

VIK, Műszaki Informatika  
ANALÍZIS (1)

Bevezető,  
Számsorozatok  
Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar  
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján  
összeállította:

Fritz Józsefné dr.  
Kónya Ilona

2003. szeptember

Szerkesztette: Győri Sándor

# I. rész

## Bevezető

### 1. A valós számok ( $\mathbb{R}$ ) axiómái

L. Császár Ákosné: Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása 05-1315 (25–34. oldal)

#### 1.1. Algebrai axiómák

$\mathbb{R}$ -ben értelmezett két művelet:  $+$  és  $\cdot$ .

Ezek a műveletek nem vezetnek ki az adott halmazból,  $\mathbb{R}$ -ből, tehát  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ -re:  $a + b \in \mathbb{R}$  és  $a \cdot b \in \mathbb{R}$ .

##### $+$ művelet tulajdonságai (1–4.).

1.  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ -re (az összeadás *asszociatív*).

2. Létezik egyetlen szám (ezt 0-val jelöljük), amelyre teljesül, hogy

$$0 + a = a + 0 = a, \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}.$$

3. Minden  $a \in \mathbb{R}$  számhoz létezik pontosan egy olyan  $x \in \mathbb{R}$ , amelyre

$$x + a = a + x = 0.$$

Az így értelmezett  $x$ -et  $(-a)$ -val jelöljük. (Neve: additív inverz.)

4.  $a + b = b + a$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ -re (az összeadás *kommutatív*)

##### $\cdot$ művelet tulajdonságai (5–8.).

5.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$  (a szorzás *asszociatív*)

6. Létezik egyetlen szám, amelyet 1-gyel jelölünk ( $1 \neq 0$ ), amelyre teljesül, hogy

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}$$

7. Minden  $a \neq 0$ -hoz létezik egyetlen  $x \in \mathbb{R}$ , amelyre

$$x \cdot a = a \cdot x = 1$$

Az így értelmezett  $x$ -et az  $a \neq 0$  szám reciproknak nevezzük, és  $\frac{1}{a}$ -val jelöljük.

8.  $a \cdot b = b \cdot a$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  (a szorzás *kommutatív*)

A két műveletre (+ és  $\cdot$ )-ra együttesen érvényes tulajdonság (9.).

$$9. \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (\text{disztributivitás})$$

## 1.2. Rendezési axiómák (10–13.)

10. Tetszőleges  $a, b \in \mathbb{R}$  számpárra az

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b$$

relációk közül pontosan egy teljesül (trichotom tulajdonság).

11. Ha  $a < b$  és  $b < c$  (röviden  $a < b < c$ ), akkor  $a < c$ ,  $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})$  (tranzitivitás)

12. Ha  $a < b$ , akkor  $a + c < b + c$ ,  $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})$  (a rendezés *monoton*).

13. Ha  $a < b$  és  $c > 0$ , akkor  $a \cdot c < b \cdot c$ ,  $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})$ .

## 1.3. Archimédész-féle axióma (14.)

14. Tetszőleges  $b > 0$  számhoz található  $b$ -nél nagyobb  $n$  természetes szám.

## 1.4. Cantor-féle axióma (15.)

15. Ha minden  $n \in \mathbb{N}$  számnak megfeleltetünk egy  $I_n = \{x : a_n \leq x \leq b_n, x \in \mathbb{R}\}$  halmazt (röviden  $[a_n, b_n]$  zárt intervallumot) oly módon, hogy

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad b_{n+1} \leq b_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

Vagyis: egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozat elemeinek metszete nem üres.  $(\exists \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \xi \in \mathbb{R})$

Ⓜ Zártság fontos!  $(I_n = (0, \frac{1}{n}]$  esetén  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ )

## 2. A rendezési axiómákból levezethető

A rendezésre vonatkozóan könnyű belátni, hogy igazak az alábbi állítások (szokás ezeket az „egyenlőtlenségekkel való számolás szabályai”-nak is nevezni):

1. Minden  $a \in \mathbb{R}$  számra az

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0$$

tulajdonságok közül pontosan egy teljesül. ( $a > 0 \iff (-a) < 0$ )

2.  $(a < b) \wedge (c < d) \implies a + c < b + d$

Speciálisan:  $(a > 0) \wedge (b > 0) \implies a + b > 0$

3.  $(0 \leq a < b) \wedge (0 \leq c < d) \implies ac < bd$

Speciálisan:  $(a > 0) \wedge (b > 0) \implies ab > 0$

4.  $(a < b) \wedge (c < 0) \implies ac > bc$

Speciálisan:  $a < b \implies -a > -b$

5.  $0 < a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$a < b < 0 \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$a < 0 < b \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

$$a < b \implies \begin{array}{l} ab > 0: \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ ab < 0: \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \end{array}$$

6.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  esetén

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{és}$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

7. Ha  $n$  pozitív egész szám, és  $0 < a < b$ , akkor  $a^n < b^n$ .

Hasonlóan következnek az abszolútérték tulajdonságai.

## 3. Néhány fogalom

$$H \subset \mathbb{R}$$

Ⓓ  $H$  felülről korlátos, ha  $\exists k_f \in \mathbb{R}$ , hogy  $\forall x \in H: x \leq k_f$ . ( $k_f$ : felső korlát)

Ⓓ  $H$  alulról korlátos, ha  $\exists k_a \in \mathbb{R}$ , hogy  $\forall x \in H: k_a \leq x$ . ( $k_a$ : alsó korlát)

Ⓓ  $H$  korlátos, ha felülről is és alulról is korlátos, tehát  $\exists k: |x| \leq k$ .

Ⓓ A felülről korlátos  $H$  halmaz legkisebb felső korlátját szuprémumnak (felső határnak) nevezzük.

Jele:  $\sup H$ .

Ⓓ Az alulról korlátos  $H$  halmaz legnagyobb alsó korlátját infimumnak (alsó határnak) nevezzük.

Jele:  $\inf H$ .

Ⓐ  $H = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\}$  esetén:

Felső korlátok például:  $1, 3, \pi, \dots$

Alsó korlátok például:  $0, -2, -56, \dots$

$\sup H = 1$  (nincs a halmazban legnagyobb elem),  $\inf H = 0$  (= legkisebb elem)

Dedekind folytonossági tétel:

Ⓙ Felülről korlátos nem üres számhalmaznak mindig van szuprémuma. ( $\neg B$ )

Ebből következik:

Alulról korlátos nem üres számhalmaznak mindig van infimuma.

Ⓜ A fenti axiómarendszerben a Cantor-féle axióma lecserélhető ezzel az állítással.

...

## II. rész

# Számsorozatok

A valós számsorozat a természetes számokon értelmezett valós értékű függvény:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

az  $n$  helyen felvett értéke  $f(n) = a_n, n = 1, 2, \dots$

A számsorozat jelölése:

$$(a_n), \text{ vagy } \langle a_n \rangle, \text{ vagy } a_n, n = 1, 2, \dots$$

Ⓓ  $(a_n)$  felülről korlátos, ha  $\exists k_f: \forall n$ -re:  $a_n \leq k_f$ .

Ⓓ  $(a_n)$  alulról korlátos, ha  $\exists k_a: \forall n$ -re:  $k_a \leq a_n$ .

Ⓓ  $(a_n)$  korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos, tehát  $\exists k$ :

$$|a_n| \leq k \quad (k = \max\{|k_a|, |k_f|\}).$$

Vagyis a fenti definíciók szerint ilyenkor  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény értékészlete korlátos.

