WIENER GÁBOR
wiener@cs.bme.hu lehet konzultálni

- közelítő algoritmusok
- ütemezéselmélet ← még a zh-ban benne lesz.
- Megbízható hálózatok tervezése

NP-nehéz problémák

BSZ2 - gráfelmélet
Katona — számításelmélet alapjai
Recski
Szabó

Problémák:

- X input → $f(x)$ kimenet — kiszámítási problémák:

  $x, y \in \mathbb{Z}^+$ $f(x,y) = x+y$
  xy
  x^y

- I input X_I — $x \in X_I$-t keresünk, amire $f(x)$ optimális
  gráf — halmaz

  pl.: G gráf X_G, ebből keresünk olyat amiben
  jó színezések halmaza — a legkevesebb szín van
  $f(x)$ x a színek száma a színezésben
  (kromatikus szám és a színezés is kell, bizonyíték)

  ezek optimalizálási problémák

- eldöntendő kérdésre válasz IGEN/NEM
  pl.: Boole-formulák kielégíthetősége: SAT
  gráf összefüggő-e
  eldöntési problémák

szempont: minél gyorsabb algo., de jó legyen pontos

hányféle is lehet

gyors? - kutatási p. néhány hónap
valós alk. pár mp.

- alkalmazástól függ
- bemenettől függ

a polinom idejű algoritmusok jók - elméleti konstrukciókban is használható
nem — " — nem jó - tipikusan

de pl. $1000n^{200}$ nem jó

$2^{\frac{n}{10000}}$ viszont nem rossz

- ilyenek nem nagyon fordulnak elő

polinom: 5, 6. hatványnál nem nagyobb

n: bemenet hossza, mérete

pl: $x, y \to x+y$

$\underbrace{111\ldots1}_{x}$ $\underbrace{111\ldots11}_{y}$ ← hülyeség

$$\begin{array}{r} 13572 \\ +\ 27432 \\ \hline \end{array}$$

← lineáris log

$x \cdot y$ ← négyzetes

$x^y = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{y}$ y-1 db szorzás ← exponenciális

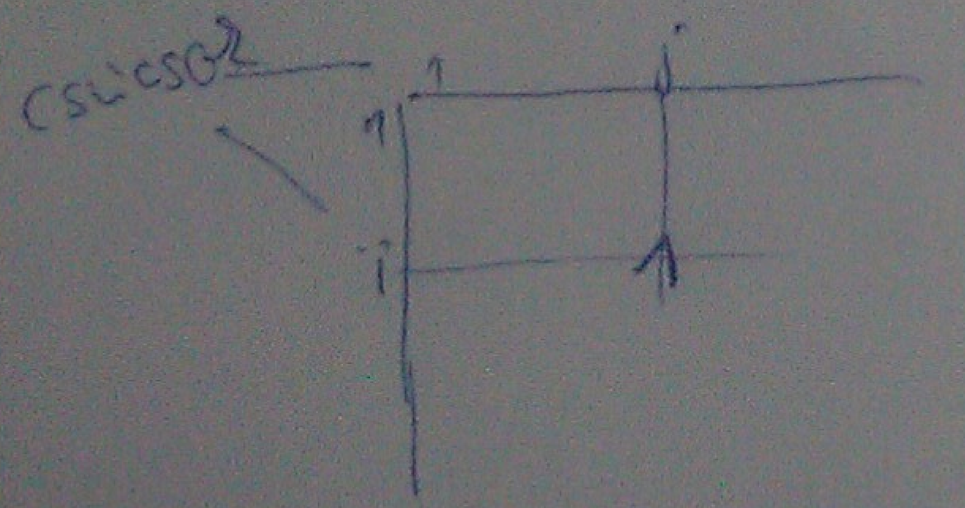
n: $\log x + \log y$

halmaz - karakterisztikus vektor

1	2	3	...	n
1	0	1	...	

amik benne vannak

gráf - szomszédsági mátrix



1: van él
0: nincs él

ha nem megy polinom időben? honnan lehet tudni, hogy nem megy?

hatványozásra nincs polinom idejű

$\log x^y$ db számjegy lesz

$\log x^y = \boxed{y \log x} \leftarrow$ exponenciális számjegy lesz

ritka, hogy ilyen könnyen látható, hogy belássuk → NP

Bonyolultsági osztályok

∘ P osztály - polinom időben megoldhatók (∃ algo. legfeljebb $c_1 n^{c_2}$ lépést tesz)

bemenet mérete

konstans

pl.: gráf összefüggő

van-e kör benne

teljes párosítás

∘ NP osztály - eldöntési problémák

igen válasz - polinom időben van bizonyíték

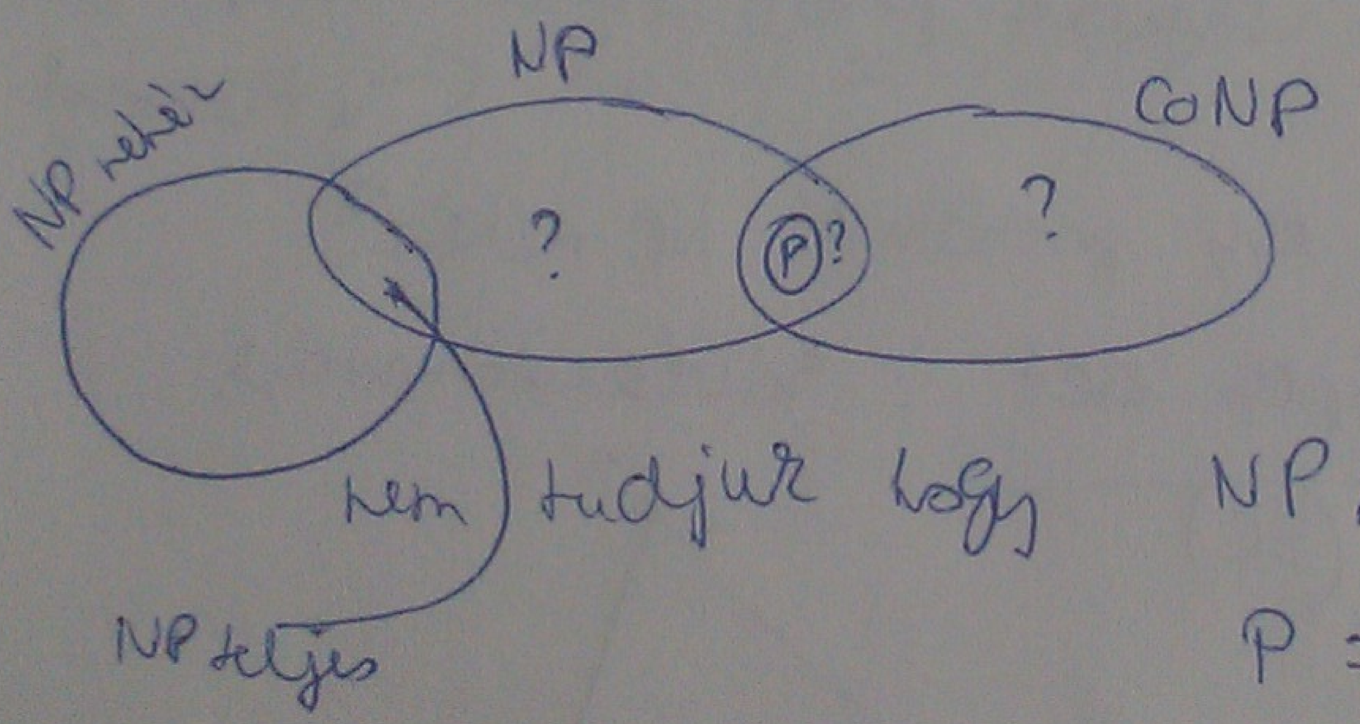
pl.: van-e hamilton köre gráfban, SAT

∃ az „igen" válaszra polinom időben ellenőrizhető tanú

∘ coNP osztály

nem választ lehet polinom időben ellenőrizni

hamilton körre ez nem jó



nem tudjuk hogy

$NP \cap coNP \overset{?}{=} P$

$P \overset{?}{=} NP$

↑ nagyon érdekes

NP-teljes: kriptográfiai alk.

• NP-nehéz probl.: ha valamelyiket meg tudnánk oldani akkor az összes NP-belit is:

bármely NP-beli probléma visszavezethető reájuk

nem tudjuk hogy van-e ilyen

pl. SAT -

- gráf összefüggő-e $\in P$ (DFS, BFS, ...)

- páros gráfban létezik-e TP $\in NP$ $\Rightarrow \in P$ – javító utas algo.

  $\in coNP$ ↑ nem mindig

  ↓ Frob. tétel

- Je 2-színezhető a gráfnak? $\in P$ (BFS)

- Je 3 színezés $\in$ NP-teljes

- síkbarajzolható-e egy gráf $\in NP$

  $\in coNP$ – Kuratowski tétel

  $\in P$

- Klikk, mekkora a teljes részgráf $\in$ NP-nehéz

  Igaz-e hogy legfeljebb valamekkora $\in$ NP teljes

- Max fgtlen ponthalmaz $\in$ NP-nehéz

hogyan lehet kihasználni, h. egy probléma NP nehéz?

Hamilton-kör – NP teljes

utazó ügynök – NP nehéz

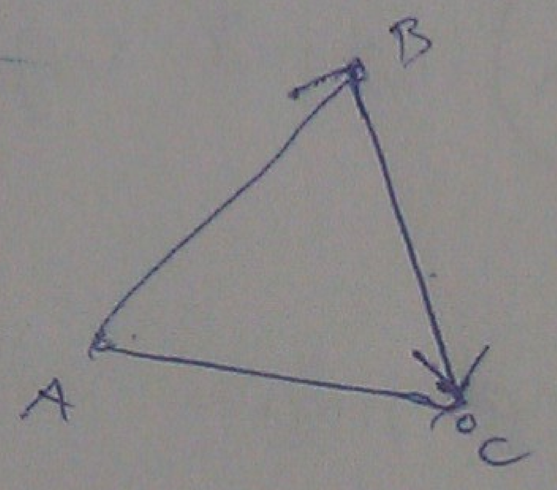
$\geq$ másképp állunk neki egy feladatnak ha tudjuk, hogy ilyen típusúak

pl. kéves ember útja → utazó ügynök probléma – min. költségű útvonal

milyen lehetőségünk van, ha egy probléma NP nehéz?

- további információk pl. spec eset: kövéautomatás

$$c(AC) \leq c(AB) + c(BC)$$



- közelítő algoritmusok – nem teljesen pontosan oldják meg az optimalizálási problémát pl. 10%-os eltérés

  polinom időben teljesítmény korláttal

  metrikus utazó ügynök

  euklideszi – || –

- heurisztikák - nincs semmi garancia, de működik tapasztalat
bizonyos szituációban ez nem megenged- alapján
hető

Max független ponthalmaz megtalálása NP-nehéz

De páros gráfra $\in P$

Gallai-tétel

$\alpha(G) + \tau(G) =$ csúcsszám

Kőnig tétel: $\nu(G) = \tau(G)$ ha G páros gráf

Élkromatikus szám

optimális élszínezés

> különböző szín

$\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G)+1$ ha G egyszerű

$\Delta(G)$ v. $\Delta(G)+1$ $\Leftarrow$ NP teljes

De páros gráfra $\in P$ Kőnig-tétel

G páros $\rightarrow \chi_e(G) = \Delta(G)$

Közelítő algoritmusok

Additív hibával közelítő algo.

