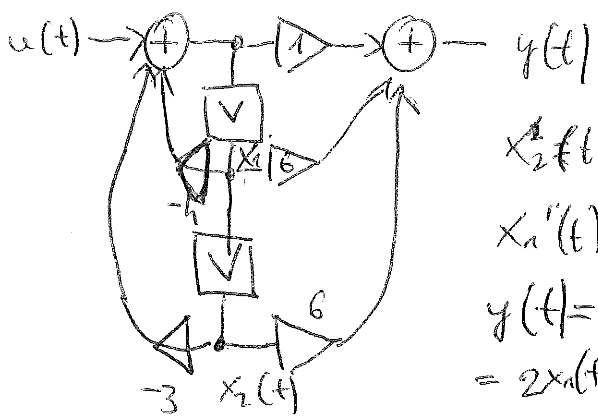
JELEK ZH KONZI

peskozoltan@gmail.com

Tavalyi A-ZH

A csop: a)



$x_2'(t) = x_1(t) + 0u$

$x_1'(t) = -4x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)$

$y(t) = 6x_1(t) + 6x_2(t) + (-4)x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) =$
$= 2x_1(t) + 3x_2(t) + u(t)$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 \\ x_2x_1 & x_2x_2 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} x_1 u \\ x_2 u \end{bmatrix}$

$C^T = \begin{bmatrix} y x_1 & y x_2 \end{bmatrix} \quad D = 1$

b) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 1$

! Egész számokat fognak kapni

Stabilitás: $|\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$

! Komplex számok nem lesznek!!
! Egész számok fognak kijönni ZH-n (Ennél a példánál)

→ Feltétel: $\forall \, Re\{\lambda_i\} < 0$ ✓ → Asz. stabil → GVS

Imp. válasz: $h(t) = D \cdot \delta(t) + \varepsilon(t) \cdot C^T \cdot e^{\underline{\underline{A}} t} \cdot \underline{B}$ (+gyűjtőképlet)

! Lépésről lépésre → pontért

+gyűjt+ → $e^{\underline{\underline{A}}t} = \underline{\underline{L}}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \underline{\underline{L}}_2 \cdot e^{\lambda_2 t} =$ → képlet

$\underline{\underline{L}}_1 = \dfrac{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}{-1-(-2)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -1 \quad \underline{\underline{L}}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ +4 & +4 \end{bmatrix}$

1) $C^T \cdot e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot \underline{B} = C^T \left(e^{\lambda_1 t} \cdot \underline{\underline{L}}_1 + e^{\lambda_2 t} \cdot \underline{\underline{L}}_2 \right) \cdot \underline{B}$

$e^{\lambda_1 t} \cdot C^T \cdot \underline{\underline{L}}_1 \cdot \underline{B} \Rightarrow C^T \cdot \underline{B}_1 \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3}}$

„Nem bonyolult"

2) $C^T \underline{\underline{L}}_2 \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$C^T \cdot e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot \underline{B} = e^{-t} \cdot 3 + e^{-2t} \cdot (-3)$

$h(t) = 1 \cdot \delta(t) + \varepsilon(t) \cdot \left(3 \cdot e^{-t} - 3 \cdot e^{-2t} \right)$

C.) „Nyilván konvolúciót kell használni"..

$$h(t) = \delta(t) + \varepsilon(t)\cdot 2\cdot e^{-2t}$$
$$u(t) = 3\cdot\varepsilon(t) - 4{,}5\,\varepsilon(t-6{,}8)$$
$$y(t) = ?\ (\text{válaszjel} = ?)$$

„Mindz $\varepsilon(t)$ ->, tehát ~~m~~ $u(t)=\varepsilon(t)$"

-> „ilyenkor nem esel kétségbe"

Ezt $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int u(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$ -> Ez ∄ a képletgyűjtben.

„Célszerű tudni"

$$\to y(t) = \int_{+\infty}\left[\delta(\tau)+\varepsilon(\tau)\cdot 2\cdot e^{-2\tau}\right]\cdot\varepsilon(t-\tau)\,d\tau \underset{\varepsilon(t)}{=} \int_{\boxed{\phi}}^{t}\delta(\tau)\,d\tau + \int_0^t 2\cdot e^{-2\tau}\,dt =$$

ϕ -> $\boxed{\phi}$

$$= \int_{-\phi} \delta(\tau) + 2\cdot\left[\frac{e^{-2\tau}}{2}\right]_{\phi}^{t} = 1 + 2\cdot\left(\frac{e^{-2t}}{-2} - \frac{1}{-2}\right) = 1 - e^{-2t} + 1 = (2-e^{-2t})\cdot\varepsilon(t)$$

„Nem kell kiszámolni, ez = 1".

$$!\ y(t) = 3\,\varepsilon(t)\cdot(2-e^{-2t}) - 4{,}5\cdot\varepsilon(t-6{,}8)\cdot\left(2-e^{-2(t-6{,}8)}\right)$$

-> „A linearitást és az időbeli invarianciát kihasználjuk".
„Semmi nehézség, egy exponenciálisat".