## Számsorozat konvergenciája:

Ⓓ Azt mondjuk, hogy  $(a_n)$  konvergens és határértéke (limesze)  $A \in \mathbb{R}$ , jelben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$$

ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz ( $\varepsilon \in \mathbb{R}$ )  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

$N(\varepsilon)$  neve: küszöbindex, küszöbszám

Ⓜ<sub>1</sub> A definícióval ekvivalens:

$\forall \varepsilon > 0$ -ra az  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$  intervallumon kívül a sorozatnak véges sok eleme van.  
(Az intervallumon belül pedig végtelen sok eleme van.)

Ⓜ<sub>2</sub> A határérték egyértelmű.

•••

*Az alábbi példánál a definíció segítségével bizonyítsuk be, hogy a megadott  $A$  a számsorozat határértéke!*

Pl.  $A = 0$ , ha

a) $a_n = \frac{1}{n}$	b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
------------------------	-----------------------------

Megoldás:

Mindkét esetben:

$$|a_n - A| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad N(\varepsilon) \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

Például  $\varepsilon = 0,001$  esetén  $N = 1000$  választás megfelelő.

Pl.  $a_n = \frac{6+n}{5,1-n}, \quad A = -1$

Megoldás:

$$|a_n - A| = \left| \frac{6+n}{5,1-n} - (-1) \right| = \left| \frac{11,1}{5,1-n} \right| \underset{n>5}{=} \frac{11,1}{n-5,1} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad n > 5,1 + \frac{11,1}{\varepsilon}$$

Ezért  $N(\varepsilon) \geq \left[ 5, 1 + \frac{11,1}{\varepsilon} \right]$ .

(Pl.) 
$$a_n = \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8}, \quad A = 0$$

Megoldás:

$$|a_n - A| = \left| \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8} \right| = \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8} < \varepsilon$$

Ezt az egyenlőtlenséget nem tudjuk megoldani  $n$ -re. Azonban nem szükséges a lehető legkisebb küszöbindex előállítása. Elegendő megmutatnunk, hogy létezik küszöbindex. Ezért a megoldáshoz felhasználhatjuk az egyenlőtlenségek tranzitív tulajdonságát, például az alábbi módon:

$$|a_n - A| = \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8} < \frac{n^2 - 0}{2n^5 + 0 + 0} = \frac{1}{2n^3} < \varepsilon \implies n > \sqrt[3]{\frac{1}{2\varepsilon}}$$

Ezért  $N(\varepsilon) \geq \left[ \sqrt[3]{\frac{1}{2\varepsilon}} \right]$ .

(Pl.) 
$$a_n = \frac{8n^4 + 3n + 20}{2n^4 - n^2 + 5}, \quad A = 4$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} |a_n - A| &= \left| \frac{8n^4 + 3n + 20}{2n^4 - n^2 + 5} - 4 \right| = \left| \frac{4n^2 + 3n}{2n^4 - n^2 + 5} \right| = \\ &= \frac{4n^2 + 3n}{2n^4 - n^2 + 5} < \frac{4n^2 + 3n^2}{2n^4 - n^4 + 0} = \frac{7}{n^2} < \varepsilon \implies \frac{7}{\varepsilon} < n^2 \end{aligned}$$

Innen  $N(\varepsilon) \geq \left[ \sqrt{\frac{7}{\varepsilon}} \right]$ .

### Számsorozat divergenciája:

A nem konvergens számsorozatokot divergens számsorozatnak nevezzük. Ennek két fontos speciális esete a  $+\infty$ -hez és a  $-\infty$ -hez divergáló számsorozat.

A megfelelő definíciók:

$$\textcircled{D} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \\ \text{ha } \forall P > 0\text{-hoz } (P \in \mathbb{R}) \exists N(P) \in \mathbb{N}, \text{ hogy} \\ a_n > P, \quad \text{ha } n > N(P)$$

$$\textcircled{D} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, \\ \text{ha } \forall M < 0\text{-hoz } (M \in \mathbb{R}) \exists N(M) \in \mathbb{N}, \text{ hogy} \\ a_n < M, \quad \text{ha } n > N(M)$$

Ez a definíció megfogalmazható  $M > 0$  feltétellel is:

$$\forall M > 0\text{-hoz } \exists N(M) \in \mathbb{N} : a_n < -M, \text{ ha } n > N(M)$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad a_n = 2n^3 + 3n + 5 \quad \text{Bizonyítsa be, hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty!$$

Megoldás:

$$a_n = 2n^3 + 3n + 5 > 2n^3 > P \implies n > \sqrt[3]{\frac{P}{2}} \implies N(P) \geq \left\lceil \sqrt[3]{\frac{P}{2}} \right\rceil$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad a_n = \frac{6 - n^2}{2 + n} \quad \text{Bizonyítsa be, hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty!$$

Megoldás:

Teljesítendő, hogy  $a_n = \frac{6 - n^2}{2 + n} < M (< 0)$ , ha  $n > N(M)$ .

Ez egyenértékű a következő feltétellel:

$(-a_n =) \frac{n^2 - 6}{2 + n} > -M (> 0)$ , ha  $n > N(M)$ . A feladatot egyszerűsítjük, hiszen most sem a legkisebb küszöbindexet keressük:

$$\frac{n^2 - 6}{2 + n} \underset{\substack{> \\ n \geq 4 \text{ esetén } \frac{n^2}{2} > 6}}{\quad} \frac{n^2 - \frac{n^2}{2}}{2n + n} = \frac{n}{6} > -M \implies n > -6M$$

Ezért  $N(M) \geq \max\{4, \lceil -6M \rceil\}$ .



**Binomiális együttható, binomiális tétel, Bernoulli-egyenlőtlenség: ...**  
(L. gyakorlat!)

**A határérték egyértelműsége**

Ⓓ Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$ , akkor  $A = B$ .

Ⓑ Indirekt módon bizonyítunk. Tehát feltesszük, hogy  $A \neq B$ , például  $A < B$ .

Legyen  $d = B - A > 0$  és  $\varepsilon = \frac{d}{3} > 0$ !

A számsorozat konvergenciája miatt létezik  $N_1(\varepsilon)$  és  $N_2(\varepsilon)$ , hogy

$$\begin{aligned} A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, & \text{ ha } n > N_1(\varepsilon), \\ B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon, & \text{ ha } n > N_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

De ekkor  $\forall n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$  esetén:

$$a_n < A + \varepsilon < B - \varepsilon < a_n$$

Ez pedig ellentmondás, tehát nem igaz, hogy  $A \neq B$ , vagyis  $A = B$ . ■

**A konvergencia szükséges feltétele**

$P \implies Q$ , a P állításból következik a Q állítás. Ezt kétféleképpen is megfogalmazhatjuk:

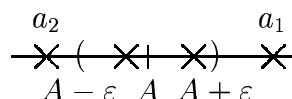
1. P elégséges feltétele Q-nak,
2. Q szükséges feltétele P-nek.

Ⓓ  $(a_n)$  konvergens  $\implies (a_n)$  korlátos  
(Tehát a korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának.)

Ⓑ  $\forall \varepsilon > 0$ -ra  $\exists N(\varepsilon)$ :

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) = N$$

Tehát  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ -on kívül legfeljebb csak az  $a_1, a_2, \dots, a_N$  elemek eshetnek.



$$\implies \begin{cases} \exists k_a : \forall n\text{-re } k_a \leq a_n & k_a = \min\{a_1, a_2, \dots, a_N, A - \varepsilon\} \\ \exists k_f : \forall n\text{-re } a_n \leq k_f & k_f = \max\{a_1, a_2, \dots, a_N, A + \varepsilon\}. \end{cases}$$

Így  $\exists K : |a_n| \leq K$ , tehát korlátos. ■

Ⓜ  $\Leftarrow$  nem igaz. (Az állítás nem megfordítható.)

