1

10

1) Feladat (10 pont).

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n\,2^n+5\,n}{3^n+3}} = ?$$

A felhasznált tételt (tételeket) írja le!

$$\sqrt[n]{\frac{n\,2^n+5n}{3^n+3}} = \sqrt[n]{n}\cdot\frac{2}{3}\,\sqrt[n]{\frac{1+\frac{5}{2^n}}{3+\frac{3}{3^n}}} \to \frac{2}{3} \quad 1$$

1

$$\sqrt[n]{n} \to 1 \quad 1$$

mert:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{6}} = \sqrt[n]{\frac{1}{3+3}} \le \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1+\frac{5}{2^n}}{3+\frac{3}{3^n}}}}_{b_n} \le \sqrt[n]{\frac{1+5}{3}} = \sqrt[n]{2}$$

2 2

$$\sqrt[n]{\frac{1}{6}} \to 1, \qquad \sqrt[n]{2} \to 1 \quad 1$$

Rendőrelv alapján $b_n \to 1$ és így $a_n \to \frac{2}{3}$ } 2

T Ha $a_n \le b_n \le c_n$ és $a_n \to A$, $c_n \to A \Rightarrow b_n \to A$

2 10

2) Feladat (10 pont).

Mit nevezünk geometriai sornak, mikor konvergens és mennyi az összege? Határozza meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}+(-2)^{n-1}}{10^n} = ?$$

T Geometriai sor

$$1+q+q^2+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{ha } |q|<1 \\ \cancel{\infty} & \cancel{\text{ha } q \ge 1} \\ \cancel{\text{divergens},} & \cancel{\text{ha } q \le -1} \end{cases}$$

1 1 1

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 9^n - \frac{1}{2}(-2)^n}{10^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{10}\right)^n$$

1 2

$$= 3\cdot\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{9}{10}} - \frac{1}{2}\,\frac{-\frac{2}{10}}{1+\frac{2}{10}} =$$

1 2 1

$$= \frac{27}{1} + \frac{1}{12}$$

AN(1) V. 06.01.26.

3 8

3) Feladat (08 pont).

A derivált definíciója alapján határozza meg az alábbi függvény baloldali deriváltját a 0-ban:

$$f(x) = \sqrt{x \sin \pi x \cos 2x}$$

$$f'(0-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \ (1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\left(\sqrt{\sin \pi h (\cos 2h) h} - 0\right) \ (1)$$

$$= \lim_{h\to 0^-} -\sqrt{\frac{(\sin \pi h) h \cos 2h}{h^2}} \ (2) \quad \left(\text{most } h = -|h| = -\sqrt{h^2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0^-} -\sqrt{\underbrace{\frac{\sin \pi h}{\pi h}}_{\to 1 \ (1)} \cdot \pi \cdot \underbrace{\cos 2h}_{\to 1}} \ (2) = -\sqrt{\pi} \ (1)$$

4 10

4) Feladat (10 pont).

Mondja ki és bizonyítsa be az intervallumon való monoton növekedés elégséges feltételét! A felhasznált tételt (tételeket) írja le!

T_1

Ha f differenciálható I-n:		
1. f monoton nő	$\Longleftrightarrow$	$f'(x) \geq 0$
2. f szigorúan monoton nő	$\Longleftarrow$	$f'(x) > 0$
3. f monoton csökken	$\Longleftrightarrow$	$f'(x) \leq 0$
4. f szigorúan monoton csökken	$\Longleftarrow$	$f'(x) < 0$

NEM KELL.

3

$\Longleftarrow$:

$x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x_2$: $[x_1, x_2]$-ben alkalmazható a Lagrange középértéktétel:

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0$ (a feltétel miatt) $\quad \xi \in (x_1, x_2)$.

Mivel $x_2 - x_1 > 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1)$.

7

5) **Feladat (16 pont).**

Legyen

$$f(x)=\frac{\ln|x|}{x}$$

a) Határozza meg azokat az intervallumokat ahol a függvény konvex illetve konkáv!

b)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = ? \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = ?$$

a) $f(x)=\frac{\ln|x|}{x}$ ptl. fv. $\Rightarrow$ elég $x>0$-ra vizsgálni $(x\neq 0)$ (2)

$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2}$ (1), ha $x>0$ (1)

$f''(x) = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4} =$ (1)

$= \frac{-3x+2x\ln x}{x^4} = \frac{1}{x^3}(-3+2\ln x)$

$f''(x)>0$, ha $-3+2\ln x>0$, $\ln x > \frac{3}{2} \Rightarrow x>e^{\frac{3}{2}}$ (2)

$\Rightarrow (e^{3/2},\infty)$ intv.-on a fv. szig. konvex. (2)

$f''(x)<0$, ha $0<x<e^{3/2} \Rightarrow (0,e^{3/2})$-on f konkáv (1)

$(-\infty,-e^{3/2})$-on a fv konkáv. és $(-e^{3/2},0)$-on f konvex (1)

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x \to\infty}{x\to\infty} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ (3)

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\cdot \underbrace{\ln x}_{-\infty} = -\infty$. (2)

