Valószínűségszámítás vizsga
2016. január 7.
Megoldás(vázlat)ok

1. feladat

Legyenek A, B független, $\frac{1}{2}$ valószínűségű események. Számolja ki a $\mathbf{P}(A|A+B)$ feltételes valószínűséget.

Megoldás

A feltételes valószínűség definíciója alapján:

$$\mathbf{P}(A|A+B) = \frac{\mathbf{P}(A \cdot (A+B))}{\mathbf{P}(A+B)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A+B)}.$$

Az utóbbi egyenlőség azért igaz, mert az A esemény ugyanakkor következik be mint az „A és (A vagy B)”.

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(A $\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ során felhasználtuk, hogy az események függetlenek.)
Tehát $\mathbf{P}(A|A+B) = \dfrac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A+B)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3}$.

2. feladat

Egy játékos valamilyen dobókockás társasjátékban már csak 3 mezőnyire van a céltól. Minden körben csak egyszer dobhat a kockával, és a dobásnak megfelelő lépést tehet előre. Jelölje X azon *körök* számát, amely alatt a játékosunk eléri, vagy túlhaladja a cél mezőt. Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórását.

Megoldás

Könnyen meggondolható, hogy X értelmezési tartománya: $R_X = \{1, 2, 3\}$.
Nézzük meg, hogy milyen dobás(sorozat)ok esetén érünk célt pontosan 1, 2, illetve 3 lépés alatt!

- 1 dobás: {3, 4, 5, 6}
- 2 dobás: {12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26}
- 3 dobás: {111, 112, 113, 114, 115, 116}

Ez alapján X eloszlása:
$\mathbf{P}(X=1) = \frac{4}{6} = \frac{24}{36}$, $\mathbf{P}(X=2) = \frac{11}{36}$, $\mathbf{P}(X=3) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$. (Ellenőrzésképp: $\frac{24}{36} + \frac{11}{36} + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1$.)
Várható érték és szórás számítása:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{3} i \cdot \mathbf{P}(X=i) = 1 \cdot \frac{24}{36} + 2 \cdot \frac{11}{36} + 3 \cdot \frac{1}{36} = \frac{49}{36},$$

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{3} i^2 \cdot \mathbf{P}(X=i) = 1^2 \cdot \frac{24}{36} + 2^2 \cdot \frac{11}{36} + 3^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{77}{36},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2 X = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{77}{36} - \left(\frac{49}{36}\right)^2 = \frac{371}{1296},$$

$$\boldsymbol{\sigma} X = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2 X} = \frac{\sqrt{371}}{36}.$$

Tehát X várható értéke: $\mathbf{E}X = \frac{49}{36} \approx 1{,}361$ és X szórása: $\boldsymbol{\sigma} X = \frac{\sqrt{371}}{36} \approx 0{,}535$.

3. feladat

Legyen $X \in N(-2,3)$, $Y = \left(\frac{X+2}{3}\right)^2 + 1$. Adja meg az $f_Y(t)$ sűrűségfüggvényt.

Megoldás

Vegyük észre, hogy a $Z = \frac{X+2}{3}$ valószínűségi változó éppen X standardizáltja, azaz $Z \in N(0,1)$.
(A feladat enélkül is megoldható, csak kicsit több számolással.)
Az $f_Y(t)$ sűrűségfüggvény helyett számoljuk ki először inkább Y eloszlásfüggvényét ($F_Y(t)$-t)! (Általában valószínűségi változók transzformációinál azt könnyebb.)
Felhasználva az eloszlásfüggvény definícióját, továbbá hogy $Y = Z^2 + 1$:

$$F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}(Z^2 + 1 < t) = \mathbf{P}(Z^2 < t - 1) = \mathbf{P}(|Z| < \sqrt{t-1}) = \mathbf{P}(-\sqrt{t-1} < Z < \sqrt{t-1}).$$

Nyilván 1-nél kisebb t értékekre $F_Y(t) = 0$, mivel $Z^2 + 1 \geq 1$. Egyébként pedig $Z \in N(0,1)$-et felhasználva:

$$F_Y(t) = \mathbf{P}(-\sqrt{t-1} < Z < \sqrt{t-1}) = \Phi(\sqrt{t-1}) - \Phi(-\sqrt{t-1}) = 2 \cdot \Phi(\sqrt{t-1}) - 1.$$