NP nehéz opt. probl. - valami kis hibával, nem túl gyakran
de polinom legyen

Def: Egy algoritmus c additív konstans hibától eltekintve jól old meg egy problémát, ha $\forall I$ inputra polinom időben szolgáltat egy $\boxed{y \in X_I}$ megoldást, amire

I input → X_I megoldáshalmaz
$x \in X_I$-t keresünk, amire
$f(x)$ min/max

$$f(y) \le \min_{x \in X_I} f(x) + c \quad \rightarrow \text{min probl.}$$

$$f(y) \ge \max_{x \in X_I} f(x) - c \quad \rightarrow \text{max probl.}$$

nem elég a fgv. értéke, konkrét megoldás kell

1. Élkromatikus szám, élszínezés

input: gráf ⇒ out. optimális élszínezés

egyszerű gráfon

$$\Delta(G) \le \chi_e(G) \le \Delta(G) + 1 \quad \leftarrow \text{Vizing tétel}$$

max fok

algoritmikus bizonyítás polinom idejű

Vizing tétel bizonyítására szolgáló alg. 1 additív hibával közelítő alg. lesz

2. optimális színezés síkgráfon ← 4 színnel mindig színezhetők

NP nehéz a kromatikus szám megmondása

5 szín tétel

∃ polinomiális alg. 5-színezésre

üres él? → nincs · 1 szín

páros gráf → igen 2 ← BFS szélességi
nem 3.

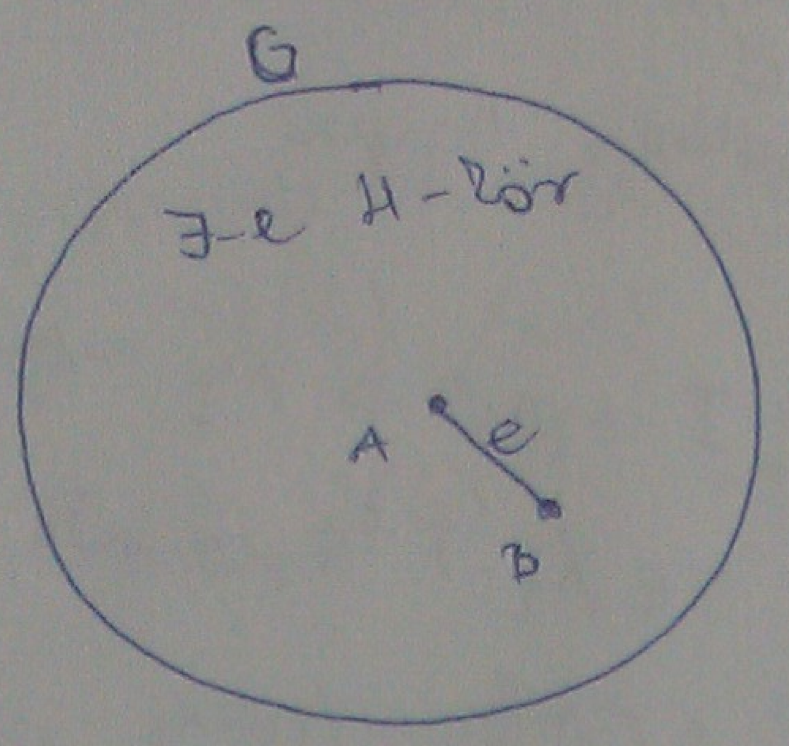
üres-e ha nem → páros-e → ha nem → alg.

2 additív hibával közelítő alg.

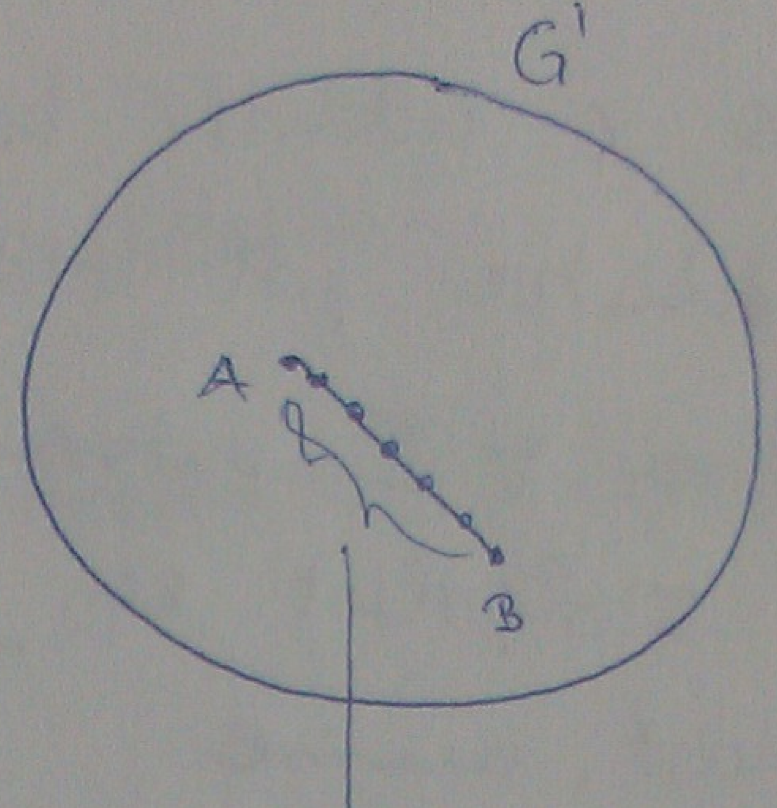
∄ c konstans amire a leghosszabb kör probléma c additív hibával közelíthető lenne. → NP nehéz

Biz

Indirekt: Tfh. ∃ C konstans . . .



→



c db új pont az összes élre

G'-re hívjuk meg az algoritmust. → ad egy k kört G'-ben ami ≥ OPT' − C hosszú. ∀ kör hossza osztható c+1-gyel

a k kör optimális G'-ben, hosszuk különbsége

(ha P≠NP-vel) – a körben ez nem jól van

Multiplikatív hibával

Def.: Egy alg. k multiplikatív hibától eltekintve jól old meg egy problémát (k-approximációs alg.), ha ∀ I inputra polinom időben szolgáltat egy $y \in X_I$ megoldást, amire

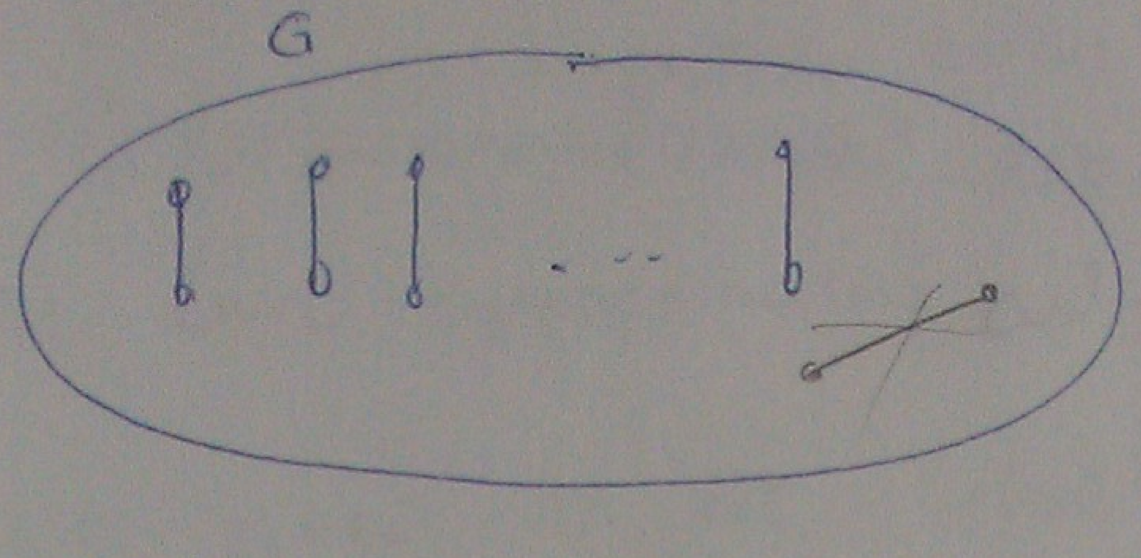
$$f(y) \le k \cdot \min_{x \in X_I} f(x) \quad \rightarrow \text{min probl.}$$

$$f(y) \ge \frac{1}{k} \cdot \max_{x \in X_I} f(x) \quad \rightarrow \text{max probl.}$$

1. Gráf min lefogó ponthalmaz keresése – NP-nehéz

$\boxed{\tau(G)}$ = min lefogó ponthalmaz

2-approximáció:



– max párosítás keresése (tetsz. gráfban is polinom időben)
↖ nehéz tétel

mérete $\nu(G)$ (nü)

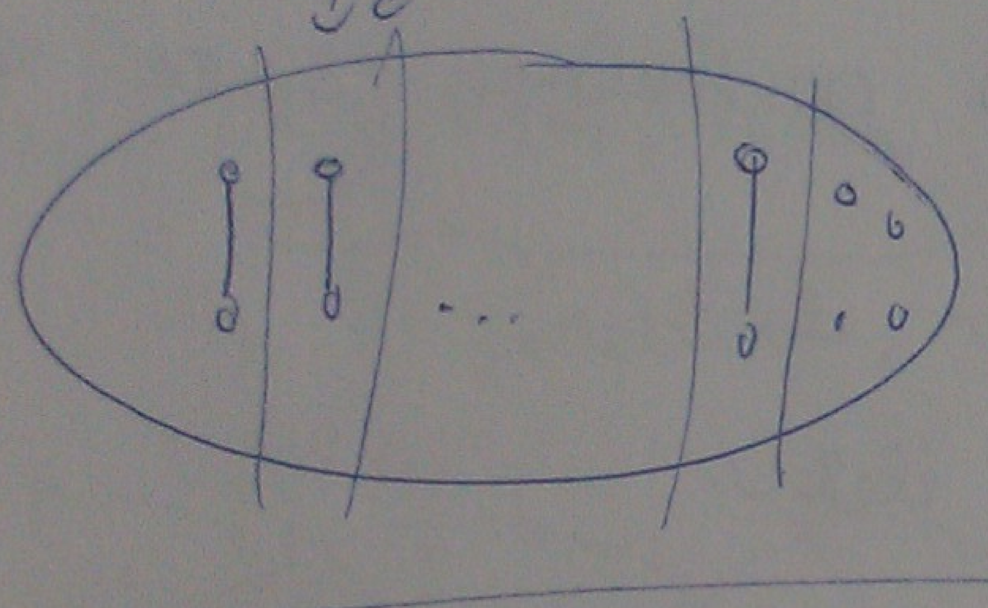
$\tau(G) \geq \nu(G)$ → !BSZ2 + gráfelmélet!