Példa:  $a_n = (-1)^n$  korlátos, de nem konvergens.

Pl. Konvergens-e az alábbi sorozat:

$$a_n = \begin{cases} 2n + 1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{1}{3n^2 + 1}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} .$$

Nem konvergens, mert nem korlátos. ( $a_{2m} = 2 \cdot 2m + 1 = 4m + 1 \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$ -re ellentmond az Archimédész-féle axiómának.)

### Műveletek konvergens számsorozatokkal

Ⓣ<sub>1</sub>  $(a_n \rightarrow A) \wedge (b_n \rightarrow B) \implies (a_n + b_n \rightarrow A + B)$

ⓑ  $\exists N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ , hogy

$$\left. \begin{array}{l} |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ \text{és } |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \end{array} \right\} \implies \text{Ha } n > \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}, \text{ akkor}$$

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$N(\varepsilon) = \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$$

■

Ⓣ<sub>2</sub>  $(a_n \rightarrow A) \implies (c a_n \rightarrow c A)$

ⓑ

(i)  $c = 0$  esetén az állítás igaz.

(ii)  $c \neq 0$  esetén:

$$\begin{aligned} \exists N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right), \quad \text{hogy } |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right) \\ \implies |c a_n - c A| = |c| |a_n - A| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \quad \forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right) = N(\varepsilon) \end{aligned}$$

■

Következmény:

$$(i) (a_n \rightarrow A) \implies (-a_n \rightarrow -A) \quad (\text{Most } c = -1)$$

$$(ii) (a_n \rightarrow A) \wedge (b_n \rightarrow B) \implies (a_n - b_n) \rightarrow (A - B) \quad (T_1, T_2\text{-ből következik})$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{T_3} \quad \boxed{(i) (a_n \rightarrow 0) \wedge (b_n \rightarrow 0) \implies a_n b_n \rightarrow 0} \\ \quad \quad \boxed{(ii) (a_n \rightarrow A) \wedge (b_n \rightarrow B) \implies a_n b_n \rightarrow AB} \end{array}$$

$\textcircled{B}$

(i)  $\exists N_1 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  és  $N_2(2)$ , hogy

$$\left. \begin{array}{l} |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_1 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = N_1 \\ |b_n - 0| < 2 \quad \forall n > N_2(2) = N_2 \quad (\varepsilon = 2 \text{ most}) \end{array} \right\} \implies$$

Ha  $n > \max\{N_1, N_2\}$ , akkor  $|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$ .

(ii) Mivel a  $c_n \equiv A \forall n$ -re (stagnáló sorozat)  $\rightarrow A$ , ezért

$$(a_n - A \rightarrow A - A = 0) \wedge (b_n - B \rightarrow B - B = 0).$$

$T_3$  (i)-et alkalmazva kapjuk:  $(a_n - A) \cdot (b_n - B) \rightarrow 0$ , vagyis

$$a_n b_n - A b_n - B a_n + AB \rightarrow 0.$$

Ekkor

$$a_n b_n = \underbrace{(a_n b_n - A b_n - B a_n + AB)}_{\downarrow 0} + \underbrace{(A b_n + B a_n - AB)}_{\downarrow AB + AB - AB} \rightarrow AB$$

■

$\textcircled{M}$  Nyilván három konvergens sorozat szorzata az egyes határértékek szorzatához konvergál. Teljes indukcióval belátható, hogy véges sok konvergens sorozat szorzata is az egyes sorozatok határértékének szorzatához konvergál. Hasonlóan általánosítható  $T_2$  véges sok konvergens sorozat összegére.

$$\textcircled{T_3} \quad \boxed{(a_n \rightarrow 0) \wedge (b_n \text{ korlátos}) \implies a_n b_n \rightarrow 0}$$

Az előző bizonyítások megértése után próbálja meg bebizonyítani a tételt!  
(A bizonyítás az előadáson szerepel.)

$$\textcircled{T_4} \quad \boxed{(a_n \rightarrow A) \implies (|a_n| \rightarrow |A|)}$$

$$\textcircled{B} \quad ||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon). \quad \blacksquare$$

$\textcircled{M}$   $(|a_n|)$  konvergenciájából általában nem következik  $(a_n)$  konvergenciája.  
(Pl.  $a_n = (-1)^n$  divergens, de  $|a_n| = 1^n = 1 \rightarrow 1$ ).

Speciálisan azonban igaz:  $|a_n| \rightarrow 0 \implies a_n \rightarrow 0$ .

Ugyanis

$$||a_n| - 0| = |a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon)$$

$$\textcircled{T_5} \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{(i) } (b_n \rightarrow B \neq 0) \implies \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{B} \\ \text{(ii) } (b_n \rightarrow B \neq 0) \wedge (a_n \rightarrow A) \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B} \end{array}}$$

$\textcircled{B}$

(i) Mivel  $T_4$  szerint  $|b_n| \rightarrow |B|$ , ezért  $\exists N_1 \left( \frac{|B|}{2} \right) = N_1$ , hogy

$$||b_n| - |B|| < \frac{|B|}{2}, \text{ ha } n > N_1$$

azaz

$$|B| - \frac{|B|}{2} < |b_n| < |B| + \frac{|B|}{2}, \text{ ha } n > N_1$$

vagyis

$$|b_n| > \frac{|B|}{2}, \quad \forall n > N_1.$$

Másrészt  $\forall \varepsilon > 0$  esetén  $\exists N_2 \left( \frac{\varepsilon}{2} |B|^2 \right) = N_2$ , hogy

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} |B|^2, \quad \forall n > N_2.$$

Így ha  $n > \max \{N_1, N_2\} = N(\varepsilon)$ , akkor:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - b_n}{B \cdot b_n} \right| = \frac{|B - b_n|}{|B| \cdot |b_n|} < \frac{|B - b_n|}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} < \frac{\frac{\varepsilon}{2} |B|^2}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} = \varepsilon$$

(ii)  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$   $T_3$  és  $T_5$  (i) miatt. ■

**Néhány példa az előző tételek alkalmazására:**

Pl.  $\boxed{a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{500}{n^2}}$   $\rightarrow \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{500 \text{ db}} = 0$

A tagok száma 500 ( $n$ -től független!), ezért  $T_1$  véges sokszori alkalmazásával a 0 eredmény helyesnek adódik.

Pl.  $\boxed{b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}}$   $\rightarrow 0 + \dots + 0 = 0$  **HIBÁS** gondolatmenet!!!

A tagok száma itt függ  $n$ -től, ez nem véges sok sorozat összege, így a  $T_1$  tétel erre már nem terjeszthető ki. Helyesen:

$$b_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{(1 + n) \cdot \frac{n}{2}}{n^2} = \frac{1 + n}{2n} = \frac{\frac{1}{n} + 1}{2} \rightarrow \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Pl.  $\boxed{a_n = \frac{8n^2 - n + 3}{n^2 + 9}}$   $= \underbrace{\frac{n^2}{n^2}}_{=1} \cdot \frac{8 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{9}{n^2}} \rightarrow \frac{8 - 0 + 0}{1 + 0} = 8$

Pl.  $\boxed{a_n = \left(\frac{2n + 1}{3 - n}\right)^3 \cdot \frac{3n^2 + 2n}{2 + 6n^2}}$

$$a_n = \underbrace{\left(\frac{2n}{-n}\right)^3}_{=-8} \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{3}{n}}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{3n^2}{6n^2}}_{=\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 + \frac{2}{3n}}{1 + \frac{1}{3n^2}} \rightarrow -8 \cdot 1^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -4$$

Ⓜ A hatványozásnál a szorzatra vonatkozó tételt alkalmaztuk.

