1) A BME-s termek 15%-ában nem működik a világítás és 25%-ában a szellőztetés. A termek 5%-ában nem működik egyik sem. A csak fény nélküli termek 10%-ában, a csak hibás szellőzővel ellátott termek 8%-ában nem működik a projektor. Érdekes módon, ahol se fény nincs, se szellőzés, ott működnek a projektorok, illetve ugyanez a helyzet akkor is, ha egyszerre van világítás és szellőzés is. Mi a valószínűsége, hogy

- a) 10 termet találomra kiválasztva, legalább 3-ban nem lesz világítás? (2p)

$$X \sim \text{Binom}(10, 0{,}15)$$

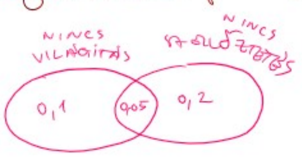
$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=2) - P(X=1) - P(X=0) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} 0{,}15^k \cdot 0{,}85^{10-k}$$

- b) 6 termet találomra kiválasztva 2-ben lesz valamilyen technikai probléma? (3p)

P(valamilyen technikai probléma) = P(világítás probléma ∪ szellőztetési probléma) =

= P(világítási probléma) + P(szellőztetési probléma) − P(világítási ∩ szellőztetési probléma)

$$= 0{,}15 + 0{,}25 - 0{,}05 = \underline{\underline{0{,}35}}$$



$$Y \sim \text{Binom}(6, 0.35)$$

$$P(Y=2) = \binom{6}{2} 0{,}35^2 \cdot 0{,}65^4$$

- c) egy termet találomra kiválasztva működni fog a projektor? (4p)

TELJES VSZSÉG TÉTELE

M = működik a projektor

V = működik a világítás

SZ = működik a szellőztetés

$$\overline{\overline{V} \cup \overline{SZ}} = V \cap SZ =$$

$$1 - 0{,}35 = 0{,}65$$

$$P(M) = P(M \mid V \cap SZ) \cdot \overset{0{,}65}{P(V \cap SZ)} + P(M \mid \overline{V} \cap \overline{SZ}) \cdot \overset{0{,}05}{P(\overline{V} \cap \overline{SZ})} +$$

$$+ P(M \mid \overline{V} \cap SZ) \cdot \overset{0{,}1}{P(\overline{V} \cap SZ)} + P(M \mid V \cap \overline{SZ}) \cdot \overset{0{,}2}{P(V \cap \overline{SZ})}$$

$$= 1 \cdot 0{,}65 + 1 \cdot 0{,}05 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}92 \cdot 0{,}2 = 0{,}974$$

VAGY

KOMPLEMENTER ESEMÉNY:

$$P(\overline{M}) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}08 \cdot 0{,}2 = 0{,}026 \Rightarrow P(M) = 1 - 0{,}026 = 0{,}974$$

- d) ha működött a projektor egy adott teremben, akkor volt ott világítás? (2p)

BAYES

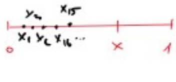
$$P(V \mid M) = \frac{P(M \mid V \cap SZ) \cdot P(V \cap SZ) + P(M \mid V \cap \overline{SZ}) \cdot P(V \cap \overline{SZ})}{P(M)}$$

$$\frac{1 \cdot 0{,}65 + 0{,}92 \cdot 0{,}2}{0{,}974} = 0{,}856$$

2) A BME-n felmerülő technikai problémák orvoslására vezetőség 16 db szerelőt hív. Ők 0 és 1 óra között érkeznek, egyenletes eloszlással, egymástól függetlenül.

- a) Mi lesz az utolsónak érkező eloszlása? Mi az eloszlás neve (és képlete)? (4p)

Béta-eloszlás



$$X_1, X_2, \ldots, X_{16} \sim \text{Uni}(0,1)$$

$$P(\max X_i < x) = \prod_{i=1}^{16} \underbrace{P(X_i < x)}_{\frac{x}{1}} = \underline{\underline{x^{16}}}$$

Miután mind megérkeztek, a szerelők egymás után próbálkoznak a hibák elhárításával, egy szerelő mókolásának hossza szintén egyenletes eloszlású (valamilyen intervallumon), m várható értékkel, szórása pedig a várható értékének a 10%-a.