áll.: a végpontjai a max párosításnak lefogó ponthalmazt alkotnak. ilyen él nincs →

$2\nu(G)$ ~~db~~ pont

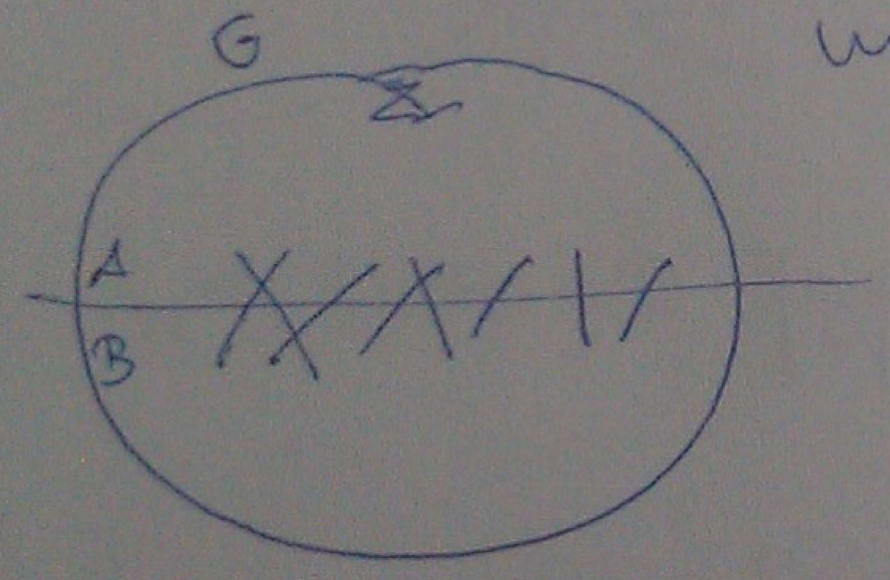
$2\tau(G) \geq 2\nu(G)$

nem bővíthető párosítás keresése
↓↙ éleket eldobjuk folyamatosan



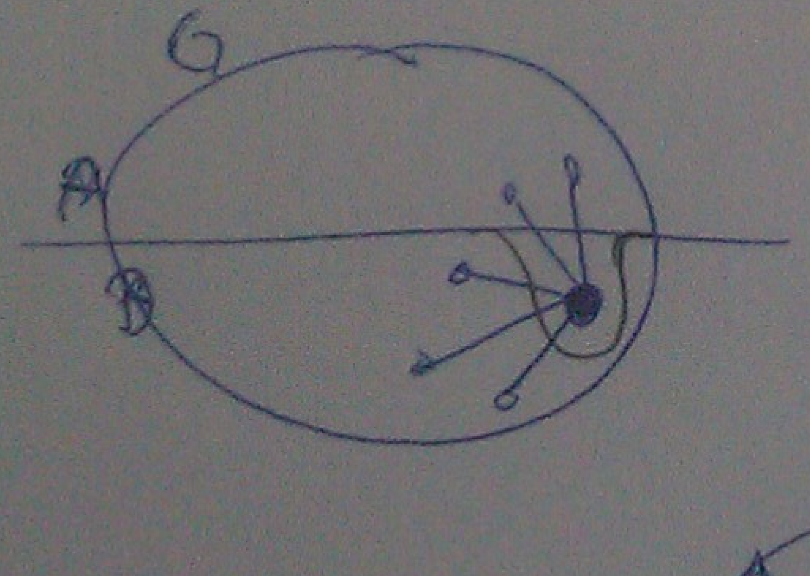
végpontok halmaza ezzel lefogó
gyorsabb ez az alg.

2. Max. élszámú páros részgráf keresése   nem csúcsszámra, hanem élszámra



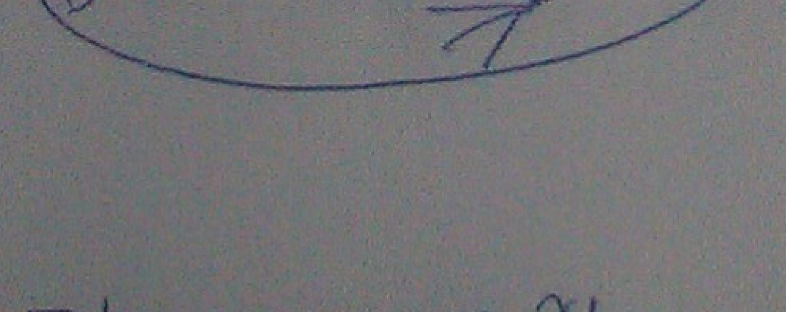
minél több él menjen keresztbe

legalább fele annyit találjon: 2-approx.



– kettéosztom
– megnézem hány él megy ide-v.oda
– átpakolom ← ez polinom időben megy.

$\forall x$-re $d_{keresztbe}(x) \geq d_{belül}(x)$

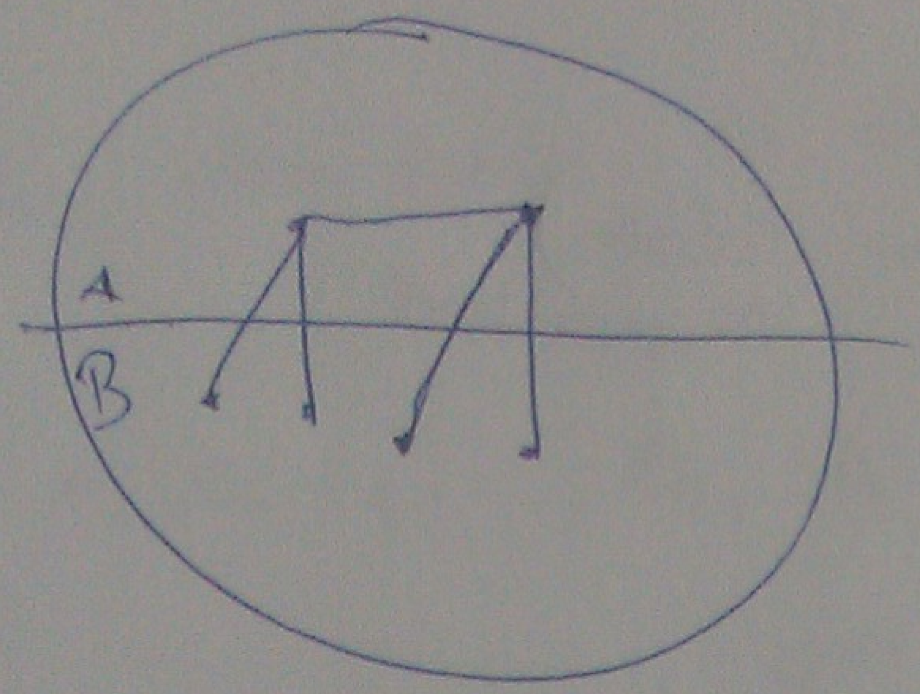


az élek fele (legalább) keresztbe megy → 2-appr.

legfeljebb élszámnyi lépés, mert minden átpakolásnál nő a keresztbe menő élek száma

más: pontonként rakjuk be, oda ahova kevesebb szomszédja van

ez is polinomiális



Adott $S=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ és $H=\{S_1,S_2,\dots,S_r\} \subseteq S$ részhalmazai

alaphalmaz

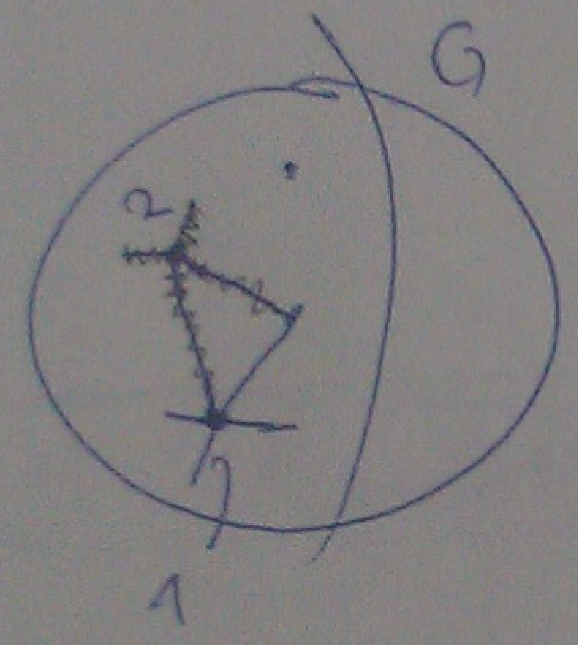
$$\bigcup_{i=1}^{r} S_i = S$$

minden halmazhoz egy költség: $c: H \Rightarrow \mathbb{Q}^+$ ← poz. racionális

Fedjük le az alaphalmazt

Feladat: min összköltségű fedés

NP-nehéz → állítás, mert a min lefogó ponthalmaz spec esete



$S := E(G)$

$S_1 :=$ 1-es csúcsból kifutó élek

$S_2 :=$ 2-es ...

⋮

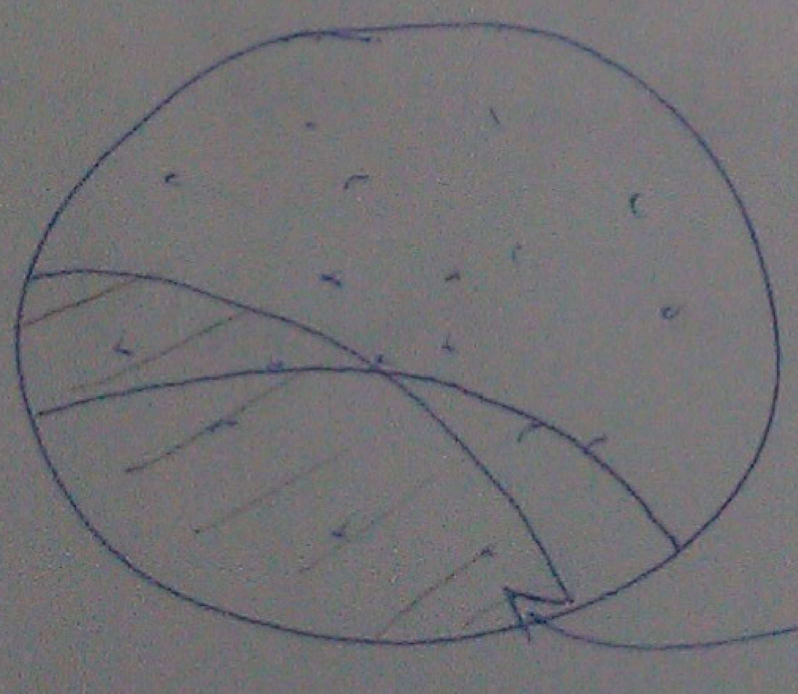
$c(S_i) := 1$

$(\ln n)$-approximációs   n: alaphalmaz elemszáma $|S|$

$\frac{c(S_i)}{|S_i|}$ a lehető legkisebb legyen, ilyet válasszunk

↓ helyett

$$\frac{c(S_i)}{|S_i \setminus U|}$$



U: már lefogott elemek halmaza

$\frac{c(S_i)}{|S_i \setminus U|}$ minimális legyen, azt választom S_i

U-t frissítem, aztán folyt. amíg le nem fedem S-t

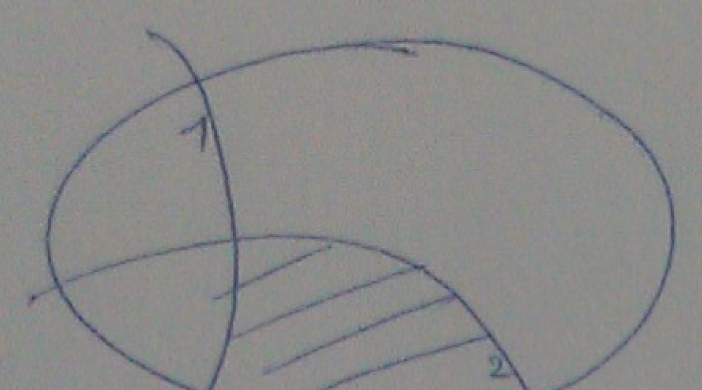
→ pillanatnyi átlagos költség
aktuális

Áll: ez ln n-approximáció

Def: elem ára: az őt (elsőként) fedő halmaz aktuális átl. költsége

$e_1, e_2, e_3, \dots, e_k, \dots e_n$ fedési sorrend

Lemma: e_k ára $\le \frac{OPT}{n-k+1}$ $\Rightarrow$ (approx. faktor)