Ⓟ 
$$a_n = \underbrace{\frac{n^2 - 5}{2n^3 + 6n}}_{b_n} \underbrace{\sin(n^4 + 5n + 8)}_{c_n} \rightarrow 0, \text{ mert}$$

$$b_n = \underbrace{\frac{n^2}{2n^3}}_{=\frac{1}{2n} \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \rightarrow 0 \cdot 1 = 0 \quad \text{és } c_n \text{ korlátos.}$$

•••

Néhány jól használható egyszerűbb tétel

Ⓣ 
$$(a_n \geq 0) \wedge (a_n \rightarrow A \geq 0) \implies (\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{A})$$

Ⓟ

(i)  $A = 0$  esete:

$$\begin{aligned} |\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \varepsilon, \\ \text{ha } n > N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon^2) \end{aligned} \iff \begin{cases} 0 \leq a_n < \varepsilon^2, \text{ ha } n > N_a(\varepsilon^2) \\ (a_n \rightarrow 0 \text{ miatt } \exists N_a(\varepsilon^2)) \end{cases}$$

(ii)  $A > 0$  esete:

$a_n \rightarrow A$  miatt  $\exists N_a(\varepsilon \sqrt{A})$ :

$$|a_n - A| < \varepsilon \cdot \sqrt{A}, \text{ ha } n > N_a(\varepsilon \sqrt{A})$$

De ekkor

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| = \left| \frac{a_n - A}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \right| \leq \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \varepsilon, \text{ tehát } N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon \sqrt{A})$$

■

Ⓜ  $a_n \geq 0, a_n \rightarrow A \implies \sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{A}$  tetszőleges rögzített  $k \in \mathbb{N}^+$  esetén.

Speciálisan:  $\sqrt[3]{a_n} \rightarrow \sqrt[3]{A}$  (bizonyítása HF).

Ⓟ 
$$a_n = \sqrt{4n^2 + 5n - 1} - \sqrt{4n^2 + n + 3} \quad (\infty - \infty \text{ alakú})$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4n^2 + 5n - 1 - (4n^2 + n + 3)}{\sqrt{4n^2 + 5n - 1} + \sqrt{4n^2 + n + 3}} = \frac{4n - 4}{\sqrt{4n^2 + 5n - 1} + \sqrt{4n^2 + n + 3}} = \\
&= \frac{4n}{\underbrace{\sqrt{4n^2}}_{= \frac{4n}{2n} = 2}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{4n} - \frac{1}{4n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{3}{4n^2}}} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = 1
\end{aligned}$$

## Feladatok

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{3n^2 + 8}} = ?$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{2n^2 + 3}) = ?$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 4}) = ?$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2n^4 + n^3 - 2n^2 + 8}}{\sqrt[3]{n^6 + 5n^2 + 3}} = ?$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 4n^2 - n} - \sqrt{n^4 - n^2 - n + 1}) = ?$

•••

$$\textcircled{T} \quad \boxed{(a_n \rightarrow \infty) \implies \left(\frac{1}{a_n} \rightarrow 0\right)}$$

$\textcircled{B}$  Tudjuk, hogy  $\exists N_a(P)$  :

$$a_n > P > 0, \text{ ha } n > N_a(P).$$

Tehát  $\frac{1}{P} > \frac{1}{a_n} > 0$ , ha  $n > N_a(P)$ .  $P = \frac{1}{\varepsilon}$  választással kapjuk, hogy

$$0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon, \text{ ha } n > N_a(P).$$

Vagyis

$$\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon) = N_a(P).$$

( $a_n > 0$  feltehető, hiszen csak véges sok negatív elem lehet. Ezek elhagyhatók.) ■

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{(a_n \rightarrow 0) \stackrel{?}{\implies} \left(\frac{1}{a_n} \rightarrow \infty\right)}$$

Nem következik!

Például

$$a_n = \frac{-2}{n} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{a_n} = -\frac{n}{2} \rightarrow -\infty$$

Vagy például

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{a_n} = (-1)^n n^2 := b_n$$

$$b_{2m} \rightarrow \infty, \quad b_{2m+1} \rightarrow -\infty. \quad \text{Tehát} \quad \frac{1}{a_n} \not\rightarrow \infty.$$

De igaz:

$$\left((a_n > 0) \wedge (a_n \rightarrow 0)\right) \implies \left(\frac{1}{a_n} \rightarrow \infty\right)$$

$$\left((a_n < 0) \wedge (a_n \rightarrow 0)\right) \implies \left(\frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty\right)$$

$$\textcircled{\text{T}} \quad \boxed{(a_n \rightarrow 0) \implies \left(\frac{1}{|a_n|} \rightarrow \infty\right)}$$

$\textcircled{\text{B}}$  Tudjuk, hogy  $\exists N_a(\varepsilon)$ :

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_a(\varepsilon).$$

$$\text{Vagyis } \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = P, \quad \text{ha } n > N_a(\varepsilon) = N(P).$$

■

•••

További hasonló tételek bizonyíthatók:

$$\text{Pl. } \frac{0}{\infty} \rightarrow 0 \quad (\text{Jelentése: } a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow \infty \quad \text{esetén} \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0)$$

$$\left(\text{sőt } \frac{\text{korlátos}}{\infty} \rightarrow 0;\right) \quad \frac{\infty}{+0} \rightarrow \infty; \quad \infty + \infty \rightarrow \infty; \quad \infty \cdot \infty \rightarrow \infty$$

(Felhasználhatók bizonyítás nélkül.)



Határozatlan alakok:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty - \infty; \quad 1^\infty; \quad \infty^0; \quad 0^0$$

Ilyen esetekben azonos átalakítással próbálkozunk, ill. később kapunk egy segédeszközt (L'Hospital szabály).

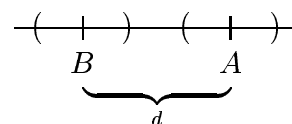
**A limesz monoton:**

$$\textcircled{T} \quad \boxed{(a_n \rightarrow A, \quad b_n \rightarrow B, \quad a_n < b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+) \implies (A \leq B)}$$

$$\textcircled{M}_1 \quad a_n \rightarrow A, \quad b_n \rightarrow B, \quad a_n \leq b_n \text{ esetén is igaz az állítás.}$$

$$\textcircled{M}_2 \quad a_n \rightarrow A, \quad b_n \rightarrow B, \quad a_n \leq b_n, \text{ ha } n > N_1 \text{ (}\exists \text{ ilyen } N_1 \text{) feltétel is elég.}$$

$\textcircled{B}$  Megmutatjuk, hogy  $A > B$  nem lehet, így a trichotom tulajdonság miatt  $A \leq B$ .