6) **Feladat (16 pont).**

a) (6 pont) Igazolja, hogy $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

b) (10* pont) Vezesse be az $x=(1/5)\sinh t$ új változót az

$$\int_0^{(1/5)\sinh 1} x\sqrt{1+25x^2}\,dx$$

integrálba majd határozza meg!

a) $\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (3)

$\boxed{5}$

$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}+2-e^{2x}-e^{-2x}+2\right) =$ (2)

$= \frac{4}{4} = 1$

b) $x=\frac{1}{5}\,\mathrm{sh}\, t$, $dx = \frac{1}{5}\,\mathrm{ch}\, t\, dt$ (2)

$\boxed{11}$

$I = \int_0^1 \frac{1}{5}\,\mathrm{sh}\, t\sqrt{1+25\frac{\mathrm{sh}^2 t}{25}}\cdot\frac{1}{5}\,dt$ (1) (1) (2)

$= \int_0^1 \frac{1}{25}\,\mathrm{sh}\, t\,\mathrm{ch}\, t\,\mathrm{ch}\, t\, dt = \int_0^1 \frac{1}{75}\, 3\,\mathrm{ch}^2 t\,\mathrm{sh}\, t\, dt$ (1)

$= \frac{1}{75}\left[\mathrm{ch}^3 t\right]_0^1$ (2) $= \frac{1}{75}\left(\mathrm{ch}^3 1 - \mathrm{ch}^3 0\right) = \frac{\mathrm{ch}^3 1 - 1}{75}$ (1) (1)

(7) (10)

*7) Feladat (10 pont).

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x^2+1)\arctan^2 x}\,dx = ?$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)\,\mathrm{arctg}^2 x}\,dx = -\frac{1}{\mathrm{arctg}\,x} + C, \quad x>0 \quad 3$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x^2+1)\,\mathrm{arctg}^2 x}\,dx = \lim_{\Omega\to\infty}\int_1^\Omega \frac{1}{(x^2+1)\,\mathrm{arctg}^2 x}\,dx = \quad 1$$

$$= \lim_{\Omega\to\infty}\left[-\frac{1}{\mathrm{arctg}\,x}\right]_1^\Omega = \lim_{\Omega\to\infty} -\frac{1}{\mathrm{arctg}\,\Omega} + \frac{1}{\mathrm{arctg}\,1} = \quad 1 \quad 1$$

$$= -\frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\pi}(-2+4) = \frac{2}{\pi}. \quad 1$$

2 1

(8) (10)

*8) Feladat (10 pont).

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le x \le 3 \\ 2x, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$$

Határozza meg a

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

függvényt!

Differenciálható-e G a 3-ban? $G'(3-) = ?$ $G'(3+) = ?$

$$G(x) = \begin{cases} \int_0^x 1\,dt = x, & \text{ha } x \le 3. \quad 2 \\ \int_0^3 1\,dx + \int_3^x 2t\,dt, & \text{ha } x > 3 \quad 2 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \le 3 \\ 3 + \left[t^2\right]_3^x = 3 + x^2 - 9 = x^2 - 6, & \text{ha } x > 3 \quad 2 \end{cases}$$

$$G'_-(3-) = 1 \quad 1 \qquad G'_+(3+) = 2x\big|_{x=3} = 6 \quad 1$$

$$G'_-(3) \ne G'_+(3) \implies G \text{ nem diffh. 3-ban}$$

2

10

***9) Feladat (10 pont).**

Milyen $\alpha > 0$, esetén konvergens az

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = ?$$

integrál? Állítását bizonyítsa be!

Milyen α-ra konvergens $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx$?

Ha $\alpha = 1$:

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\omega\to\infty} \ln x \Big|_1^{\omega} = \lim_{\omega\to\infty} (\ln\omega - \ln 1) = \infty, \quad \text{tehát divergens}$$

(1) (1) (1)

Ha $\alpha \neq 1$:

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_1^{\omega} x^{-\alpha}\, dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\omega} = \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha-1}$$

(1) (2) (1) (1)

Konvergens, ha $1-\alpha < 0$, tehát $\alpha > 1$. (1)
Divergens, ha $1-\alpha > 0$, tehát $\alpha < 1$. (1)

Összefoglalva:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \begin{cases} \text{konvergens}, & \text{ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha } \alpha \le 1 \end{cases}$$

10

Pótfeladat.
Csak a kettes és a hármas vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

*** 10) Feladat (10 pont).**

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{-3-x^2+4x}}\, dx = ? \qquad \int_1^2 \frac{1}{(3x-6)^2}\, dx = ?$$

a) $\boxed{6}$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{-3-x^2+4x}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{-3-x^2+4x}}\, dx \quad (1)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\, dx = \quad (1)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\arcsin(x-2)\right]_{1+\varepsilon}^2 \ (2) = \arcsin 0 - \arcsin(-1) \ (1)$$

$$= \arcsin 1 \quad (1)$$

b) $\boxed{4}$

$$\int_1^2 \frac{1}{(3x-6)^2}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{(3x-6)^2}\, dx \quad (1).$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{-1}{3x-6} \cdot \frac{1}{3}\right]_1^{2-\varepsilon} \ (1) =$$

$$= \frac{1}{9} \lim_{\varepsilon\to 0^+} 1 - \frac{1}{2-\varepsilon-2} \ (1) = \infty. \ (1)$$