$\Downarrow$

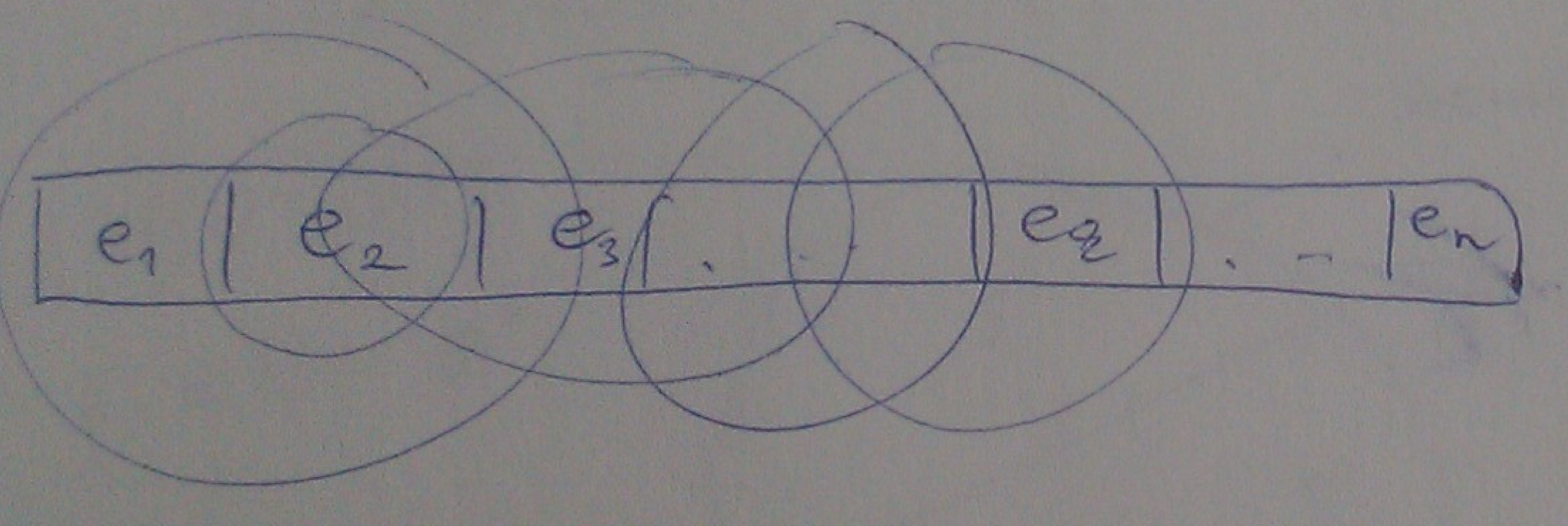
teljes költség $\le \sum_{k=1}^{n} \frac{OPT}{n-k+1} =$

$$= OPT \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = OPT \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$$

$$= OPT \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)}_{\ln n + 1}$$

$e_1, e_2, \dots, \underbrace{e_k, e_{k+1}, \dots e_n}_{\text{fedetlenek, } n-k+1 \text{ db}}$

éppen e_k-t akarjuk fedni



fedjük a maradék elemeket az OPT-hoz tartozó halmazokra

ez OPT költségű lenne $\Rightarrow \exists\ e_j$ $(j \ge k)$ akinek az ára $\le \frac{OPT}{n-k+1}$

$\Rightarrow \exists\ S_t$, akinek az aktuális átlagos költsége $\le \frac{OPT}{n-k+1}$

$\frac{c(S_i)}{|S_i \setminus U|}$ ez egyre nőni fog

időben csökken

ROPI

$$\frac{c(S_i)}{|S_i \setminus U|}$$

approximációs alg.

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$

$S_1 = \{1\}$ $\quad c(S_1) = 1$

$S_2 = \{2\}$ $\quad c(S_2) = \frac{1}{2}$

2. $S_{n-1} = \{n-1\}$ $\quad c(S_{n-1}) = \frac{1}{n-1}$

1. $S_n = \{n\}$ $\quad c(S_n) = \frac{1}{n}$ – ennél kezdjük

$i \leq n$

$c(S_i) = \frac{1}{i}$

eredetben

$S_{n+1} = S$ $\quad c(S_{n+1}) = 1 + \varepsilon \quad \to \quad \frac{1+\varepsilon}{n}$

$OPT = 1 + \varepsilon$

1. elem lefedve

$\frac{1+\varepsilon}{n-1}$ költség miatt S_{n-1}-et választom

Tényleges költség: $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

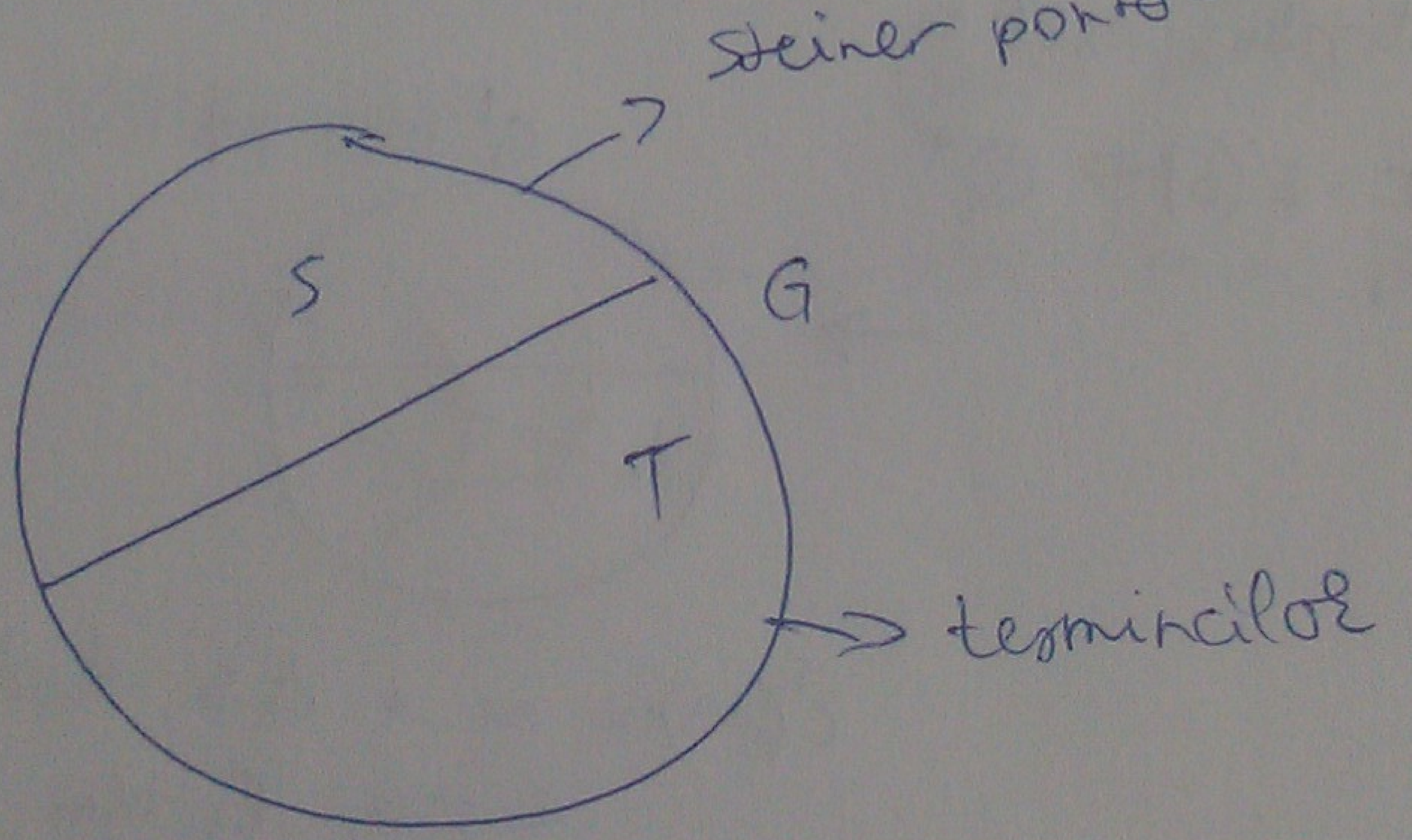
Steiner-fa probléma

adott összefüggő gráf

G öf. gráf csúcshalmaz két diszjunkt halmaz

$V(G) = S \dot\cup T$

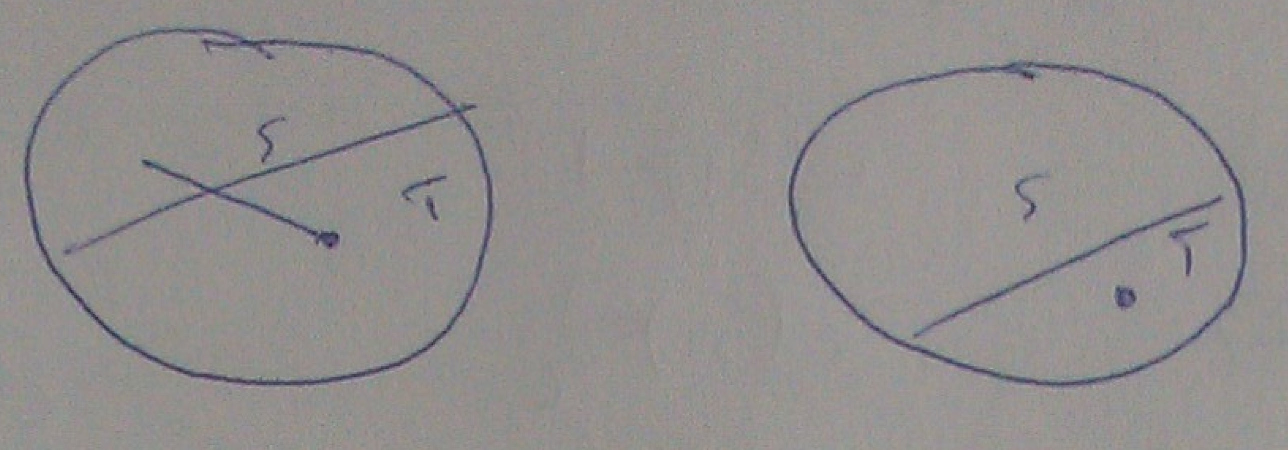
$c: E(G) \to \mathbb{Q}^+$



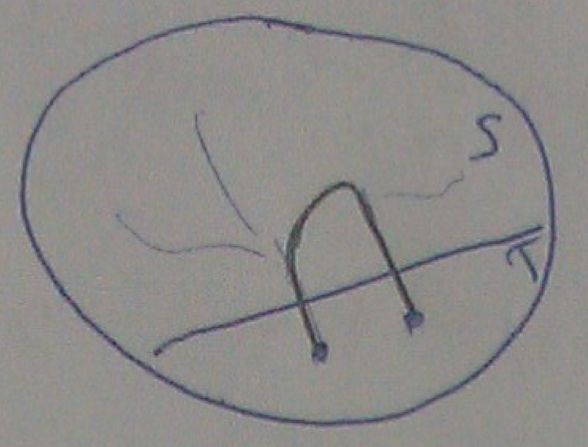
Feladat: min költségű $\underbrace{\text{T minden csúcsát tartalmazó fa}}_{\text{Steiner-fa}}$ megtalálása

Speciális esetek:

1. T-nek egy eleme van



nincs él, 0 költség

2. 