Ha  $A > B$  lenne, akkor pl.  $\varepsilon := \frac{d}{3} (= \frac{A-B}{3} > 0)$ -hoz  $\exists N_a, N_b$  :

$$\left. \begin{array}{l} \forall n > N_a(\varepsilon) \text{-ra } |a_n - A| < \varepsilon \\ \forall n > N_b(\varepsilon) \text{-ra } |b_n - B| < \varepsilon \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} a_n > b_n, \text{ ha } n > \max\{N_a, N_b\} \\ \text{Ez pedig a feltétel miatt nem lehetséges.} \end{array}$$

**Rendőrelv:**

$$\textcircled{T} \quad \boxed{\left( \begin{array}{l} a_n \rightarrow A \\ b_n \rightarrow A \end{array} \text{ és } \begin{array}{l} a_n \leq c_n \leq b_n \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right) \implies (c_n \rightarrow A)}$$

$$\textcircled{B} \quad N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$$

Ha  $n > N(\varepsilon)$  :

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \quad \text{és} \quad A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$$

$$\implies A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon.$$

Tehát  $c_n \rightarrow A$ . ■

**Speciális rendőrelv:**

$$\textcircled{T} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad (a_n \geq b_n) \wedge (b_n \rightarrow \infty) \implies a_n \rightarrow \infty \\ \text{(ii)} \quad (a_n \leq b_n) \wedge (b_n \rightarrow -\infty) \implies a_n \rightarrow -\infty \end{array} \right.$$

$\textcircled{B}$  L. gyakorlat

•••

**Néhány nevezetes számsorozat** (L. gyakorlat illetve előadás)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \text{oszcillálónan divergens egyébként.} \end{cases}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n = 0, \text{ ha } |a| < 1 \text{ és } k \in \mathbb{N}^+ \quad (\neg B)$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{p} = 1, \text{ ha } p > 0.$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad (\neg B)$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^n} = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log n} = \infty.$$

•••

**Néhány példa az előző tételek alkalmazására:**

$$\textcircled{Pl.} \quad \boxed{a_n = \frac{3n^5 + n^2 - n}{n^3 + 3}} > \frac{3n^5 + 0 - n^5}{n^3 + 3n^3} = \frac{n^2}{2} \rightarrow \infty \implies a_n \rightarrow \infty$$

Másik megoldás:

$$a_n = \frac{n^5}{n^3} \cdot \underbrace{\frac{3 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{3}{n^3}}}_{c_n} > n^2 \cdot 2 \rightarrow \infty \implies a_n \rightarrow \infty$$

Felhasználtuk, hogy

$$c_n \rightarrow 3 \implies \exists N_0 : c_n > 2, \text{ ha } n > N_0$$

(M) Persze belátható lenne, hogy  $b_n \rightarrow \infty$ ,  $c_n \rightarrow C > 0$  esetén  $b_n c_n \rightarrow \infty$ .  
Mi azonban ezt nem bizonyítottuk be, ezért nem használhatjuk fel a megoldásnál.

(Pl.)  $\boxed{a_n = \frac{1}{n^4 + 3} \cos(n^7 - 5)}$   $\rightarrow 0$ , mert

$$\underbrace{\frac{1}{n^4 + 3} \cdot (-1)}_0 \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{n^4 + 3} \cdot 1}_0$$

$$\implies a_n \rightarrow 0.$$

a rendőrelv miatt

Másik megoldás: egy nullsorozat és egy korlátos sorozat szorzatáról van szó, így egy korábbi tétel miatt a szorzat is nullsorozat.

(Pl.)  $\boxed{a_n = \frac{3^{2n}}{4^n + 3^{n+1}}}$   $= \underbrace{\frac{9^n}{4^n}}_{\left(\frac{9}{4}\right)^n \rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n}}_{\rightarrow 1}$

Tehát  $+\infty$  határértéket várunk, ezért a speciális rendőrelvet használjuk:

$$a_n > \left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot 1} \rightarrow \infty$$

$$\implies a_n \rightarrow \infty.$$

(Pl.)  $\boxed{a_n = \frac{2^{2n} + (-3)^{n-1}}{5^{n+2} + 7^{n+1}}}$   $= \frac{4^n - \frac{1}{3} \cdot (-3)^n}{25 \cdot 5^n + 7 \cdot 7^n} =$

$$= \underbrace{\frac{4^n}{7^n}}_{\left(\frac{4}{7}\right)^n \rightarrow 0} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^n}{25 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n + 7} \rightarrow 0 \cdot \frac{1 - 0}{0 + 7} = 0$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \frac{n^2 + 9^{n+1}}{2n^5 + 3^{2n-1}}} = \frac{n^2 \left(\frac{1}{9}\right)^n + 9}{2n^5 \left(\frac{1}{9}\right)^n + \frac{1}{3}} \rightarrow \frac{0 + 9}{0 + \frac{1}{3}} = 27$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!} \\ a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 100}} \\ b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \end{array}}$$

$$a_n \rightarrow \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{100 \text{ darab}} = 0$$

A  $(b_n)$  sorozatnál már nem alkalmazható az előbbi módszer, mivel az egyes tagok ugyan nullához tartanak, de a tagok száma végtelenhez tart ( $\infty \cdot 0$  alakú). A rendőrelv segítségével tudjuk megoldani a feladatot.

$$\underbrace{\frac{n}{n}}_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} < b_n < n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \underbrace{\frac{n}{n}}_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

$$\implies b_n \rightarrow 1.$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{\text{Bizonyítsuk be, hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbb{R}) !}$$

Ha  $a = 0$ : triviálisan igaz.

Ha  $0 < a < 1$ :  $\frac{0}{\infty}$  alakú, ezért 0-hoz tart a sorozat.

Ha  $a = 1$ :  $\frac{1}{n!} \rightarrow 0$ .

Ha  $a > 1$ :  $n > [a]$  esetén

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \dots \frac{a}{[a]} \cdot \frac{a}{[a]+1} \dots \frac{a}{n} < \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \dots \frac{a}{[a]} \cdot 1 \cdot 1 \dots 1 \frac{a}{n} = \frac{a^{[a]}}{[a]!} \frac{a}{n} = \frac{\text{konstans}}{n}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad \qquad \qquad 0$$

$$\implies \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0.$$

Ha  $a < 0$  :

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{(-1)^n |a|^n}{n!} = \underbrace{(-1)^n}_{\text{korlátos}} \underbrace{\frac{|a|^n}{n!}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \sqrt[3n]{n}} = \frac{\sqrt[3n]{3n}}{\sqrt[3n]{3}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

Ugyanis az  $\sqrt[n]{n}$  és az  $\sqrt[n]{p}$  ( $p = 3$ ) részsorozatáról van szó.

Másik megoldás:  $a_n = \sqrt[3n]{n} = \sqrt[3]{\sqrt[n]{n}} \rightarrow \sqrt[3]{1} = 1$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^5 + 5n}{8n^2 - 2}}} \rightarrow 1, \text{ mert}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{4}}}_{\downarrow} \underbrace{(\sqrt[n]{n})^3}_{\downarrow} = \sqrt[n]{\frac{2n^5}{8n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^5 + 5n}{8n^2 - 2}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^5 + 5n^5}{8n^2 - 2n^2}} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{7}{6}}}_{\downarrow} \underbrace{(\sqrt[n]{n})^3}_{\downarrow}$$

$1 \cdot 1^3 = 1$   $1 \cdot 1^3 = 1$

$$\implies a_n \rightarrow 1.$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n + 5^n}{2^n + 4^n}}}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}_{\downarrow} \frac{5}{4} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n + 4^n}} < \sqrt[n]{\frac{3^n + 5^n}{2^n + 4^n}} < \sqrt[n]{\frac{5^n + 5^n}{4^n}} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow} \frac{5}{4}$$

$\frac{5}{4}$   $\frac{5}{4}$

$$\implies a_n \rightarrow \frac{5}{4}.$$



**Elégséges tétel  $(a_n)$  konvergenciájára:**

- |   |
|---|
| <p>Ⓓ (i) Ha <math>(a_n)</math> monoton növekedő és felülről korlátos, akkor konvergens.<br/> (ii) Ha <math>(a_n)</math> monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.</p> |
|---|

Ⓑ Monoton növekedő esetre.

