3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1999/2000 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Adja meg a $\big(j\cdot(1-j)\big)^{100}$ komplex számot kanonikus alakban!

MO. $j\cdot(1-j)=e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \leadsto \big(j\cdot(1-j)\big)^{100}=\big(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\big)^{100}=\sqrt{2}^{100}\cdot e^{100j\frac{\pi}{4}}=2^{50}\cdot e^{25\pi j}=$
$=2^{50}\cdot e^{j((12\cdot 2)\pi+\pi)}=2^{50}\cdot e^{j\pi}=-2^{50}$

---

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt{n^4-2n}-\sqrt{n^4+2n}\,)=\,?$

MO. $n\cdot(\sqrt{n^4-2n}-\sqrt{n^4+2n})=n\cdot\dfrac{n^4-2n-n^4-2n}{\sqrt{n^4-2n}+\sqrt{n^4+2n}}=\dfrac{-4n^2}{\sqrt{n^4-2n}+\sqrt{n^4+2n}}=$

$$=\frac{-4}{\sqrt{1-2\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1+2\frac{1}{n^3}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}-2$$

---

3. Hol és milyen szakadása van az $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ függvénynek!

MO.

Ugrás az origóban: $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{1-e^y}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{1-z}=0\,,\quad \lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{y\to-\infty}\dfrac{1}{1-e^y}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{1-z}=1\,.$

Másutt nem szakad el, mert a nevező csak $e^{\frac{1}{x}}=1$–re 0 és $e^y=1$ iff $y=0$, de $y=\dfrac{1}{x}\neq 0$.

---

4. Melyik igaz, melyik nem? **a)** Folytonos függvény deriválható **b)** Deriválható függvény folytonos **c)** Deriválható függvény deriváltja folytonos **d)** Folytonos függvény integrálható **e)** Integrálható függvény folytonos

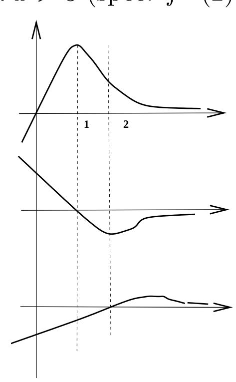
MO. a) Nem, pl. $f(x)=|x|$ az origóban. Valóban: legyen $g(x)=x$. Ezzel $f(x)=g(x)$ ha $x\geq 0$, és $f(x)=-g(x)$ ha $x\leq 0$, így $f'_+(0)=g'(0)=1\neq -1=-g'(0)=f'_-(0)$, pedig f mint g abszolút értéke g–vel együtt folytonos. **b)** Igen $f(x+h)-f(x)=h\cdot\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}0\cdot f'(x)=0\,.$

c) Nem: $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ ha $x\neq 0$, $f(0)=0$. f' mindenütt létezik: $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\cdot\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h\cdot\sin\dfrac{1}{h}=0$ és $x\neq 0$–ra $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$, aminek nincs határértéke az origóban. **d)** Igen **e)** Nem: pl. $\operatorname{sign}x$.

---

5. Ábrázolja vázlatosan az $f(x)=x\cdot e^{-x}$ függvényt első és második deriváltjaival együtt f legfontosabb jellemzői pontjainak feltüntetésével úgy, hogy az ábrából ezeknek a pontoknak a deriváltak jellemző pontjaival való viszonya is megállapítható legyen!

MO. $f'(x)=e^{-x}(1-x)\,,\ f''(x)=e^{-x}(x-2)\,,\ f'''(x)=e^{-x}(3-x) \leadsto f'(1)=f''(2)=f'''(3)=0\,,$
$f'(x)>0$ ha $x<1$, $f'(x)<0$ ha $x>1$, $f''(x)<0$ ha $x<2$, $f''(x)>0$ ha $x>2$, (spec. $f''(1)=-1<0$)
$f'''(x)<0$ ha $x<3$, $f'''(x)>0$ ha $x>3$ (spec. $f'''(2)=1>0$) :



---

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=\,?$

MO. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\,.$