út a két pont között
Dijkstra alg-gal megkereshető
a min. költségű

Ha S üres, akkor Kruskal

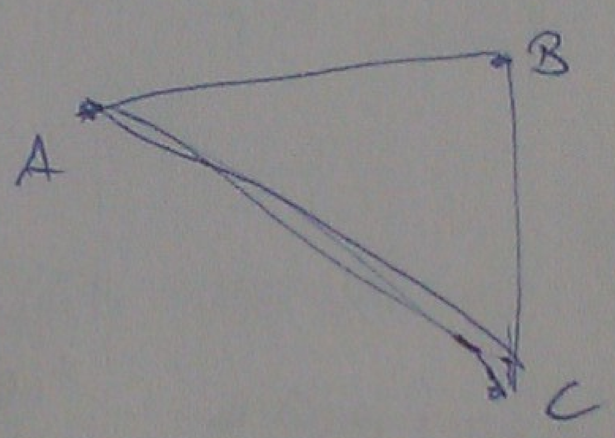
$|T| \leq 2$

$|T| = V(G)$

általában NP-nehéz a probléma, de létezik 2-approximáció:

Metrikus eset: G teljes gráf $V(G) = S \dot{\cup} T$

$c: E(G) \to \mathbb{Q}^+$ teljesíti a Δ-egyenlőtlenséget:

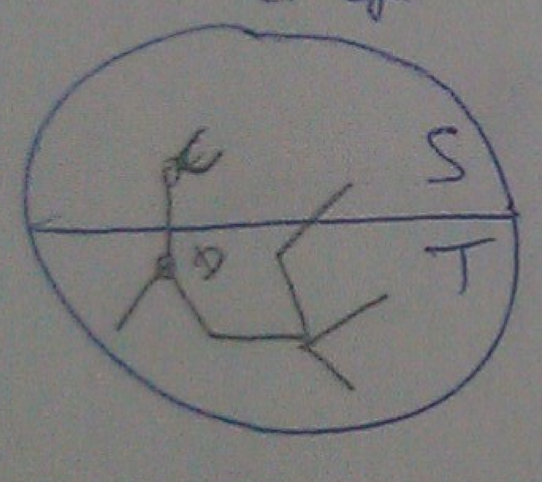


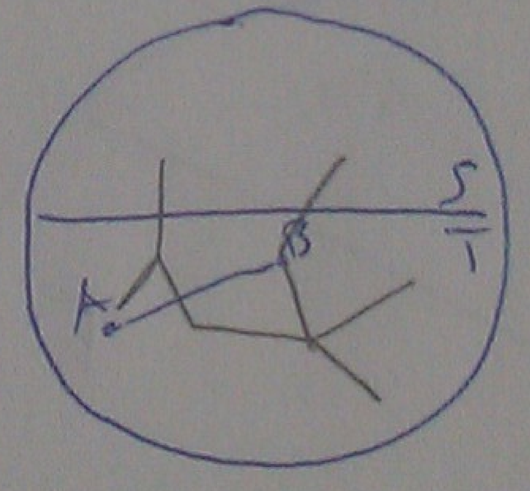
$\forall A, B, C:$

$c(AB) \leq c(AC) + c(BC)$

Általánosabb $\Rightarrow$ metrikus eset:

G gráf $\quad c: E(G) \to \mathbb{Q}^+$ $\quad \to \quad$ G' teljes gráf





OPT'

OPT

$c'(AB) :=$ az A és B közti legrövidebb út hossza G-ben (c szerint)

Áll:

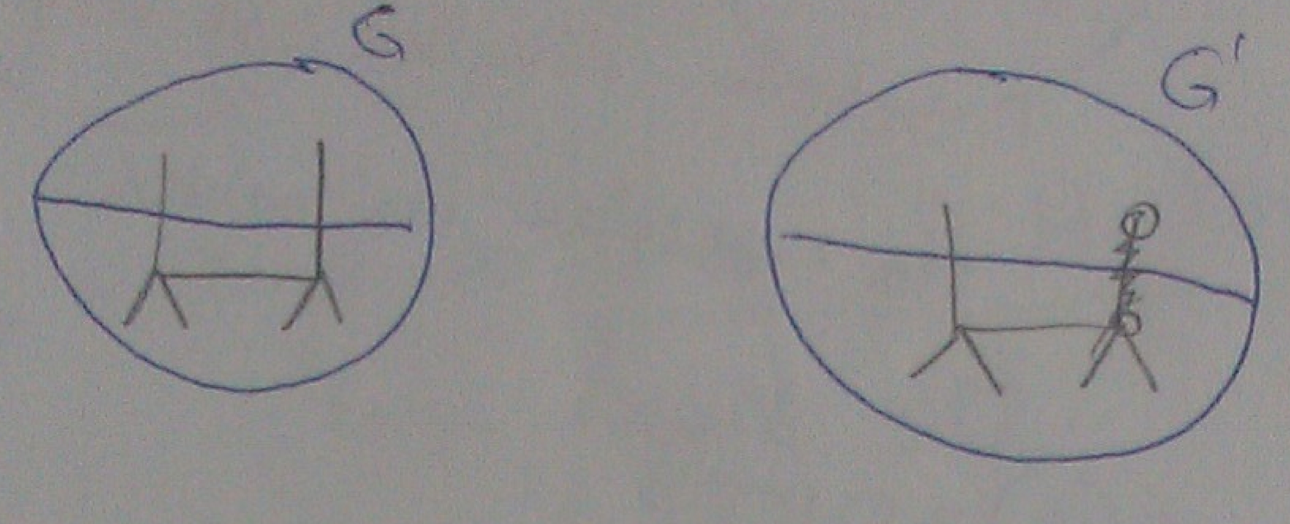
$\exists$ 2-approx. alg. a G'-re $\Rightarrow$ $\exists$ 2-approx. alg. G-re

$\forall e \in E(G): \; c'(e) \leq c(e)$

$\Rightarrow OPT' \leq OPT$

Találunk a G'-ben egy Steiner-fát, amire
↘ T'

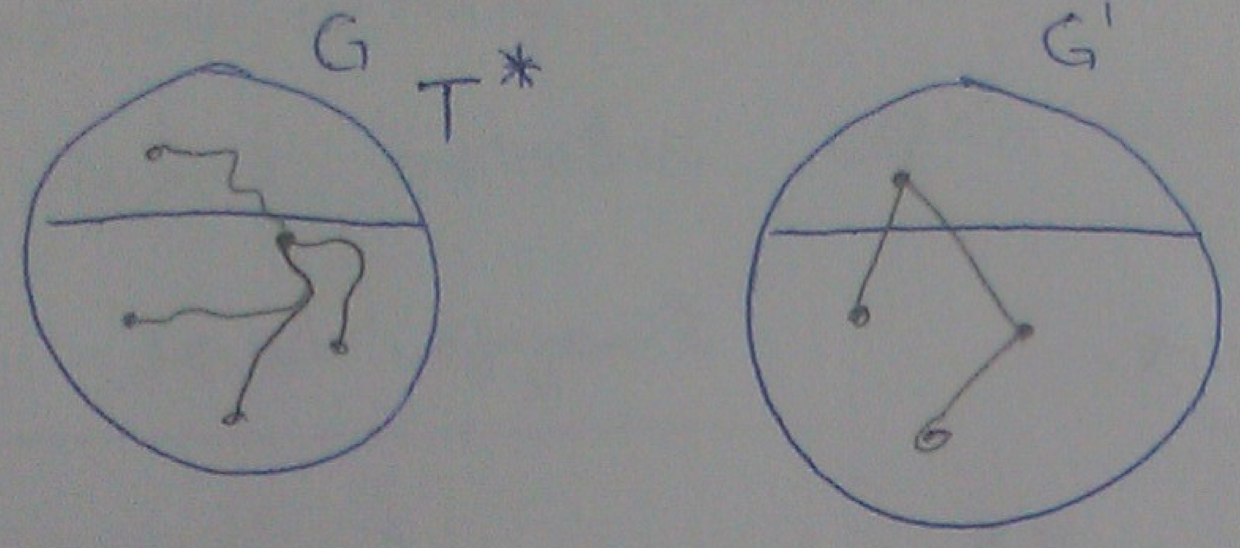
$$c'(T') \le k \cdot OPT' \le k \cdot OPT$$



G' élei nem biztos hogy G-ben is vannak

~~G' mi~~ G'-ben CD legyen egy él T'-ben

G-ben vegyük be a C és D közti legrövidebb utat



$$c(\overline{T^*}) \le c(T^*) = c'(T') \le k \cdot OPT' \le k \cdot OPT$$

T* minden T-belit fed

T* nem biztos, hogy fa

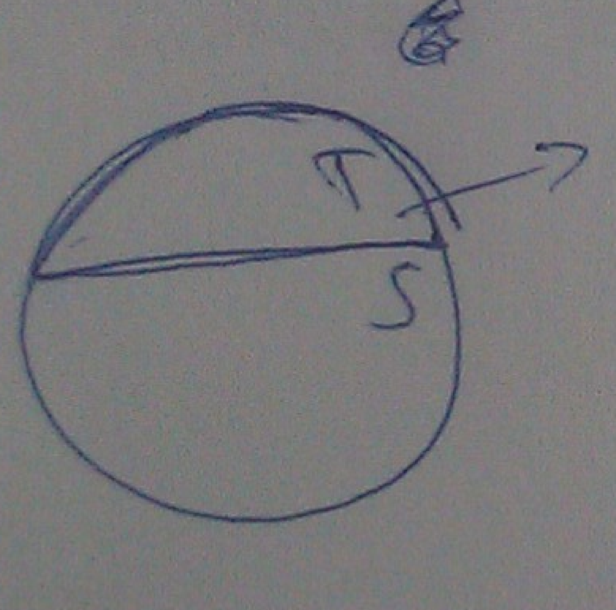
T*-ra min költségű feszítőfát veszek → $\overline{T^*}$

pl. Kruskal alg

ez megy polinom időben

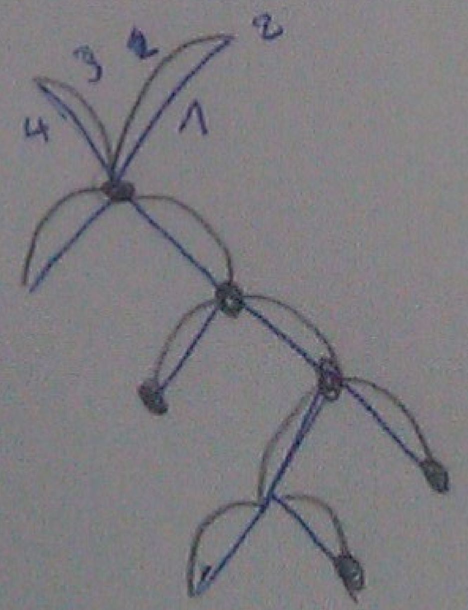
(Steiner-fa tipikus zh példa)

