ANALÍZIS 1.	**II. ZH MEGOLDÁS**	**2013. november 21.**
Mérnök informatikus szak	B csoport	Munkaidő: 90 perc

1. feladat (14 pont)

a) Adja meg $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = -\infty$ definícióját.

b) A definíció alapján lássa be, hogy $\lim\limits_{x \to 1-} \ln(1-x^2) = -\infty$

c) Mennyi $\lim\limits_{x \to 1+} \ln(1-x^2)$?

---

a) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = -\infty$, ha minden $M < 0$ számhoz létezik olyan $\delta(M) > 0$, hogy $x \in (x_0 - \delta(M), x_0)$ esetén $f(x) < M$. (**4p**)

b) Legyen $M < 0$ és $0 < x < 1$.

$$\ln(1-x^2) < M \Leftrightarrow (x+1)(1-x) < e^M \Leftrightarrow (1-x) < \frac{e^M}{1+x} < e^M, \quad \textbf{(5p)}$$

vagyis $\delta(M) = \min\left(1, e^M\right)$. (**2p**)

c) $x > 1$ esetén a függvény nincs értelmezve, így nincs jobboldali határértéke. (**3p**)

---

2. feladat (16 pont)

Hol és milyen típusú szakadása van az $f(x) = \dfrac{1}{x} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{(x-1)(x+1)^2}$ függvénynek?

f folytonos függvények hányadosainak kompozíciója, illetve szorzata, így a nevező zérushelyeinek kivételével folytonos. (**2p**)

$$\lim_{x \to 0\pm} f(x) = \operatorname{arctg}(-1) \lim_{x \to 0\pm} \frac{1}{x} = \mp\infty,$$

vagyis az $x = 0$ pontban a függvénynek másodfajú szakadása van (**4p**).

$$\lim_{x \to -1\pm} f(x) = -\lim_{x \to -1\pm} \operatorname{arctg} \frac{1}{-2(x+1)^2} = -\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

vagyis az $x = -1$ pontban a függvénynek megszüntethető, vagyis elsőfajú szakadása van. (**4p**)

$$\lim_{x \to 1\pm} f(x) = \lim_{x \to 1\pm} \operatorname{arctg} \frac{1}{4(x-1)} = \pm\frac{\pi}{2},$$

vagyis az $x = 1$ pontban a függvénynek véges ugrása, vagyis elsőfajú szakadása van (**4p**).

3. feladat (15 pont)
Adja meg az

$$f(x) = \begin{cases} \sin(5x)\cos\frac{1}{2x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin(5x^2)\cos\frac{1}{2x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvények deriváltját, ahol létezik.

Ha $x \neq 0$, akkor

$$f'(x) = 5\cos(5x)\cos\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\sin(5x)\sin\frac{1}{2x}, \qquad \textbf{(3p)}$$

$$g'(x) = 10x\cos(5x^2)\cos\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\sin(5x^2)\sin\frac{1}{2x},. \qquad \textbf{(4p)}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(5h)\cos\frac{1}{2h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(5h)}{5h}\cdot 5\cos\frac{1}{2h} = \lim_{h\to 0} 5\cos\frac{1}{2h} \quad \nexists \quad \textbf{(3p)}$$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(5h^2)\cos\frac{1}{2h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(5h^2)}{5h^2}\cdot 5h\cos\frac{1}{2h} = \lim_{h\to 0} 5h\cos\frac{1}{2h} = 0.$$

(5p)

---

4. feladat (17 pont)
Legyen $f(x) = 3\pi - 6\arcsin(8+3x)$.
a) Adja meg f értelmezési tartományát, értékkészletét, illetve deriváltját.
b) Bizonyítsa be, hogy f invertálható, és határozza meg inverzét, annak értelmezési tartományát, értékkészletét, illetve deriváltját.