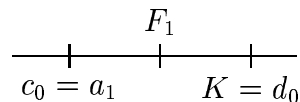
Felveszünk egy  $I_n = [c_n, d_n]$  egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozatot, ahol  
 $c_n$ : mindig a számsorozat egy eleme és  
 $d_n$ : mindig felső korlát.

Így az  $(a_n)$  sorozat elemei véges sok elem kivételével a  $[c_n, d_n]$ -ben vannak. A Cantor axióma szerint az  $I_n$  intervallumok metszete nem üres. Választunk a metszetből egy elemet, erről belátjuk, hogy a számsorozat határértéke. Mivel a határérték egyértelmű, azt is beláttuk, hogy ebben a speciális intervallumsorozatban egyetlen közös elem van, mert az intervallumok hossza 0-hoz tart.

Részletesen:

$a_1 \leq a_n \leq K \quad \exists K$  (a korlátosság miatt)

$I_0 = [c_0, d_0] := [a_1, K]$



$F_1 := \frac{c_0 + d_0}{2}$

Ha  $F_1$  felső korlát, akkor  $c_1 = c_0, d_1 = F_1, I_1 = [c_1, d_1] := [c_0, F_1]$

Ha  $F_1$  nem felső korlát:  $\exists a_{n_1} > F_1$  és ekkor  $c_1 = a_{n_1}, d_1 = d_0, I_1 = [c_1, d_1] := [a_{n_1}, d_0]$

$F_2 := \frac{c_1 + d_1}{2}$

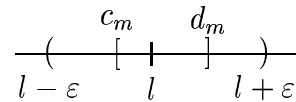
Ha  $F_2$  felső korlát:  $I_2 = [c_2, d_2] := [c_1, F_2]$

Ha  $F_2$  nem felső korlát:  $\exists a_{n_2} > F_2$  és ekkor  $I_2 := [a_{n_2}, d_1]$ .

Stb.

$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset$  (Cantor axióma), tehát  $\exists l \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ .

Belátjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ .



$I_n$  hossza:  $d_n - c_n \leq \frac{K - a_1}{2^n} < \epsilon$ , ha  $n > N(\epsilon)$ . Az előzőek miatt

$$0 < l - c_n \leq d_n - c_n < \epsilon \quad \text{és} \quad 0 < d_n - l \leq d_n - c_n < \epsilon, \quad \text{vagyis}$$

$$l - \epsilon < c_n \leq d_n < l + \epsilon, \quad \text{ha} \quad n > N(\epsilon).$$

Mivel  $c_m = a_{n_m}$  és  $(a_n) \nearrow$ :

$$c_m = a_{n_m} \leq a_n, \text{ ha } n > n_m \text{ és } a_n \leq d_m \text{ (felső korlát) } \forall n \implies$$

$$l - \varepsilon < c_m = a_{n_m} \leq a_n \leq d_m < l + \varepsilon, \text{ ha } n > n_m = N(\varepsilon)$$

Tehát valóban  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ . ■

•••

### Példák rekurzív sorozatokra

A rekurzív megadású számsorozatok konvergenciája sok esetben vizsgálható az előző elégséges tétel alkalmazásával. Erre mutatunk most néhány példát.

<p>(Pl.) <math>a_1 = \frac{4}{3}; \quad a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4}; \quad n = 1, 2, \dots</math></p> <p>Konvergens-e a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?</p>
---

$$a_1 = 1,33 > a_2 = \frac{3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}{4} = 1,194 > a_3 = 1,1067$$

Sejtés:  $(a_n) \searrow$ .

Bizonyítás: teljes indukcióval.

1.  $a_1 > a_2 > a_3$  teljesül

2. Tfh.  $a_{n-1} > a_n$

3. Igaz-e:

$$\frac{3 + a_{n-1}^2}{4} = a_n \stackrel{?}{>} a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4}$$

2. miatt  $a_{n-1} > a_n \geq \frac{3}{4} > 0$

$$\implies a_{n-1}^2 > a_n^2 \implies 3 + a_{n-1}^2 > 3 + a_n^2$$

$$\implies \frac{3 + a_{n-1}^2}{4} = a_n > a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4}$$

Tehát a számsorozat monoton csökkenő és alulról korlátos (hiszen  $a_n > 0$ )

$\implies (a_n)$  konvergens, és fennáll:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + a_{n-1}^2}{4}$$

$$A = \frac{3 + A^2}{4} \implies A^2 - 4A + 3 = 0 \implies A = 1 \text{ vagy } A = 3.$$

$A = 3$  nem lehet, mivel  $a_n < a_1 = \frac{4}{3}$ , ezért  $a_n$  nem esik a 3 szám pl. 1 sugarú környezetébe. Így  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

Pl.  $a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}; \quad n = 1, 2, \dots$   
Konvergens-e a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

$(a_n) = (1, 2,646, 2,94, \dots)$

$\sqrt{6 + a_n} \geq 0$  miatt a sorozat elemei pozitívak ((ii)-ben precízen megmutatjuk).

(i) Ha a sorozat konvergens lenne, akkor létezne

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 + a_{n-1}} = \sqrt{6 + A}, \text{ vagyis } A^2 - A - 6 = 0.$$

Ebből  $A = 3$  vagy  $A = -2$  lehetne.  $a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}} > 0$  miatt  $A = -2$  nem lehet. Így csak az  $A = 3$  jöhet szóba.

(ii) Sejtés:  $(a_n) \nearrow$ .

Bizonyítás: teljes indukcióval. (Egyidejűleg belátjuk, hogy  $a_n > 0$ .)

$0 < a_1 < a_2 < a_3$  igaz.

Tegyük fel, hogy  $0 < a_{n-1} < a_n$ .

Igaz-e, hogy

$$0 \stackrel{?}{<} \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n \stackrel{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$$

Az indukciós feltevés miatt  $0 < a_{n-1} < a_n$

$$\implies 0 < 0 + 6 < 6 + a_{n-1} < 6 + a_n \quad (a_n > 0 \text{ miatt})$$

$$\implies 0 < \sqrt{6 + a_{n-1}} < \sqrt{6 + a_n}$$

Vagyis  $0 < a_n < a_{n+1}$ .

Tehát a sorozat monoton növekedő és elemei pozitívak.



(iii) Létezik-e  $K$  felső korlát?  $K$ -nak most célszerű  $A$ -t választani. Teljes indukcióval belátjuk, hogy  $a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  :

$a_1 < 3$  teljesül. Tegyük fel, hogy  $a_n < 3$ . Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3.$$

Tehát  $(a_n)$  felülről korlátos.

(iv) Vagyis  $(a_n) \nearrow \wedge (a_n)$  felülről korlátos  $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

Láttuk, hogy  $A = 3$  lehet csak.

Ⓜ A monotonitás másképpen is belátható:

$$0 < a_n \stackrel{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$$

$$a_n^2 \stackrel{?}{<} 6 + a_n$$

$$a_n^2 - a_n - 6 \stackrel{?}{<} 0$$

Ez igaz, ha  $-2 < a_n < 3$ , de ezt még be kell bizonyítani.  $-2 < a_n$  triviálisan igaz ( $a_n > 0$  miatt),  $a_n < 3$  pedig teljes indukcióval bizonyítandó.

