(\varepsilon)$  függvényt!

**2. feladat (9+8=17 pont)**

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)^5 \cdot (\sin^2(3x) - 5), & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{\sin^2(5x)}{3x^2}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a) Pontosan mely pontokban folytonos, illetve deriválható az  $f$  függvény?  
(Válaszát indokolja meg!)

b) Határozza meg a függvény deriváltfüggvényét ott, ahol létezik!

**3. feladat (17 pont)**

Adja meg az  $f(x) = \pi + \arccos(3x - 1)$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Igazolja, hogy a függvény invertálható, határozza meg inverzét, annak értelmezési tartományát, értékkészletét és deriváltját!

**4. feladat (10+10+10 pont)**

Számolja ki az alábbi határértékeket!

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - x - 1)}{\arctg(x - 2)}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^{3x} - 1} - \frac{1}{3x} \right), \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} x)^{\frac{2}{\operatorname{sh}^2 x}}$$

**5. feladat (18 pont)**

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az  $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$  függvény konvex illetve konkáv! Mely pontokban van a függvénynek inflexiós pontja?

---

**IMSC feladat (8 IMSC pont)**

Egy  $R$  sugarú gömbbe egyenes körhengereket írunk. Adjuk meg a maximális térfogatú körhenger  $h$  magasságát ( $R$  arányában)!