---

a) $D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]$, így

$$x \in D_f \Leftrightarrow -1 \leq 8 + 3x \leq 1 \Leftrightarrow -9 \leq 3x \leq -7 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -\frac{7}{3},$$

vagyis $D_f = \left[-3, -\frac{7}{3}\right]$ **(2p)**. $R_{\text{arcsin}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, így

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(8{+}3x) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -3\pi \leq -6\arcsin(8{+}3x) \leq 3\pi \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 6\pi,$$

vagyis $R_f = [0, 6\pi]$. **(2p)**

$$f'(x) = -6\cdot\frac{3}{\sqrt{1-(8+3x)^2}}. \qquad \textbf{(3p)}$$

b) $f'(x) < 0$, ha $x \in D_f$, vagyis a függvény a teljes értelmezési tartományán szigorúan monoton csökkenő, vagyis invertálható (**3p**), és

$$\begin{aligned} y = 3\pi - 6\arcsin(8+3x) \qquad &\Leftrightarrow \frac{3\pi - y}{6} = \arcsin(8+3x) \\ &\Leftrightarrow \sin\frac{3\pi - y}{6} = 8 + 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\sin\frac{3\pi - y}{6} - 8\right) = x, \end{aligned}$$

vagyis $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}\left(\sin\dfrac{3\pi - x}{6} - 8\right)$ (**2p**).
$D_{f^{-1}} = R_f = [0, 6\pi]$, $R_{f^{-1}} = D_f = \left[-3, -\frac{7}{3}\right]$ (**2p**), és

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{3}\left(-\cos\frac{3\pi - x}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}. \qquad \textbf{(3p)}$$

---

5. feladat (20 pont)

Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen (D_f, szimmetriák, zérushelyek, határértékek, monotonitás, konvexitás), majd ábrázolja a függvényt:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x+1}.$$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (**1p**). f nem páratlan, nem páros (D_f nem szimmetrikus az origóra), nem periodikus (D_f sem az) (**2p**). Zérushelyei az $x^2 - x = 0$ egyenlet megoldásai: $0, 1$ (**2p**).

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \pm\infty. \qquad \textbf{(2p)}$$

$$\lim_{x\to -1\pm} f(x) = \lim_{x\to -1\pm}\frac{2}{x+1} = \pm\infty. \qquad \textbf{(2p)}$$

A monotonitási intervallumok vizsgálatához:

$$f'(x) = \left(x - 2 + \frac{2}{x+1}\right)' = 1 - \frac{2}{(x+1)^2} = 0, \qquad \textbf{(2p)}$$

ha $(x+1)^2 = 2$, vagyis $x = -1 \pm \sqrt{2}$, így

	$(-\infty,-1-\sqrt{2})$	$-1-\sqrt{2}$	$(-1-\sqrt{2},-1)$	$(-1,-1+\sqrt{2})$	$-1+\sqrt{2}$	$(-1+\sqrt{2},\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

(4p)

A konvexitáshoz:

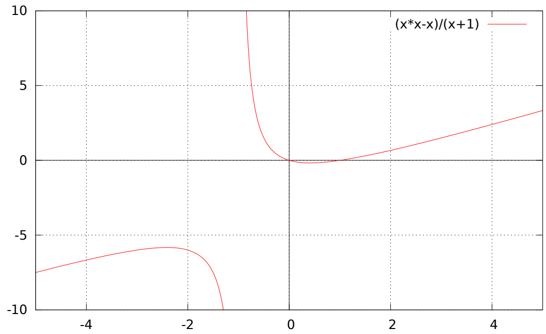
$$f''(x) = \left(1 - \frac{2}{(x+1)^2}\right)' = \frac{4}{(x+1)^3}\begin{cases} > 0, & \text{ha } x > -1 \\ < 0 & \text{ha } x < -1, \end{cases} \qquad \textbf{(2p)}$$

így

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

(1p)

Ábra (**2p**).



---

6. feladat (18 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket

$$a)\ \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{th} x} \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{arch}(\mathrm{x}+1)}$$

---

a) ∞^0 típusú határérték, határozatlan alak, (**1p**) de

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{th} x} = \lim_{x\to 0+} e^{\operatorname{th} x \ln\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad \textbf{(2p)}$$

és

$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{th} x \ln\left(\frac{1}{x}\right) \overset{\textbf{2p}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{-\ln(x)}{\operatorname{cth} x} \overset{\textbf{3p}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{-1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}} \overset{\textbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{sh}^2 x}{x} \overset{\textbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}{1} \overset{\textbf{1p}}{=} 0,$$

így

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{th} x} = e^0 = 1. \qquad \textbf{(1p)}$$

b) $\frac{0}{0}$ típusú határérték, határozatlan alak (**2p**), de

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{arch}(\mathrm{x}+1)} \overset{\textbf{2p}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{ch} x}{\frac{1}{\sqrt{(1+x)^2-1}}} \overset{\textbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0+}\sqrt{2x+x^2}\operatorname{ch} x \overset{\textbf{1p}}{=} 0.$$