A csop. / 1. kispélda: $X[k] = 37{,}5\cdot\cos\left(0{,}96\pi\cdot k + \frac{\pi}{19}\right)$

Periodikus -e?

Általában -> $a\cdot\cos(\vartheta^c\cdot k + \varphi)$

$$\vartheta^c = 0{,}96\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\vartheta^c} = \frac{2\pi}{\frac{96}{100}\pi} = \frac{200}{96} \Rightarrow L = 200$$

-> Igen, ő periodikus,

* „Ha nem egész szám jön ki, akkor megindokolva NEM periodikus".

2. kispélda: Kauzális, FI, inv, lineáris $u(t) \to y(t)$, $= \int_{-\infty}$ ... konvolúció képlete
ha $\delta(t) \to h(t)$? (2 pontért..)

„konvolúcióra kíváncsi".

3. kispélda: $h(t) = 2\,\varepsilon(t)\cdot e^{-5t}$

$$u(t) = \varepsilon(t)$$

$$y(t)\ \text{áll. áll} = y(t) = \int^{+\infty} 2\cdot\varepsilon(t)\cdot e^{-5\tau}\cdot\varepsilon(t-\tau)\,dt =$$

$$= \int_{\boxed{\phi}}^{t} 2\cdot e^{-5\tau}\,d\tau = 2\cdot\left[\frac{e^{-5\tau}}{-5}\right]_{\phi}^{+\infty} = \left(-\frac{2}{5}\cdot e^{-5t} + \frac{2}{5}\right)\cdot\varepsilon(t) \to \text{Nem ez a válasz}$$

„Mindig a határra válaszolunk" -> $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{2}{5}$

old

A/4. kispélda

$$x[k+1] = 0{,}2[k] + 2u[k]$$
$$y[k] = 3\cdot x[k] + 2u[k]$$
$$u[k] = \delta[k]$$

$$h[k] = \varepsilon[k-1]\cdot \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^{k-1}\cdot \underline{B} + D\cdot\delta[k]$$

„1×1-es mátrix, gyakorlatilag behelyettesítés".

$$h[k] = \varepsilon[k-1]\cdot 3\cdot 0{,}2^{k-1}\cdot 2 + 2\delta[k]$$

5. kispélda: $H(e^{j\vartheta}) = \dfrac{1}{1-e^{j\vartheta}} \longrightarrow \vartheta = 3\pi \Big\} \dfrac{2\pi}{\vartheta} = \dfrac{2\pi}{3\pi} = \dfrac{2}{3}$ ← Periodikus?

- Igen
- Mennyi a periódus?
- Mindig a nagyobb...
- Ja igen..

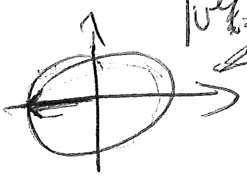
Teta leolvasható

$$u[k] = 12{,}5\cdot\sin(3\pi k + 0{,}5)$$

$y[k] = ?$ „Kispéldáról van szó, nem kell levezetni"...

$$H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta=3\pi} = \frac{1}{1-e^{j3\pi}} = \frac{1}{2} \rightarrow „$$

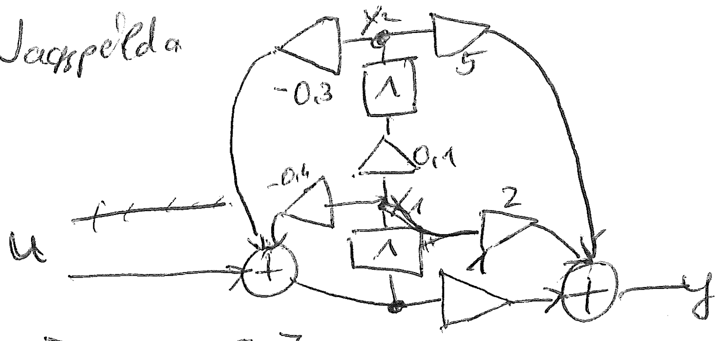
-1



$$y[k] = 12{,}5\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(3\pi k + 0{,}5 + \phi)$$

B csoport: Nagypélda

a.)



„Itt nem integrátorok vannak, hanem késleltetők".

$$x_2[k+1] = 0{,}1\cdot x_1[k]$$
$$x_1[k+1] = -0{,}4x_1[k] - 0{,}3x_2[k] + u[k]$$
$$y[k] = -0{,}4x_1[k] - 0{,}3x_2[k] + u[k] + 2x_1[k] + 5x_2[k]$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}3 \\ 0{,}1 & \varphi \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 1{,}6 & 4{,}7 \end{bmatrix} \quad D = 1$$

→ „Ez 10 pont.."

-4.- old.

b.) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -0,4 & -0,3 \\ 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$ $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \emptyset \end{bmatrix}$ $\underline{C}^T = [\emptyset \;\; 1]$ $D = 1$

Stabilitás?