<p>Ⓟ <math>a_1 = -3; \quad a_{n+1} = \frac{5 - 6a_n^2}{13}; \quad n = 1, 2, \dots</math>          Konvergencia-e a sorozat?</p>
---

Monoton csökkenő-e?

$$a_{n+1} = \frac{5 - 6a_n^2}{13} \stackrel{?}{<} a_n, \text{ amiből } 6a_n^2 + 13a_n - 5 \stackrel{?}{>} 0.$$

$$\left( 6x^2 + 13x - 5 = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{5}{2}; \frac{1}{3} \right)$$

Tehát monoton csökkenő, ha  $a_n < -\frac{5}{2}$ , vagy  $a_n > \frac{1}{3}$ .

Most teljes indukcióval belátható, hogy  $a_n \leq -3 \quad \left( < -\frac{5}{2} \right)$  (HF.)

Tehát a sorozat monoton csökkenő a  $-3$  kezdőértékkel.

Ha a sorozat alulról korlátos lenne, akkor konvergens lenne, és a határértéke:

$$A = \frac{5 - 6A^2}{13} \implies A = -\frac{5}{2} \text{ vagy } A = \frac{1}{3} \text{ lehetne.}$$

Mivel most  $a_n \leq -3 \quad \forall n$ -re  $\implies (a_n)$  nem konvergens, vagyis alulról nem korlátos  
 $\implies \forall M$ -hez  $\exists n_0$ , hogy  $a_{n_0} < M$ .

Mivel  $(a_n) \searrow$ , ezért  $a_n < a_{n_0} < M$ , ha  $n > n_0$ , tehát  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

•••

### Egy kitüntetett számsorozat

$$\textcircled{T} \quad \boxed{e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ korlátos és } \nearrow \implies (e_n) \text{ konvergens.}}$$

$\textcircled{B}$

1. Korlátosság (a binomiális tétel felhasználásával):

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-(k-1))}{k!} \frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left( \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{0 < \cdots < 1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{0 < \cdots < 1} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{0 < \cdots < 1} \right) <$$

$$< 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} := s_n$$

De  $(s_n)$  felülről korlátos, mert

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} < 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

$$\text{Tehát } e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 3.$$

2.  $(e_n)$  monoton nő:

$$\begin{aligned}
 e_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \\
 &= 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left( \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \right) = \\
 &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left( \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)}_{> 1 - \frac{1}{n}} \right) + \frac{\binom{n+1}{n+1}}{(n+1)^{n+1}} > \\
 &> 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right) + 0 = e_n
 \end{aligned}$$

Tehát  $e_{n+1} > e_n$ . Mivel  $(e_n) \nearrow$  és korlátos  $\implies$  konvergens. ■

A sorozat határértékét  $e$ -vel jelöljük.

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

A fentiek miatt:  $2 < e < 3$ . Belátható, hogy  $e$  nem racionális szám, továbbá:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

**Néhány  $e$ -vel kapcsolatos példa:**

⒫  $\boxed{a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3 + n + 6}\right)^{n^3 + n + 6}}$   $\rightarrow e$ , ugyanis  $(e_n)$  egy részsorozatáról van szó.

⒫  $\boxed{a_n = \left(1 + \frac{1}{n-6}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n-6}\right)^{n-6} \left(1 + \frac{1}{n-6}\right)^6 \rightarrow e \cdot 1^6 = e$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \left(1 + \frac{1}{6n+1}\right)^{6n-7}} = \left(1 + \frac{1}{6n+1}\right)^{6n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{6n+1}\right)^8} \rightarrow e \cdot \frac{1}{18} = e$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n-2}} &= \left(\frac{n+4-1}{n+4}\right)^{n+4-6} = \\ &= \left(1 + \frac{-1}{n+4}\right)^{n+4} \frac{1}{\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^6} \rightarrow e^{-1} \cdot \frac{1}{1^6} = \frac{1}{e} \\ &\left( \text{Felhasználtuk, hogy } \frac{n+4}{n+3} = \frac{1 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow \frac{1+0}{1+0} = 1 \right) \end{aligned}$$

Másik megoldás:

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^2 \rightarrow \frac{e^3}{e^4} \cdot 1^2 = \frac{1}{e}$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \left(\frac{n^2-2}{n^2+3}\right)^{n^2}} = \frac{\left(1 + \frac{-2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \rightarrow \frac{e^{-2}}{e^3} = e^{-5}$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \left(\frac{n+1}{n+6}\right)^{2n}} = \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{6}{n}\right)^n}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{e^1}{e^6}\right)^2 = e^{-10}$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \left(\frac{2n+2}{2n+9}\right)^{2n}} = \frac{\left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n}}{\left(1 + \frac{9}{2n}\right)^{2n}} \rightarrow \frac{e^2}{e^9} = e^{-7}$$

Pl.

Keressen meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \left( \frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{3n^2}, \quad b_n = \left( \frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{9n^2}, \quad c_n = \left( \frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{3n^3}, \quad d_n = \left( \frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{3n}$$

$$a_n = \frac{\left( 1 + \frac{1}{3n^2} \right)^{3n^2}}{\left( 1 + \frac{-2}{3n^2} \right)^{3n^2}} \rightarrow \frac{e}{e^{-2}} = e^3 = A$$

$$b_n = (a_n)^3 \implies b_n \rightarrow A^3 = e^9$$

$$c_n = (a_n)^n > 8^n, \text{ ha } n > N_1 \quad (a_n \rightarrow e^3 \text{ miatt } \exists N_1) \implies c_n \rightarrow \infty$$

$\downarrow$   
 $\infty$

$$d_n = \sqrt[n]{a_n} \implies \exists N_2 : n > N_2 \text{ esetén}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{e^3 - 0,1}}_{\downarrow 1} \leq d_n \leq \underbrace{\sqrt[n]{e^3 + 0,1}}_{\downarrow 1}$$

$$\implies d_n \rightarrow 1.$$

### Feladatok

1. Keressen meg az alábbi sorozatok határértékét, amennyiben azok léteznek!

a)  $a_n = \left( 1 + \frac{1}{4n} \right)^{n+100}$

b)  $a_n = \left( \frac{n-2}{n+8} \right)^{n+7} (-1)^n$

c)  $a_n = \left( \frac{n+3}{n-2} \right)^{2n+8}$

d)  $a_n = \left( \frac{3n-1}{3n+2} \right)^n, \quad b_n = \left( \frac{3n-1}{4n+2} \right)^n, \quad c_n = \left( \frac{4n-1}{3n+2} \right)^n$

e)  $a_n = \left( \frac{n^3-2}{n^3+1} \right)^{n^3+8}, \quad b_n = \left( \frac{n^3-2}{n^3+1} \right)^{n^4}, \quad c_n = \left( \frac{n^3-2}{n^3+1} \right)^{n^2}$

$$f) a_n = \left(1 - \frac{2}{n!}\right)^{n!}, \quad b_n = \left(1 - \frac{2}{n!}\right)^{(n-1)!}, \quad c_n = \left(1 - \frac{2}{n!}\right)^{(n+1)!}$$

$$2. a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{2n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}} = ?$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+4}\right)^{n^2+4}} = ?$$

3. Gyakorló példák rekurzív sorozatokhoz:

$$a) a_1 = 2; \quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$$

$$b) a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$$

(Útmutatás:  $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$ , először  $0 < a_n < 1$ -et mutassa meg.)

$$c) a_1 = \frac{1}{3}; \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n}$$

$$(Segítség:  $a_{n+1} = \frac{a_n + 3 - 3}{3 + a_n} = 1 - \frac{3}{3 + a_n}$ )$$

$$d) a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$$

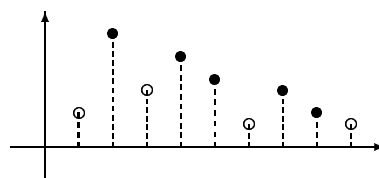
$$e) a_1 = 4; \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5}$$

$$f) a_1 = 5; \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1} + 5}$$

•••

(T) Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

(B) „csúcs”:  $a_{n_0}$  csúcs, ha  $\forall n > n_0$ -ra  $a_n \leq a_{n_0}$



1.  $\exists$  végtelen sok csúcs  $\implies$  van monoton csökkenő részsorozat, hiszen ezek a csúcscok monoton csökkenő részsorozatot alkotnak.

