**1. (13 pont)**

Határozza meg a következő differenciálegyenletnek az $y(-\frac{5}{2}) = 2$ kiűezdeti feltétet kielégítő megoldását!

$$y'(x) = \frac{\mathrm{sh}(2x+5)}{y(x)}$$

**2. (13 pont)**

Határozza meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'(x) - \frac{1}{x+1}y(x) = 2x$$

**3. (10 pont)**

Határozza meg a következő hatványsor konvergenciasugarát!

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{n^2} x^n$$

**4. (12 pont)**

(a) Mondja ki az $\sum_n a_n x^n$ hatványsor tagonkénti differenciálhatóságáról tanult tételt!

(b) Határozza meg a következő mennyiséget, feltéve, hogy $|x| < R$. (A végeredmény ne tartalmazzon sem deriválást, sem összegzést! $R$ a hatványsor konvergenciasugara.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^{2n})$$

(c) Mennyi a fenti sor $R$ konvergenciasugara?

**5. (12 pont)**

(a) Mondja ki egy többváltozós függvény iránymenti deriváltja és gradiense közti kapcsolatról tanult tételt!

(b) Határozza meg az $f$ függvénynek az $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos iránymenti deriváltját a $P(1,4)$ pontban, ahol:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+2y}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

**6. * (20 pont)**

(a) Ismertesse a gömbi polárkoordinátarendszert! (Adja meg az $x$, $y$, $z$ Descartes-koordinátákat az $r$, $\vartheta$, $\phi$ polárkoordináták függvényeként.)

(b) Határozza meg az

$$\iiint_V (x^2+y^2)\,dV$$

térfogati integrált, ahol $V$ az egységsugarú gömb! (Gömbi polárkoordinátarendszerben dolgozzon!)

**7. * (10 pont)**

Határozza meg a következő mennyiségek valós és képzetes részét!

$a)$ $\ln(3+4i)$, $b)$ $\sin(3+4i)$

**8. * (10 pont)**

(a) Ismertesse (a reguláris függvények körintegráljára vonatkozó) Cauchy-féle alaptételt! (A pontos feltételekkel együtt!)

(b) Határozza meg a következő integrál értékét!

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-5i}\,dz$$

(A $|z| = 2$ egyenlettel meghatározott körön egyszer haladunk végig pozitív irányban. Használja fel az előző pontban ismertetett tételt!)

A *-gal jelölt feladatokból külön el kell érni 30%-ot!

-1-

1, $\boxed{13}$ $\quad y'(x) = \dfrac{sh(2x+5)}{y(x)}$ ; $\quad y(-\tfrac{5}{2}) = 2$

$$\int y\, dy = \int sh(2x+5)\, dx \quad 3$$

$$3 \quad \frac{y^2}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} ch(2x+5) + C \quad 3$$

$$y(x) = \pm\sqrt{ch(2x+5) + C} \quad 1$$

$$2 = \sqrt{\underbrace{ch(0)}_{1} + C} \implies \underline{\underline{C = 3}} \quad 2$$

$$\underline{\underline{y(x) = \sqrt{ch(2x+5) + 3}}} \quad 1$$

---

2, $\boxed{13}$ $\quad y'(x) - \dfrac{1}{x+1} y(x) = 2x$

(H): $\boxed{5}$

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x+1} \qquad y \equiv 0 \to e.h.$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1} \quad 2$$

$$\ln|y| = \ln|x+1| + C \quad 1 \quad 1$$

$$y = \pm e^{C} \cdot (x+1)$$

$$y_{h,á}(x) = K \cdot (x+1); \quad K \in \mathbb{R} \quad 1$$

(I): $\boxed{5}$

$$y_{i,p}(x) = K(x) \cdot (x+1) \quad 1$$

$$y'_{i,p}(x) = K'(x) \cdot (x+1) + K(x) \quad 1$$

$$K'(x) \cdot (x+1) + \cancel{K(x)} - \frac{\cancel{K(x) \cdot (x+1)}}{\cancel{x+1}} = 2x$$