$|\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| = \ldots = \left\langle \begin{matrix} \lambda_1 = -0,1 \\ \lambda_2 = -0,2 \end{matrix} \right\}$ → Feltételvizsgálat: $\forall\; |\lambda_i| < 1$ ✓ ⇒ ASZ. stab ⇒ GVS

(5 pont...)

c.) $h[k] = ? \Rightarrow C^T \cdot \underline{A}^k \cdot \underline{B}$ „A nehézség mindössze a hatványozás...!"

$$\underline{\underline{L}}_1 = \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \ldots = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{L}}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}^T \cdot \underline{\underline{L}}_1 \cdot \underline{B} = [\emptyset \;\; 1] \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \emptyset \end{bmatrix} = \ldots = \underline{\underline{2}}$$

$$\underline{C}^T \cdot \underline{\underline{L}}_2 \cdot \underline{B} = \ldots = [\emptyset \;\; 1] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-2}}$$

$$\to h[k] = 1 \cdot \delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot \left(2 \cdot (-0,1)^{k-1} - 2 \cdot (-0,2)^{k-1}\right)$$ → „képletgyűjteményből ~~kiolvasható~~ kiolvasható!"

c.) $h[k] = 2\delta[k] + \varepsilon[k] \cdot 0,3^k$ „Ez most legyen $\delta[k-8]$"

$u[k] = 6 \cdot \varepsilon[k] - 14 \cdot \cancel{\varepsilon}\,\delta[k-8]$

$\to u[k] = \varepsilon[k]$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] u[k-i] = \sum u[i] \cdot h[k-i] \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} (2 \cdot \delta[i] + \varepsilon[i] \, 0,3^i) \cdot \varepsilon[k-i] =$$

$$= \sum_{i=\emptyset}^{k} 2 \cdot \delta[i] + \sum_{i=\emptyset}^{k} 0,3^i = \sum_{i=-\emptyset}^{+\infty} 2 \cdot \delta[i] + \frac{1 - 0,3^{k+1}}{1 - 0,3} = \varepsilon[k] \cdot \left(2 + \frac{1 - 0,3^{k+1}}{1 - 0,3}\right)$$

dirac miatt

De nem ez a válasz a kérdés az volt, h

→ időinvar, konv, szuperpoz. miatt:

$$y[k] = 6 \cdot \varepsilon[k] \cdot \left(2 + \frac{1 - 0,3^{k+1}}{1 - 0,3}\right) - 14 \cdot \left(2\delta[k-8] + \varepsilon[k-8] \, 0,3^{(k-8)}\right)$$

„Nem kell kibonatni a dolgokat ennél jobban.

-5- old.

B/ 1. kp: $u(t)=\varepsilon(t)$

$h(t)=2{,}86\cdot\varepsilon(t)\cdot e^{-9t}$

$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots=\int_{0}^{t}2{,}86\, e^{-9\tau}\,d\tau=\ldots$

$\lim_{t\to+\infty} y(t)=\frac{2{,}86}{9}$

---

2. kp:

Konvolúciós képlet.. (A1, D1 is)

3. kp: Periodikus-e?

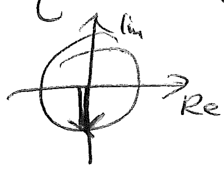
$x[k]=3{,}14159265358979\ldots\cdot\cos(\underbrace{0{,}13}_{\vartheta}\cdot k+0{,}4)$

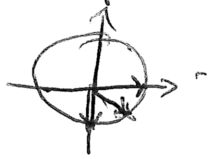
$\frac{2\pi}{\vartheta}=\frac{2\pi}{0{,}13\pi}\notin\mathbb{Z}$ ⇒ nem periodikus

4. kp: $\underset{\text{Átviteli karakterisztika}}{H(e^{j\vartheta})}=\frac{7}{1-e^{-j\vartheta}}$ $\quad u[k]=17{,}2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}k+0{,}49\right)$

$y[k]=?$ ⇒ 1) Leellenőrzöd, h periodikus-e
2) Behelyettesítesz az átviteli karakterisztikába.

$$H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}=\frac{7}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}}}=\frac{7}{1-j}=\frac{7}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot e^{-j\pi/4}}=\frac{7}{\sqrt{2}}\cdot e^{+j\frac{\pi}{4}}$$





$y[k]=17{,}2\cdot\frac{7}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}k+0{,}49+\frac{\pi}{4}\right)$

5. kp: $x[k+1]=0{,}75\cdot x[k]+12\cdot u[k]$

$y[k]=3\cdot x[k]+13\,u[k]$

$u[k]=\delta[k]\Rightarrow y[k]=h[k]=13\cdot\delta[k]+\varepsilon[k-1]\,3\cdot 0{,}75^{k-1}\cdot 12$

„Ilyen feladatok várhatóak a ZH-n is!"