2. Véges sok csúcs van (esetleg nincs is).

$a_{s_1}$ : a legnagyobb indexű csúcs után következő elem. (Ha nem volt:  $a_{s_1} = a_1$ .)

$a_{s_1}$  nem csúcselem.

$\exists s_2 > s_1 : a_{s_2} \geq a_{s_1}$ , különben  $a_{s_1}$  csúcs lenne.  $a_{s_2}$  sem csúcselem.

$\exists s_3 > s_2 : a_{s_3} \geq a_{s_2}$ , különben  $a_{s_2}$  csúcs lenne.

Stb. Így kapunk egy  $(a_{n_r}) \nearrow$  részsorozatot.

■

**Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel:**

(T) Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

(B) Az előző tétel miatt  $\exists$  monoton részsorozat, és mivel ez korlátos  $\implies$  konvergens. ■

(M) A racionális számok  $\mathbb{Q}$  halmazában nem igaz a Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel. Legyen  $(b_n) = (1, 1,4, 1,41, 1,414, \dots) \longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, b_n \in \mathbb{Q}$ .  
 $(b_n) \subset [1, 2]$ , azaz korlátos.  $(b_n)$  minden részsorozata  $\sqrt{2}$ -höz konvergál, tehát nincs  $(b_n)$ -nek olyan részsorozata, amely egy  $\mathbb{Q}$ -beli elemhez konvergálna.

●●●

**Szükséges és elégséges tétel számsorozat konvergenciájához**

Cauchy-féle konvergenciakritérium :

(T) Az  $(a_n)$  számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ :

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall n, m > M(\varepsilon) \text{ esetén}$$

(–B)

(M<sub>1</sub>) Más megfogalmazásban:

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \quad \forall n > M(\varepsilon), \forall k \in \mathbb{N} \text{ esetén}$$

(M<sub>2</sub>)

A tétel azt a tényt fejezi ki, hogy konvergens sorozat elemei egymáshoz is tetszőlegesen közel vannak, ha indexeik elég nagyok. Ezt a tételt használhatjuk a konvergencia bizonyítására akkor is, ha a határértéket nem ismerjük.

(D) Az  $(a_n)$  számsorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists M(\varepsilon)$ :

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n, m > M(\varepsilon)$$

A Cauchy-féle konvergencia tételt megfogalmazhatjuk a következőképpen is:

Az  $(a_n)$  számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy sorozat.

Ⓜ  $\mathbb{Q}$ -ban a Cauchy-sorozat nem feltétlenül konvergens.

Például  $(a_n) = (1, 1,4, 1,41, 1,414, \dots) \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Az  $(a_n)$  Cauchy sorozat, mert  $|a_{n+k} - a_n| < 10^{-N} = \varepsilon$ , ha  $n > N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  tetszőleges. Nincs olyan  $\mathbb{Q}$ -beli elem, amelyhez  $(a_n)$  konvergálna.

...

### Egy fontos példa

Ⓟ

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$

$$s_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$$

$$s_{2N} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N}$$

$N$ -et akármilyen nagyra választjuk:

$$|s_{2N} - s_N| = \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N} > N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

tehát nem szorítható  $\varepsilon$  alá, ha  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ . Nem teljesül rá a Cauchy-féle konvergencia kritérium  $\implies$  divergens.

Mivel  $(s_n) \nearrow \implies s_n \rightarrow \infty$ .

...

### Torlódási pont

Ⓝ **Torlódási pont (sűrűsödési pont, sűrűsödési érték):**

$t \in \mathbb{R}$ , ill.  $t = \infty$ , vagy  $t = -\infty$  az  $(a_n)$  torlódási pontja, ha minden környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza

(Tehát létezik olyan  $(a_{n_r})$  részsorozat, amely  $t$ -hez tart.)



( $+\infty$  környezetei  $(P, \infty)$  alakúak, ahol  $P \in \mathbb{R}$ .  $-\infty$  környezetei  $(-\infty, M)$  alakúak, ahol  $M \in \mathbb{R}$ .)

(T)  $(a_n)$  valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha pontosan egy valós szám a torlódási pontja.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  akkor és csak akkor, ha  $t = \infty$  az egyetlen torlódási pont.

(D)  $S := (a_n)$  torlódási pontjainak halmaza.

(T) Ha a torlódási pontok halmaza felülről korlátos, akkor létezik legnagyobb torlódási pont. ( $\neg B$ )

(D) **Limesz superior:**

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{jel}}{=} \overline{\lim} a_n := \begin{cases} \text{legnagyobb torlódási pont,} & \text{ha a torlódási pontok halmaza} \\ & \text{felülről korlátos} \\ -\infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{-\infty\} \\ \infty, & \text{különben} \end{cases}$$

(D) **Limesz inferior:**

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{jel}}{=} \underline{\lim} a_n := \begin{cases} \text{legkisebb torlódási pont,} & \text{ha a torlódási pontok halmaza} \\ & \text{alulról korlátos} \\ \infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{\infty\} \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases}$$

(M) Ha  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \implies \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

(Pl.  $a_n = 2^{(-1)^n n}$ ;  $\overline{\lim} a_n = ?$ ,  $\underline{\lim} a_n = ?$ )

Ha  $n$  páros:  $a_n = 2^n \rightarrow \infty$  (Részletezve:  $n = 2m$ :  $a_{2m} = 2^{2m} = 4^m \rightarrow \infty$ )

Ha  $n$  páratlan:  $a_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$  ( $n = 2m+1$ :  $a_{2m+1} = 2^{-(2m+1)} = \frac{1}{2 \cdot 4^m} \rightarrow 0$ )

Így a sorozat torlódási pontjai:  $0, \infty \implies \overline{\lim} a_n = \infty$ ,  $\underline{\lim} a_n = 0$

Pl.

$$a_n = \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + 3n + 7}$$

Adja meg a számsorozat torlódási pontjait!  $\overline{\lim} a_n = ?$ ,  $\underline{\lim} a_n = ?$

$n$  értékétől függően három részsorozat viselkedését kell vizsgálnunk.

Ha  $n = 2m$  :  $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , ezért a kapott részsorozat:

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2 + 3n + 7} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Ha  $n = 4m + 1$  :  $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , ekkor a részsorozat:

$$a_n = \frac{2n^2}{2n^2 + 3n + 7} \rightarrow 1$$

Ha  $n = 4m - 1$  :  $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -1$ , így a részsorozat:

$$a_n = 0 \rightarrow 0$$

Tehát a torlódási pontok halmaza:  $S = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

$$\overline{\lim} a_n = 1, \quad \underline{\lim} a_n = 0$$