G: keresünk a T-n egy min feszítőfán



Áll.: Ez a 2-approximáció

• T-beli csúcsok

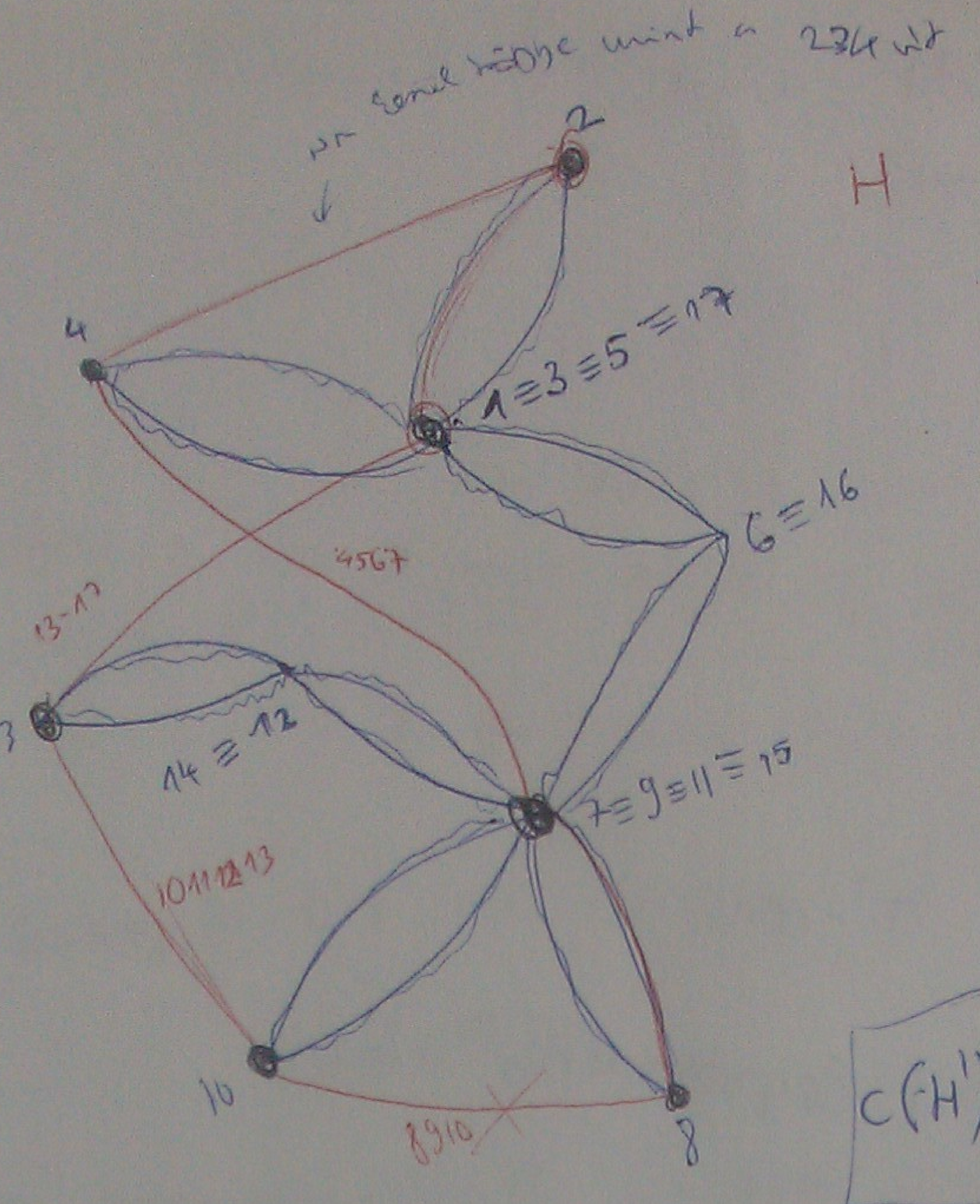


F: opt Steiner-fa

Duplázzuk meg az éleit

→ ∀ csúcs foka páros

→ ∃ Euler-körsétája



H

• T-beli csúcsok

Euler körséta

T-beliekben Hamilton kör = H

nem T-beliekben nem mentem

$c(F) = OPT$

$c(E-ks) = 2\cdot OPT$

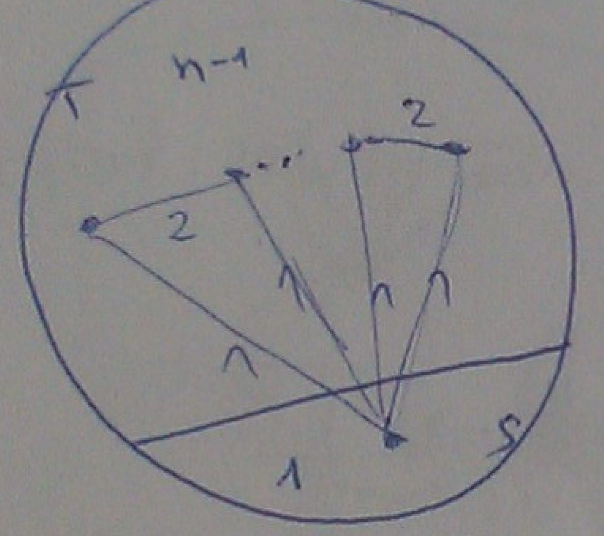
$\boxed{c(H')} \leq c(H) \leq c(E-ks) = \boxed{2\cdot OPT}$

H' : Hamilton út

akár jobbat is adhat? nem!

$k<2$-re nem lesz 2-approx.

n csúcs



OPT: $n-1$

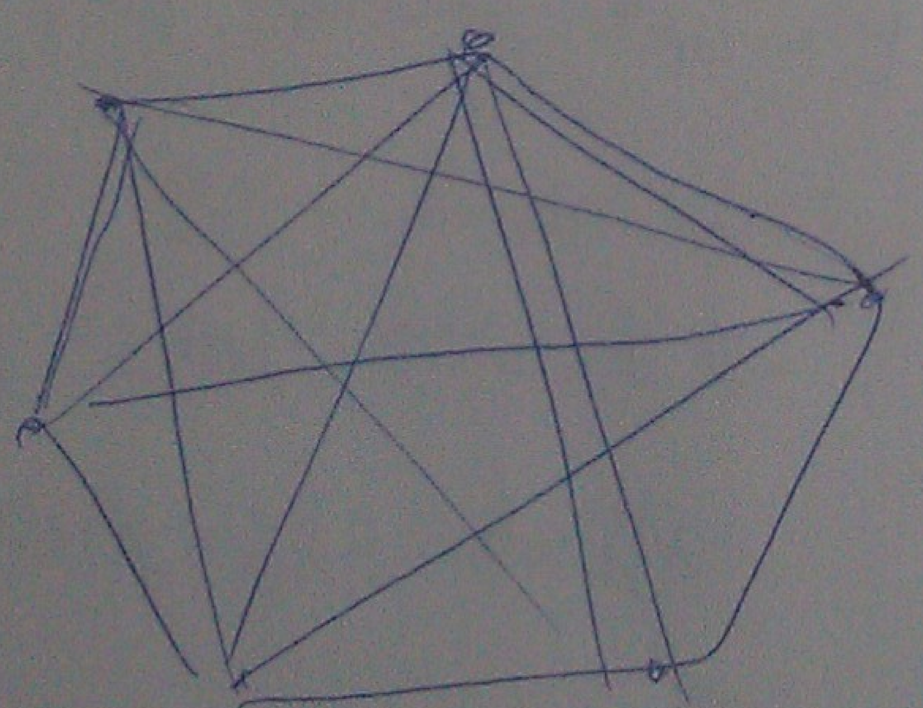
talált: $2\cdot(n-2)$ ~~db él~~

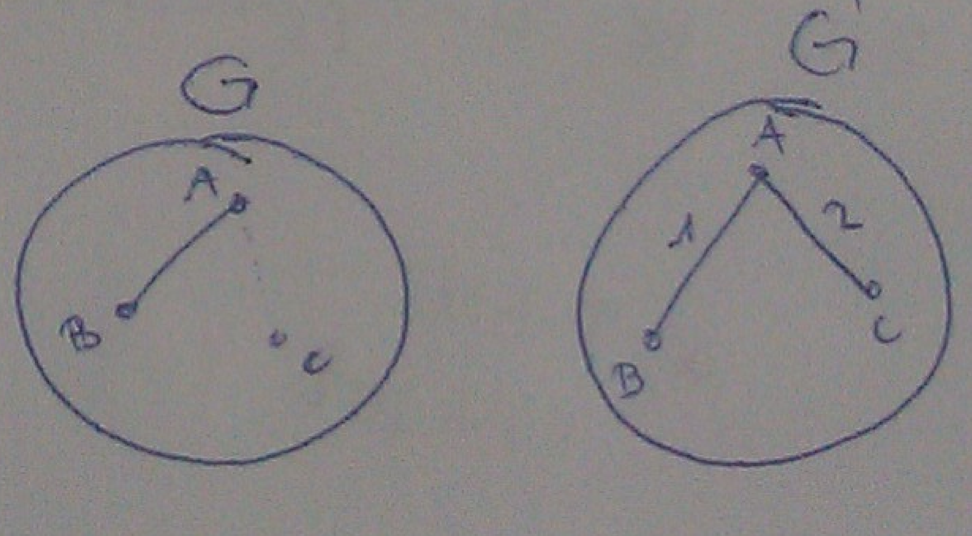
utazó ügynök probléma

G teljes gráf, $c: E(G) \to \mathbb{Q}^+$

Feladat: min. ~~költségű~~ összköltségű Hamilton kör

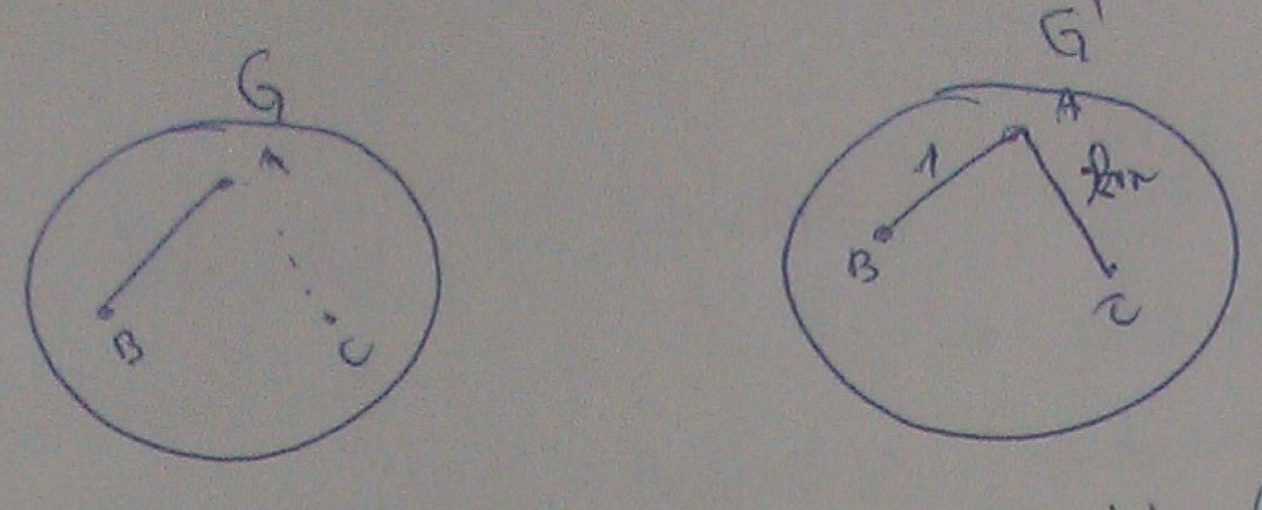
NP-nehéz





n csúcs

Tfh. $\exists$ 2-approx. (valójában nincs)



n csúcs

költség $\leq 2 \cdot n \Rightarrow$ G-ben $\exists$ H-kör

$\Downarrow$ csupa 1-esből áll

költség $> kn \Rightarrow$ G-ben $\nexists$ H-kör, mert nincs G'-ben csupa 1-esből álló kör