$$K'(x) = \frac{2x}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1} \quad 1$$

$$K(x) = \int \left(2 - \frac{2}{x+1}\right) dx = 2x - 2\ln|x+1| \quad 2$$

$$y_{i,p}(x) = 2x(x+1) - 2\ln|x+1|\cdot(x+1)$$

$$y_{i,\acute{a}}(x) = y_{h,\acute{a}}(x) + y_{i,p}(x) \; ② = K(x+1) + 2(x+1)(x-\ln|x+1|) =$$

$$= \underline{\underline{(x+1)(K+2x-2\ln|x+1|)}} \; ①$$

— ∘ —

3, $\boxed{10}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{n^2}}_{a_n} x^n$$

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \; ② = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{n} \; ② = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{4}{2n}\right)^n} \; ② =$$

$$= \frac{e^{1/2}}{e^2} = e^{1/2-2} = e^{-3/2} \; ②$$

$$R = \frac{1}{\alpha} = \underline{\underline{e^{3/2}}} \; ②$$

— ∘ —

4, $\boxed{12}$ $\boxed{3}$ a, A $\sum_n a_n x^n$ hatványsor konvergenciatartományának minden belső pontjában tagonként diff.-ható. ② A tagonkénti differenciálással kapott hatványsor konvergenciasugara megegyezik az eredeti sor konv. sugarával. ①

$$\left(\sum_n a_n x^n\right)' = \sum_n n a_n x^{n-1} \quad , \text{ ha } |x| < R$$

— ∘ —

b, $\boxed{6}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(x^{2n}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\right) ② = \frac{d}{dx}\,\frac{x^2}{1-x^2} \; ② =$$

$$= \frac{2x(1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} \; ② = \frac{2x - \cancel{2x^3} + \cancel{2x^3}}{(1-x^2)^2} = \underline{\underline{\frac{2x}{(1-x^2)^2}}}$$

$$\text{ha } |x| < R$$

c, ③ $\sum_{1}^{\infty} x^{2n}$ geometriai sor, tehát $|x^2| < 1$

$|x| < 1 \Rightarrow \underline{\underline{R = 1}}$

---

$\boxed{12}$

5, a, Legyen $|\underline{e}| = 1$, és t.f.h. $\exists \operatorname{grad} f(\underline{x}_0)$

③ Ekkor $\dfrac{d f(\underline{x}_0)}{d \underline{e}} = \underline{e} \cdot \operatorname{grad} f(\underline{x}_0)$

---

b, $\boxed{9}$ $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y}$ ; $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ; $P(1,4)$

$f'_x(x,y) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2y}}$ ② ; $f'_x(1,4) = \dfrac{1}{3}$ ①

$f'_y(x,y) = \dfrac{2}{2\sqrt{x^2+2y}}$ ② ; $f'_y(1,4) = \dfrac{1}{3}$ ①

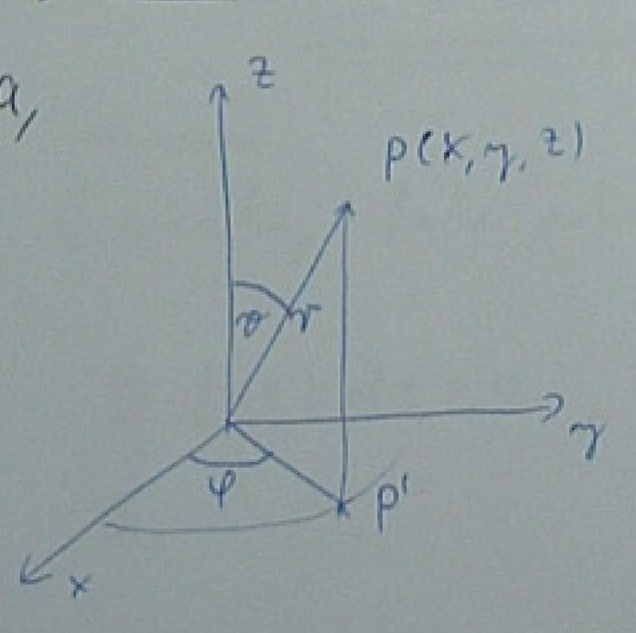
$|\underline{v}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ ; $\underline{e} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \underline{v}$