- b) Becsüld meg m-et, ha mind a 16 szaki kipróbálja magát, és 3% eséllyel futnak túl a 100 percen! (4p)

$\mu = m, \ \sigma = \frac{m}{10}$ $\qquad S_{16} \sim N\left(16m, 4\frac{m}{10}\right)$

$P(S_{16} > 100) = 0{,}03 \ = \ P(S_{16} < 100) = 0{,}97$

$P\left(Z < \frac{100 - 16m}{4\frac{m}{10}}\right) = 0{,}97$

$$\frac{100 - 16m}{\frac{4m}{10}} = 1{,}88$$

$$100 - 16m = 0{,}752\, m$$

$$5{,}96 = m$$

Az általános tapasztalat szerint ugyanakkor $m = 10$ perc és a szórás 1 perc. (Innentől ez rögzítve van.)

- c) Milyen intervallumon fog mozogni egy mókolás hossza? (3p)

mókolás $\sim Uni(a, b)$

$\frac{a+b}{2} = 10 \qquad \frac{b-a}{\sqrt{12}} = 1$

$2b = 20 + \sqrt{12} \qquad b = 10 + \sqrt{3} \quad a = 10 - \sqrt{3}$

$\overbrace{10-\sqrt{3} \quad\quad 10+\sqrt{3}}^{2\cdot\sqrt{3}}$

- d) Becsüld meg, hány szaki mókolása fér bele 150 percbe 90%-os valószínűséggel! (4p)

$P(S_n < 150) = 0{,}9 \qquad S_n \sim N(n \cdot 10, \sqrt{n} \cdot 1)$

$P\left(Z < \frac{150 - n \cdot 10}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}9$

$$\frac{150 - 10n}{\sqrt{n}} = 1{,}28$$

$$10n + 1{,}28\sqrt{n} - 150 = 0$$

$$\sqrt{n}_{1,2} = \frac{-1{,}28 \pm \sqrt{6001{,}6384}}{20} \quad \begin{array}{l} \nearrow \boxed{3{,}809} \\ \searrow \ominus \ \text{ξ} \end{array} \quad \Rightarrow n \leq 14$$

3) Tegyük fel, hogy egy adott vizsgán a két bukás között eltelt idő $Exp(0.1)$ percekben. Mi a valószínűsége, hogy

- a) fél óra alatt, több mint 5 bukás lesz? (3p)

$X \sim EXP(0{,}1) \qquad \lambda = 0{,}1 \qquad E(X) = 10$ perc

$Y \sim Poisson(6) \qquad \lambda = 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}1$ bukás / perc

váltsuk órába: 6 bukás / óra

$t = \frac{1}{2}$

$P(Y > 5) = \ 1 - P(X=5) - P(X=4) - P(Y=3) - P(X=2) - P(X=1) - P(X=0) =$

$t = \frac{1}{2}$

$P(Y>5) = 1 - P(X=5) - P(X=4) - P(Y=3) - P(X=2) - P(X=1) - P(X=0) =$

$= 1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = 1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{\left(\frac{6}{2}\right)^k}{k!} e^{-\frac{6}{2}}$

- b) ha eltelt 10 perc bukás nélkül, akkor még 5 perc eltelik ugyanilyen nyugalomban? (3p)

ÖRÖKIFJÚSÁG

$P(X>15 \mid X>10) = P(X>5) = 1-\left(1-e^{-5\cdot 0,1}\right) \approx 0,607$

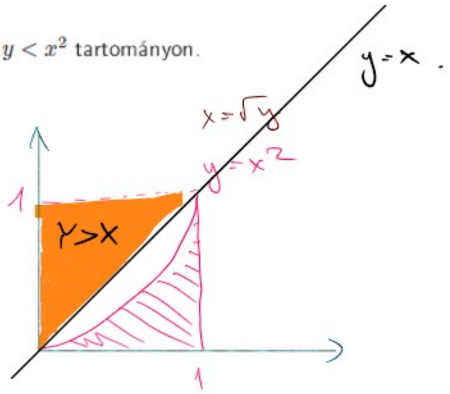
- c) az 5. bukásra több, mint 3/4 órát kell várni? (3p)

$Z \sim \text{Erlang}(n=5, \lambda=6) \qquad t = \frac{3}{4}$

$P\left(Z > \frac{3}{4}\right) = 1 - \left(1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{\left(6\cdot\frac{3}{4}\right)^k}{k!} e^{-6\cdot\frac{3}{4}}\right) = \sum_{k=0}^{4} \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^k}{k!} e^{-\frac{9}{2}}$

4) Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ a $0 < x < 1, 0 < y < x^2$ tartományon.