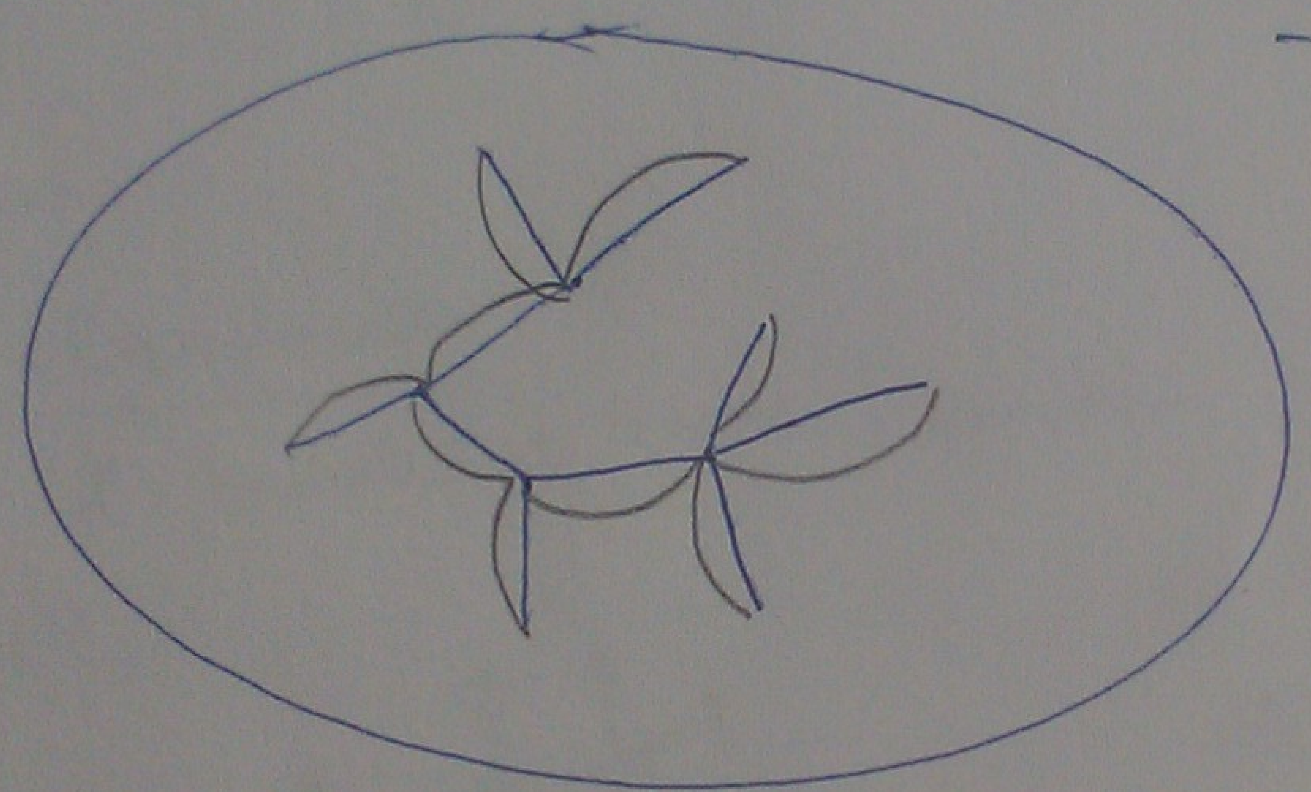
$\Downarrow$ OPT $> n$

nem approximálható (nagyon csúnyán NP-nehéz)

utazó ügynök metrikus esetét lehet approximálni

Metrikus utazó ügynök

2-approximáció



- F
- duplázása éleknek
- $\exists$ Euler-ÉS
- abból H-kör, útlevágással

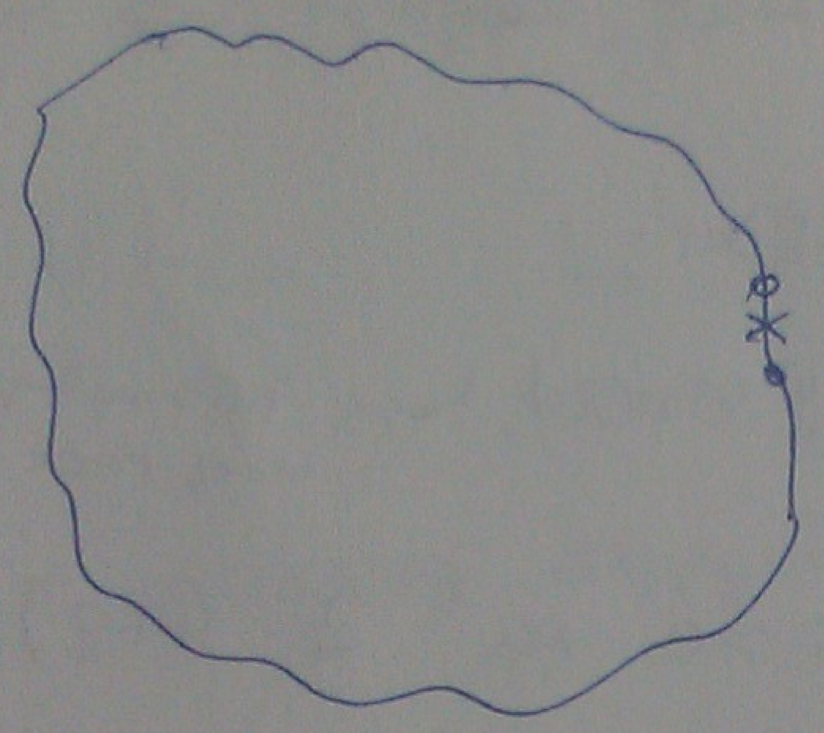
$\rightarrow$ H-kör

min összköltségű feszítőfa = F

Alg:

1. Min. feszítőfa (Kruskal) → ≤ OPT
2. élduplázás → ≤ 2·OPT
3. Euler-körséta keresése → ≤ 2·OPT ← ez 2-approximációs
4. útlevágásokkal E-ks → H-kör
   ≤ 2·OPT (Δ-egyenlőtlenség!)
   polinom időben megy ✓
   ≤ 2·OPT

1.



OPT H-kör

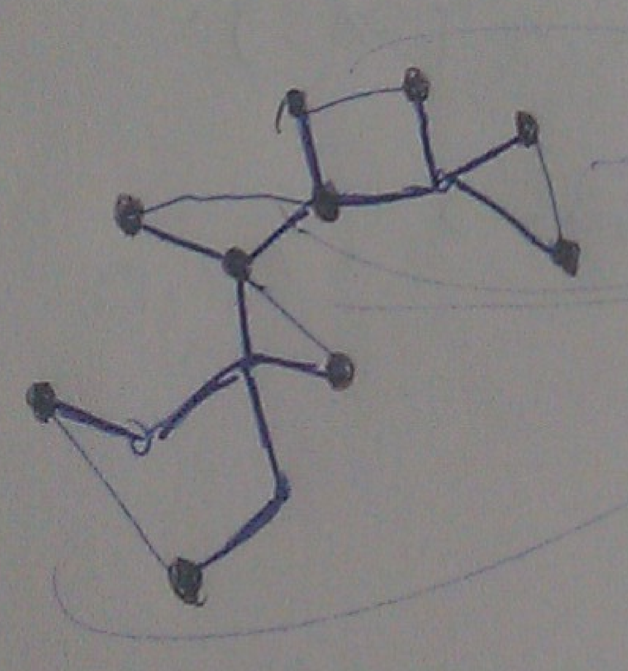
→ Hát maga is feszítőfa
mi a legolcsóbbat egyből találtuk
≤ OPT

ennek a finomítása:

Christofides algoritmusa:

Az élduplázás túl brutális - lehetne finomítani

2'. lépés →

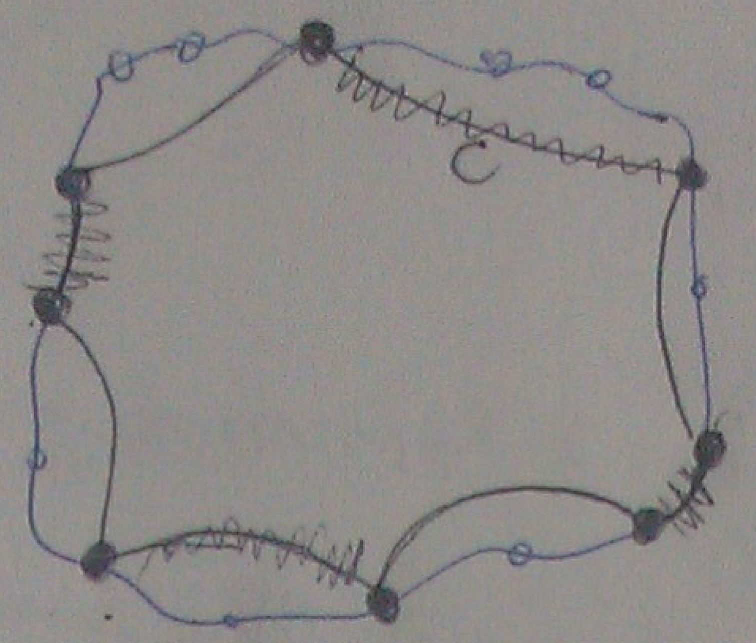


páratlan fokú csúcsok (mindig páros)
éleket adunk hozzá a páratlan csúcsokhoz

Vegyük azt a részgráfot, amit a páratlan fokúak feszítenek
Ebben kéne egy min összsúlyú teljes párosítás
ez megy polinom időben

ennek
Áll: $\frac{3}{2}$-approximáció

Biz: Kéne, hogy a min. összköltségű TP $\leq OPT/2$



OPT H-kör

- a talált feszítőfában a páratlan fokú csúcsok ki tudjuk húzni az éleket mert teljes gráfunk van

C-kör költsége $\leq$ OPT H-kör

$\uparrow$

~~~ : teljes párosítás

⌒ : az is TP

a kettő közül valamelyik költsége $\leq OPT/2$

van ilyen párosítás, és amit megtaláltunk annak költsége $\leq \frac{OPT}{2}$

ez köbös alg. $\rightarrow$ létezik-e jobb közelítés

(olyan alg. sorozat, hogy bármilyen közelítést meg tud valósítani)

Def: Polinomiális approximációs séma

Egy probléma PAS-val közelíthető, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists$ $(1+\varepsilon)$-approximáció.

(metrikus utazó ügynökre nincs, de az euklideszire van)

de gyakorlatban heurisztikákkal csinálják (nem kell)

Def: Teljesen polinomiális approximációs séma (TPAS):

az $(1+\varepsilon)$-approx. $\frac{1}{\varepsilon}$-ban is polinomiális

---

Részösszeg probléma:

Input: $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^+$

$t \in \mathbb{Z}^+$ (korlát)

tudunk-e találni olyan összeget, ami éppen t

$\exists$-e: $I \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$

$\sum_{i \in I} a_i = t$?

$\rightarrow$ NP-teljes eldöntési probléma

hogy lehet opt. problémára
~~~

Optimalizálási verzió:

keressük azt a I-t, amire

$$\sum_{i\in I} a_i \le t \quad \text{és} \quad \left(t - \sum_{i\in I} a_i\right) \text{ minimális}$$