$\dfrac{d f(P)}{d \underline{e}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \underbrace{[1, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{1+2=3} = \underline{\underline{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}}$ ③

---

$\boxed{20}$ 6*, a,

$\boxed{6}$




$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$ ②

$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$ ②

$z = r \cos \vartheta$ ②

$\boxed{14}$

$$\iiint_V (x^2+y^2)\,dV = \int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r^2\sin^2\vartheta\,\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{1}\,\underbrace{\overbrace{r^2\sin\vartheta}^{|J|}}_{dr\,d\varphi\,d\vartheta} =$$

(3)

$$= \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{(3)\ 2\pi} \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \underbrace{\sin^3\vartheta}_{\sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)}\, d\vartheta \cdot \underbrace{\int_{r=0}^{1} r^4\, dr}_{\frac{1}{5}\ (3)} = \frac{2\pi}{5}\int_{\vartheta=0}^{\pi}(\sin\vartheta-\sin\vartheta\cos^2\vartheta)\,d\vartheta =$$

$\vartheta$-ra vett integrál: (5)

$$= \frac{2\pi}{5}\left(\underbrace{\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi}}_{2}+\frac{1}{3}\underbrace{\left[\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi}}_{-2}\right) = \frac{2\pi}{5}\underbrace{\left(2-\frac{2}{3}\right)}_{\frac{4}{3}} = \frac{8\pi}{15}$$

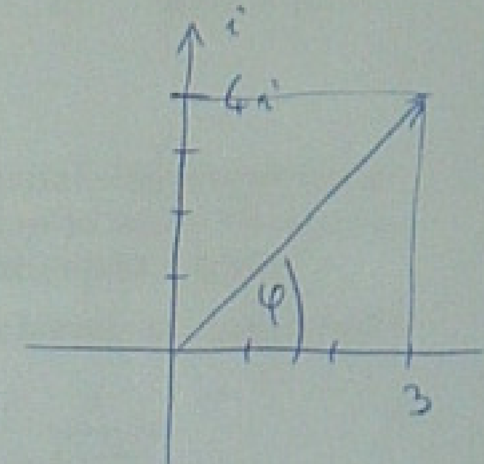
---

7, a, $\boxed{5}$

$$\ln(3+4i) = \ln 5 + i\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{4}{3}$$




b, $\boxed{5}$

$$\sin(3+4i) = \sin 3\,\underbrace{\cos(4i)}_{\mathrm{ch}\,4} + \cos 3\,\underbrace{\sin(4i)}_{i\,\mathrm{sh}\,4} =$$

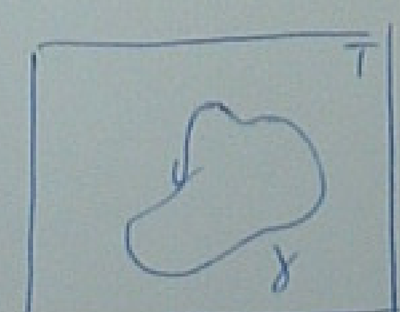
$$= \sin 3\cdot \mathrm{ch}\,4 + i\cos 3\,\mathrm{sh}\,4.$$

---

8, a, Cauchy-féle alaptétel

(5)

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0\ ,\ \text{ha}$$




T egyszeresen öf. tartomány;
f reguláris T-n
γ zárt görbe T-ban.

b, (5)

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-5i}\,dz = 0$$

Az integrandus a $z_0=5i$ kivételével mindenütt reguláris. $z_0$ $\gamma$-n kívül esik.