- a) Mennyi $COV(X,Y)$? (6p)



$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$

$f_1(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \left[2\sqrt{y}\right]_0^{x^2} = 2x$

$f_2(y) = \int_{\sqrt{y}}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dx = \left[\frac{x}{\sqrt{y}}\right]_{\sqrt{y}}^{1} = \frac{1}{\sqrt{y}} - 1$

$E(X) = \int_0^1 2x\cdot x\, dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

$E(Y) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1\right)\cdot y\, dy = \int_0^1 \sqrt{y} - y\, dy = \left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

$E(XY) = \int_0^1\int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot xy\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} x\right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 \frac{2}{3} x^4\, dx = \left[\frac{2x^5}{15}\right]_0^1 = \frac{2}{15}$

$COV(X,Y) = \frac{2}{15} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{45}$

- c) Számold ki Y feltételes várható értékét, ha tudjuk X-et ($E(Y|X)$)! (4p)

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{y}}}{2x} = \frac{1}{2x\sqrt{y}}$$

$$E(Y|X) = \int_0^{x^2} \frac{1}{2x\sqrt{y}} \cdot y \, dy = \left[\frac{\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}}{2x}\right]_0^{x^2} = \frac{x^2}{3}$$

- d) Mennyi $P(Y > X)$?(1p)

$P(Y > X) = 0$ lásd ábra

- e) Független-e X és Y? (Indokolj!) (1p)

$\mathrm{cov}(X,Y) \neq 0$ tehát nem (ha a sűrűségfv-ek szorzatát ellenőrzöd, az is jó)

5) Egy berendezés élettartamára a következő mintánk van (években): $(2, 3, 4, 2.5, 3, 3, 3.5, 4, 2, 4, 3, 3, 3.5, 2, 3, 4)$. Nem tudjuk az élettartam eloszlását.

- a) Elsőre azt feltételezzük, hogy az eloszlás exponenciális. Adj Maximum Likelihood becslést a λ-ra! (4p)

$$l(x_1, x_2, \ldots x_n | \lambda) = \lambda^n e^{-\sum x_i \lambda}$$

$$\log\left(\lambda^n e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda}\right)$$

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (\log(\lambda) - x_i \lambda)$$ Loglikelihood

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \quad \frac{1}{\bar{X}} = \frac{1}{3{,}05}$$

Azaz λ-ra kijött, hogy a mintaátlag reciproka.

- b) Valaki megmondja, hogy a szórás 1, és ezek után mégiscsak azt feltételezzük, hogy az eloszlás normális. Adj a fenti minta alapján 90%-os szinthez konfidenciaintervallumot a várható értékre! (3p)

$$\frac{\alpha}{2} = 5 \qquad z_5 = \Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}65$$

$\bar{x} = 3{,}09 \qquad \sigma = 1 \qquad n = 16$

$$\mu \in \left[\bar{x} - z_5 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{16}} , \bar{x} + z_5 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right] = \left[3{,}09 - \frac{1{,}65 \cdot 1}{4} , 3{,}09 + \frac{1{,}65 \cdot 1}{4}\right]$$

$$= [2{,}6775 ; 3{,}5025]$$

- c) Kiderül, hogy a várható érték 3 (a szórás továbbra is 1). Mi a valószínűsége, hogy a berendezés él még több mint 2 évet, ha már élt egy évet, ha normális az élettartam eloszlása? Mi a helyzet exponenciális esetén? (4p)

$X \sim N(3, 1)$

$$P(X > 3 \mid X > 1) = \frac{P(X > 3)}{P(X > 1)} = \frac{1 - \Phi\left(\frac{3-3}{1}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{1-3}{1}\right)} = \frac{0{,}5}{0{,}977} = 0{,}5118$$

$Y \sim EXP(3)$

EXP nem lehet, mert $E(Y) = D(Y)$ -nak kellene lennie, ami itt nem teljesül.