ANALÍZIS(2) **VIZSGADOLGOZAT** **2011. jan. 3.**
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (9 pont)
Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = x\,e^{3y-2x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = x\,e^{-2x^2} \cdot e^{3y}$$

$$\int e^{-3y}\,dy = \underbrace{\int x\,e^{-2x^2}\,dx}_{-\frac{1}{4}\int -4x\,e^{-2x^2}dx} \quad 3$$

$$\frac{e^{-3y}}{-3} = -\frac{1}{4}e^{-2x^2} + C$$

2 3 1

2. feladat (15 pont)

a) Hogyan definiáljuk egy f függvény x_0 körüli Taylor sorát?

b) Milyen elégséges tételt tanultunk arra, hogy f megegyezzék Taylor sorával?

c) Vezesse le az $f(x) = \sin x$ függvény Taylor sorát $x_0 = 0$ esetén!
$f(x) = T(x)$ milyen x -ekre áll fenn? Indokoljon!

a.) D Legyen f akárhányszor differenciálható x_0-ban. Ekkor a formálisan előállítható

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots := T(x)$$

hatványsort az f függvény x_0 alapponthoz tartozó Taylor sorának nevezzük.
$x_0 = 0$ esetén:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Ezt MacLaurin sornak is hívják.

an2Xv110103/1.

b.) Elégséges tétel $f(x) = T(x)$ fennállására:

Ⓣ Ha f akárhányszor differenciálható $(-R, R)$-en és $f,\ f',\ f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak itt, akkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \qquad x \in (-R, R)\text{-en.}$$

Ⓜ x_0 bázispontra hasonló tétel mondható ki $(x_0 - R, x_0 + R)$-re.

c.)

$$f(x) = \boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ; \qquad \boxed{x \in \mathbb{R}}$$

Ui.:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ \hline f^{(4)}(x) = \sin x & \downarrow \text{ Innen periodikusan ismétlődik} \end{array}$$

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

A deriváltak $(-\infty, \infty)$-en egyenletesen korlátosak, ezért $\forall\ x$-re: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$.

3. feladat (14 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

$$f(x) = \frac{1}{1+4x^2}\ , \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+3x}}$$

Mindkét esetben írja le az a_4 együttható értékét elemi műveletekkel!

$$f(x) = \frac{1}{1-(-4x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-4x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n x^{2n} \qquad (3)$$

$$|-4x^2| = 4|x|^2 < 1 \implies |x| < \frac{1}{2} \qquad K.T.: \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

$$a_4 = (-4)^2\ (=16) \qquad (1)$$

$$g(x) = (1+(3x))^{-\frac{1}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} 3^n x^n \qquad (4)$$

$$|3x| = 3|x| < 1 \implies |x| < \frac{1}{3} = R \qquad K.T.: \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (2)$$

$$a_4 = \binom{-1/5}{4} 3^4 = \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{11}{5}\right)\left(-\frac{16}{5}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 3^4 \qquad (2)$$

4. feladat (20 pont)

a) Mi jellemzi a gradiensvektor nagyságát illetve irányát?
Állítását indokolja meg!

b) Legyen

$$f(x,y) = e^{x^2+xy^3}, \qquad P_0(1,-1)$$

Írja fel f grafikonjának az adott P_0 ponthoz tartozó érintősíkja egyenletét!
$df\,(P_0,(h,k)) = ?$

a. $\boxed{8}$ (T) Ha grad f $\exists$ $K_{\underline{a}}$-ban, akkor

$$\max \frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|$$

és akkor kapjuk, ha $\underline{e} = \dfrac{\operatorname{grad} f(\underline{a})}{|\operatorname{grad} f(\underline{a})|}$ (3)

(B) Az adott feltétel esetén:

$$\frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})| \cdot \underbrace{|\underline{e}|}_{=1} \cos\varphi =$$

$$= |\operatorname{grad} f(\underline{a})| \cdot \cos\varphi$$

φ: grad f($\underline{a}$) és $\underline{e}$ által bezárt szög

Mivel $-1 \le \cos\varphi \le 1$:

$$\max \frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|, \text{ ha } \varphi = 0, \text{ tehát}$$

$$\underline{e} = \frac{\operatorname{grad} f(\underline{a})}{|\operatorname{grad} f(\underline{a})|}$$ (5)

b.) $\boxed{12}$

$$f'_x = e^{x^2+xy^3} \cdot (2x+y^3) \quad (2)$$

$$f'_y = e^{x^2+xy^3} \cdot 3xy^2 \quad (2)$$

$f'_x(P_0) = 1$, $f'_y(P_0) = 3$, $f(P_0) = 1$

Érintősík:

$$f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$$

$$1\cdot(x-1) + 3(y+1) - (z-1) = 0 \quad (5)$$

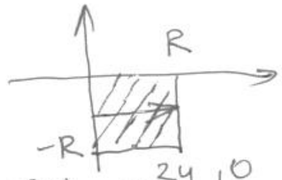
$$df(P_0,(h,k)) = f'_x(P_0)\,h + f'_y(P_0)\,k = h + 3\cdot k \quad (3)$$

an2Xv110103/3.