$f_Y(t)$ pedig pont ennek a deriváltja (nem elfelejtve, hogy a $\Phi(\sqrt{t-1})$ egy összetett függvény):

$$f_y(t) = F'_Y(t) = (2\Phi(\sqrt{t-1}) - 1)' = 2\varphi(\sqrt{t-1}) \cdot (\sqrt{t-1})' = 2\varphi(\sqrt{t-1}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-1}}.$$

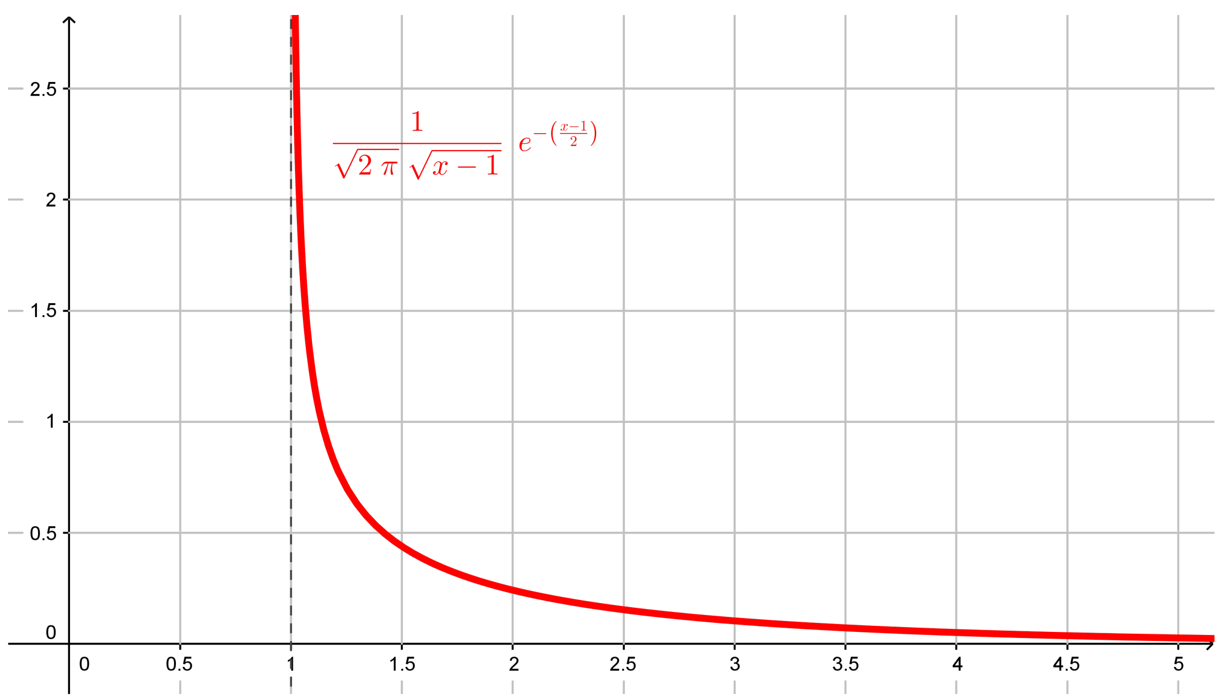
Felhasználva, hogy $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$f_Y(t) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{t-1})^2}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t-1}} \cdot e^{-\frac{t-1}{2}}.$$

Tehát Y sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t-1}} \cdot e^{-\frac{t-1}{2}}, & \text{ha } t > 1 \\ 0, & \text{ha } t \leq 1 \end{cases}.$$

Megjegyzés: ez *NEM* exponenciális vagy normális eloszlás, sűrűségfüggvényének grafikonja kb. az alábbi:



4. feladat

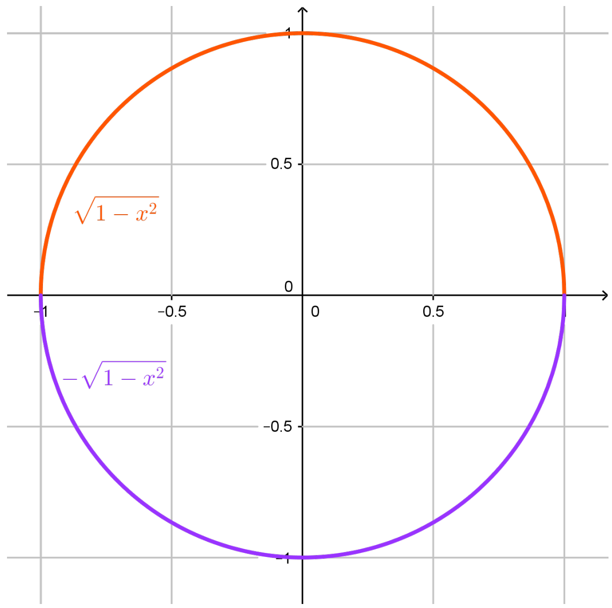
Legyen az (X, Y) együttes eloszlása egyenletes az origó középpontú egységkörön, azaz

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{ha } x^2+y^2<1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki az X vetületi sűrűségfüggvényét és várható értékét!

Megoldás

A definíció alaján ismert, hogy $f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$, az izgalmas kérdés, hogy ez a függvény milyen tartományon *nem* 0, azaz hol kell ténylegesen integrálni:



$$x^2+y^2<1 \iff y^2<1-x^2 \iff |y|<\sqrt{1-x^2} \iff -\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2}.$$

Ez alapján (konstans függvényt kell integrálni egy valamekkora intervallumon):

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}dy = \frac{1}{\pi}2\sqrt{1-x^2}.$$

X vetületi sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & \text{ha } -1<x<1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

X várható értéke:

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} x\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx = \cdots = 0.$$

A várható érték például azért 0, mert páratlan függvényt integrálunk 0-ra szimmetrikus intervallumon. (Egyébként az integrált az $\left((1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}\cdot(-2x)$ ötlettel számíthatnánk ki.)

5. feladat

Legyenek X, Y független 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. $U = X + Y$ és $W = Y - 2X$. Számolja ki az $\mathrm{R}(U, W)$ korrelációs együtthatót.

Megoldás

A korrelációs együttható definíciója alapján: $\mathrm{R}(U, W) = \frac{\mathrm{cov}(U,W)}{\boldsymbol{\sigma} U \boldsymbol{\sigma} W}$. Ehhez kénének a képletben szereplő mennyiségek.
Tudjuk, hogy a λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke $\frac{1}{\lambda}$ és szórásnégyzete $\frac{1}{\lambda^2}$, jelen esetben $(\lambda = 1)$: $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 1$ és $\boldsymbol{\sigma}^2 X = \boldsymbol{\sigma}^2 Y = 1$.
A kovariancia azonosságai (linearitása) alapján:

$$\mathrm{cov}(U, W) = \mathrm{cov}(X + Y, Y - 2X) = \mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{cov}(X, -2X) + \mathrm{cov}(Y, Y) + \mathrm{cov}(Y, -2X) = \dots$$

kihasználva, hogy X és Y függetlenek (ekkor $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$):

$$\dots = \mathrm{cov}(X, -2X) + \mathrm{cov}(Y, Y) = -2 \cdot \mathrm{cov}(X, X) + \mathrm{cov}(Y, Y) = -2 \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 X + \boldsymbol{\sigma}^2 Y = -2 \cdot 1 + 1 = -1.$$

X és Y függetlenségét kihasználva a szórásnégyzetek (ez csak szórás*NÉGYZET*re működik, szórásra nem):

$$\boldsymbol{\sigma}^2 U = \boldsymbol{\sigma}^2 (X + Y) = \boldsymbol{\sigma}^2(X) + \boldsymbol{\sigma}^2(Y) = 1 + 1 = 2,$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2 W = \boldsymbol{\sigma}^2 (Y - 2X) = \boldsymbol{\sigma}^2(Y) + \boldsymbol{\sigma}^2(-2X) = \boldsymbol{\sigma}^2(Y) + 4 \cdot \boldsymbol{\sigma}^2(X) = 1 + 4 \cdot 1 = 5.$$

Ez alapján a keresett korrelációs együttható:

$$\mathrm{R}(U, W) = \frac{\mathrm{cov}(U, W)}{\boldsymbol{\sigma} U \boldsymbol{\sigma} W} = \frac{\mathrm{cov}(U, W)}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2 U \boldsymbol{\sigma}^2 W}} = \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot 5}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} \approx -0{,}316.$$