5. feladat (8 pont)*

$$\iint_T e^{2y-3x}\,dT = ? \qquad T:\ x \ge 0,\quad y \le 0$$

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0}\int_{0}^{R} e^{2y}\, e^{-3x}\, dx\, dy = \quad 2$$



$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} e^{2y} \underbrace{\frac{e^{-3x}}{-3}\Bigg|_{x=0}^{R}}_{-\frac{1}{3}\left(e^{-3R}-1\right)\ \ 2} dy = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{3}\left(1-e^{-3R}\right) \underbrace{\frac{e^{2y}}{2}\Bigg|_{-R}^{0}}_{\frac{1}{2}\left(1-e^{-2R}\right)\ \ 2} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{3}\Big(1-\underset{\downarrow\,0}{e^{-3R}}\Big)\frac{1}{2}\Big(1-\underset{\downarrow\,0}{e^{-2R}}\Big) = \frac{1}{6} \quad 2$$

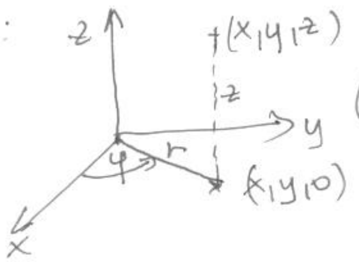
6. feladat (7 pont)*

Hengerkoordináták segítségével írja le az alábbi térrészt!

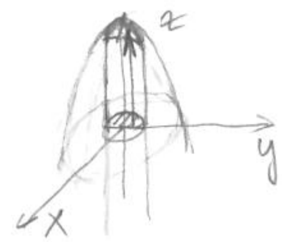
$$x^2+y^2 \le 1, \quad x \le 0, \quad z \le 6 - x^2 - y^2, \quad z \ge 0$$

Egy ábra segítségével mutassa meg a hengerkoordináták jelentését és írja le a Descartes koordináták és a hengerkoordináták kapcsolatát!

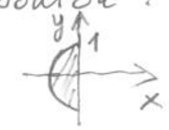
Hengerkoordináták:



2



Vetületpontok:



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

2

A megadott térrésznél:

$0 \le z \le 6 - r^2$

$\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$

$0 \le r \le 1$

3

7. feladat (14 pont)*

a) Definiálja e^z értékét! Mutassa meg, hogy periodikus!

b) Hogyan számoljuk ki $\operatorname{Ln} z$ értékét?

c) Oldja meg az alábbi egyenleteket! (A megoldást algebrai alakban adja meg!)

$c1)\quad e^z = 0 \qquad\qquad c2)\quad e^{2z} + j3 = 0$

a) $e^z := e^x(\cos y + j\sin y)$ 2

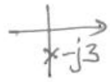
$2\pi j$ szerint periodikus, mert

$e^{z+2\pi j} = e^{x+j(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + j\sin(y+2\pi)) = e^x(\cos y + j\sin y) = e^z$ 3

b) $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + j(\operatorname{arc} z + 2k\pi)$; $\operatorname{arc} z \in [-\pi, \pi)$ 3

c1) $e^z = 0$ nincs ilyen z, mert $|e^z| = e^x > 0 \;\forall\, x$-re 2

c2) $2z = \operatorname{Ln}(-j3) = \ln 3 + j\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$



$z = \frac{1}{2}\ln 3 + j\,\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ 4

8. feladat (14 pont)*

Határozza meg a $\beta > 0$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$u = e^{2x}\cos(\beta y) + x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re} f$$

legyen, ahol f reguláris a komplex síkon!

$\operatorname{Im} f = ?$

f reg. $\Rightarrow \Delta u \equiv 0$

$u'_x = 2e^{2x}\cos\beta y + 3x^2 - 3y^2 \qquad u''_{xx} = 4e^{2x}\cos\beta y + 6x$

$u'_y = -\beta e^{2x}\sin\beta y - 6xy \qquad u''_{yy} = -\beta^2 e^{2x}\cos\beta y - 6x$

$\Delta u = e^{2x}\cos\beta y\,(4 - \beta^2) \equiv 0 \Rightarrow \beta = \pm 2 \underset{\beta>0}{\Rightarrow} \underline{\underline{\beta = 2}}$ 6

$\operatorname{Im} f := v(x,y)$

C–R miatt:

$v'_x = -u'_y = 2e^{2x}\sin 2y + 6xy$ (1)

$v'_y = u'_x = 2e^{2x}\cos 2y + 3x^2 - 3y^2$ (2)

(1)-ből: $v(x,y) = \int(2e^{2x}\sin 2y + 6xy)\,dx = e^{2x}\sin 2y + 3x^2y + C(y)$

(2)-be behelyettesítve:

$2e^{2x}\cos 2y + 3x^2 + C'(y) = 2e^{2x}\cos 2y + 3x^2 - 3y^2$

$\Rightarrow C'(y) = -3y^2 \Rightarrow C(y) = -y^3 + K$

$v(x,y) = \operatorname{Im} f = e^{2x}\sin 2y + 3x^2y - y^3 + K$ 8

A *-os feladatokból legalább 16 pontot kell elérni!

an2Xv110103/5.

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $y'' + 4y' = 0$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

c) $y'' + 4y = 0$

a.) $\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda+4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -4$

$y = C_1 + C_2 e^{-4x}$ 3

b.) $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2$

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ 3

c.) $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2j$

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ 4

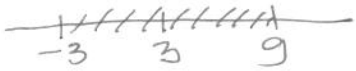
10. feladat (10 pont)

Adja meg az alábbi hatványsor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n^2}{6^{n+1}}\ (x-3)^n$$

$a_n = \frac{(-1)^n n^2}{6^n \cdot 6}$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{6 \cdot \sqrt[n]{6}} \longrightarrow \frac{1^2}{6 \cdot 1} = \frac{1}{6} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 6$ 5 ; $x_0 = 3$



1

Végpontok:

$x = -3$: $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{6^n \cdot 6} \cdot (-6)^n = \sum^{\infty} \frac{1}{6} n^2 \not\to 0$ div. 2

$x = 9$: $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{6^n \cdot 6}\, 6^n = \sum^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{6} \not\to 0$ div. 2

an2Xv 110103/6.