Egy pontos megoldás: (exp. idejű)

$L_0 = \{0\}$ $\quad L_1 = \{0, a_1\} \xrightarrow[\text{eltolás}]{a_2\text{-vel való}} L_1' = \{a_2, a_1+a_2\}$ rendezett

a 0 az üres részösszegnek felel meg

$L_2 = \{$ L_1 és L_1' összefésülése : $\{0, a_1, a_2, a_1+a_2\}$

a_3-mal eltolt

$L_2' = \{a_3, a_1+a_3, a_2+a_3, a_1+a_2+a_3\}$

$L_i := L_{i-1} \cup L'_{i-1}$ $\quad L_i' := L_i$ eltoltja az a_{i+1}-gyel

$\vdots$

L_n-ben $\forall$ részösszeg szerepelni fog

t-től nagyobb elemeket kitörölhetem a listákból

L_n legnagyobb eleme lesz a válasz $\to$ OPT

a listák mérete nagy, ez a baj

Listák ritkítása

δ -szám

L_i

$\le t$

$0, 1, 3, 6, 10, \cancel{11}, 12, \cancel{13}, 18, 20, \cancel{21}, \cancel{22}, 30$

$\delta = 0{,}1$

x, y $\quad x \le y$

ha $(1+\delta)x \ge y$, akkor x képviseli y-t és y-t törlöm

$10 \cdot 1{,}1 \ge 11$

$12 \cdot 1{,}1 \ge 13$

mindebből leomer a listák

$\ldots, x, y, \ldots$ $\quad x, y$ aránya $\ge 1+\delta$

lista hossza: $\le \log_{1+\delta} t + 2$

0 és 1 miatt

δ 0 és 1 között érne

$\delta := \frac{\varepsilon}{2n}$ n : számok db-száma

$\varepsilon \le 1$

kitevőosztályok:

$\le \log_{1+\delta} t + 2$

$\forall$ oszt $\le \log_{(1+\frac{\varepsilon}{2n})} t + 2$

$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{lemma:}\quad x > 0 \\ \ln(1+x) \ge \frac{x}{1+x}\end{array}}$

Biz: $x = 0 \to$ mindkét oldal 0

$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ $x>0$-ra monoton nő

deriváljuk

$\left(\ln(1+x) - \frac{\overset{f}{x}}{\underset{g}{1+x}}\right)' = \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} =$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

$f(x) = x$

$g(x) = 1 + x$

$= \boxed{\frac{1}{1+x}} - \frac{1}{(1+x)^2} > 0$

$\log_{(1+\frac{\varepsilon}{2n})} t = \frac{\ln t}{\ln(1+\frac{\varepsilon}{2n})} \le \frac{\ln t}{\frac{\frac{\varepsilon}{2n}}{1+\frac{\varepsilon}{2n}}} = \left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right) 2n \frac{\ln t}{\varepsilon}$

↖ polinomiális $\frac{1}{\varepsilon}$-nal is

$x = \frac{\varepsilon}{2n}$

$\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right) \ge \frac{\frac{\varepsilon}{2n}}{1+\frac{\varepsilon}{2n}}$

olyan megoldás kéne: $\ge \frac{OPT}{1+\varepsilon}$

olyan megoldás kell $\cdot \geq \frac{OPT}{1+\varepsilon}$

$S_I := \sum_{i \in I} a_i$

$S_I \longrightarrow S_J : \ S_J \geq \frac{S_I}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right)^n}$ indukcióval lehet bizonyítani

$a_2 + a_5 + a_{10} \quad < t$

$L_0, L_1 -$

$L_2 : a_2$ $\quad$ a_2 eltűnhet

$\geq \frac{a_2}{1+\frac{\varepsilon}{2n}}$ $\quad$ minden listarészüléskor ritkítás

$L_3 : \geq \frac{a_2}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right)^2}$

$L_4 : \quad \frac{a_2}{(\ )^3}$ $\qquad$ $L_5 : \frac{a_2}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right)^4} + a_5$

$\vdots$

$OPT \rightarrow \quad \geq \frac{OPT}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right)^n} \geq \frac{OPT}{1+\varepsilon}$

kell:

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right)^n \leq 1+\varepsilon$$

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right)^n \underset{\text{binom tétel}}{=} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{2n}\right)^i \cdot 1^{n-i} \cdot \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{2n}\right)^i \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} \leq$$

$$\leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{2n}\right)^i \cdot n^i = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^i = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3}{8} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{2^n} \leq$$

$$\leq 1 + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n}}_{\text{mértani sor}} \leq 1+\varepsilon$$

ütemezési problémák:

$J_1, J_2, \ldots, J_n$ munkák (job)

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ megmunkálási idő (processing time)

$w_1, w_2, \ldots, w_n$ súly (weight)

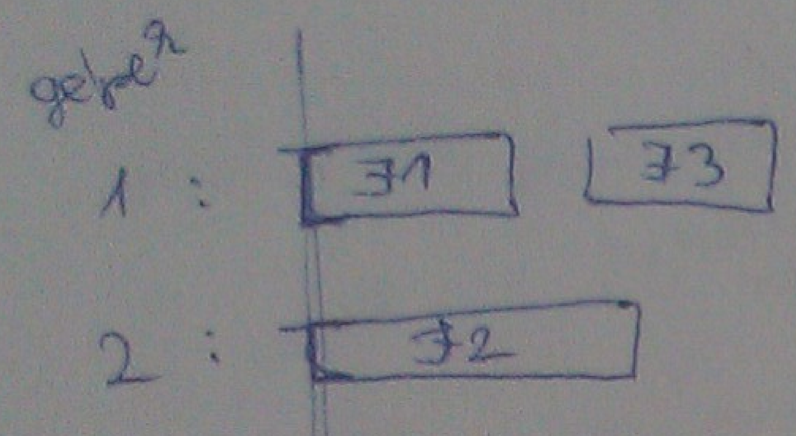
$d_1, d_2, \ldots, d_n$ határidő (due date)

$r_1, r_2, \ldots, r_n$ rendelkezésre állási idő (release time)

$C_1, C_2 \ldots C_n$ befejezési idő (completion time)

gépek (machines)

1 gép egyszerre 1 munka,
1 gép ha elkezd valamit befejezi
1 munka egyszerre 1 gépen



← ütemezés

párhuzamos gépek: ugyanolyan erősek

célfüggvény:

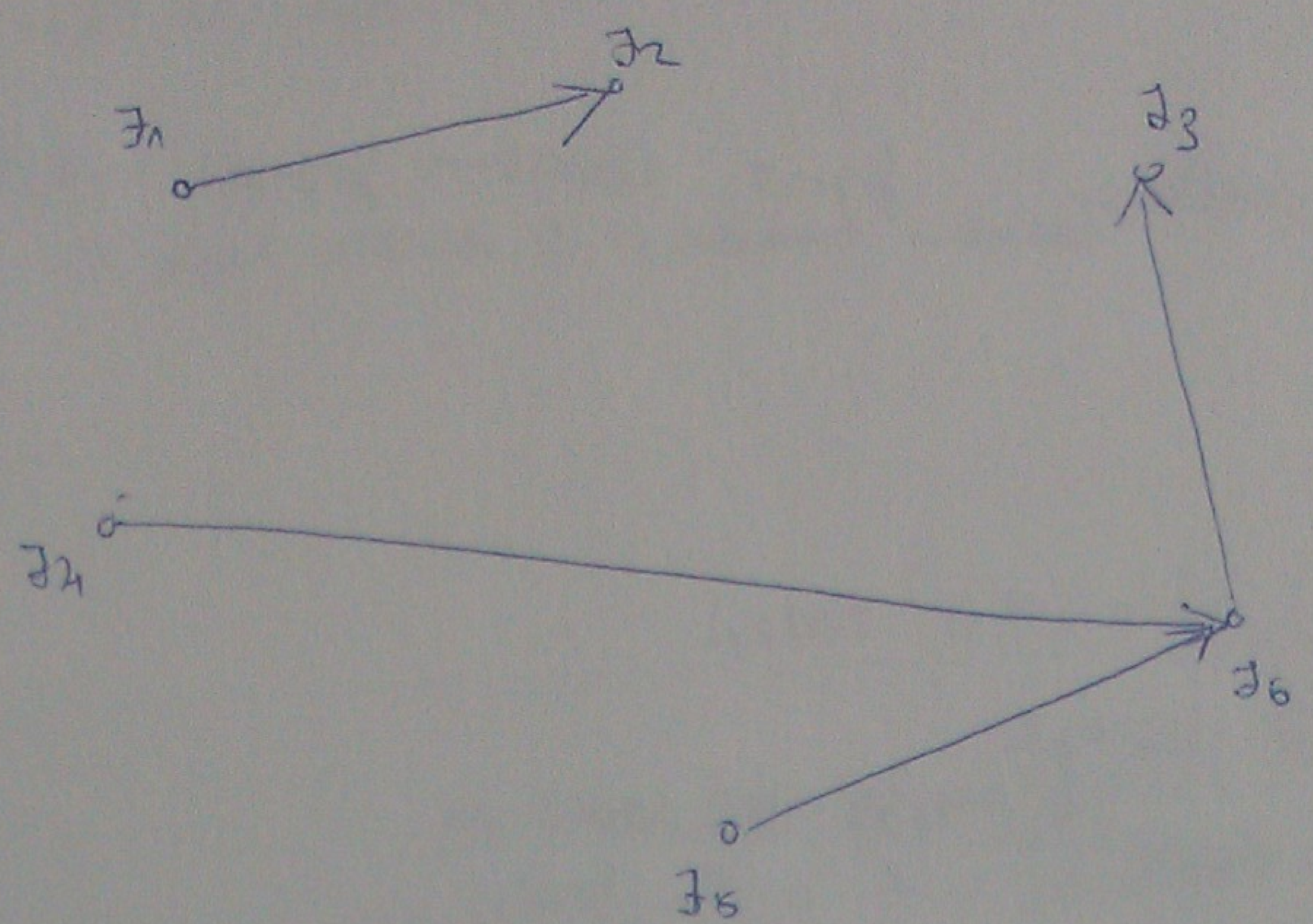
pl: a $\max C_i$ teljes átfutási idő (makespan) ezt minimalizálni akarjuk

$\sum C_i \sim \frac{\sum C_i}{n}$ átlagos befejezési idő

↑ konstans

Ütemezés

sorrend – irányított gráf, irányított kört nem szabad – .



aciklikus ir. gráf → megelőzési feltételek

precedenciagráf

Jelölés – 3 paraméter

gépek | megelőzési infók | függvény

P3 | r_j, prec | C_{max}

r_j: rendelkezésre állás; prec: precedencia gráf

C_{max} teljes átfutási idő

ΣC_i

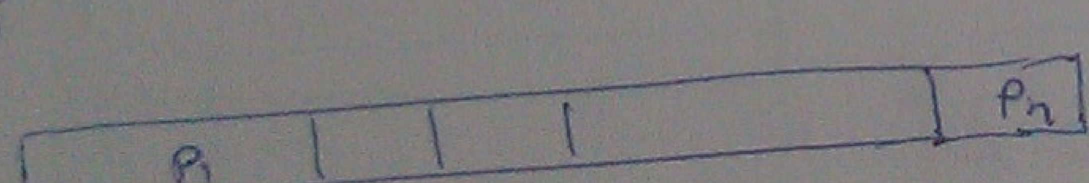
← legegyszerűbb

$1 || C_{max}$

1: egy gép; C_{max}: fgv

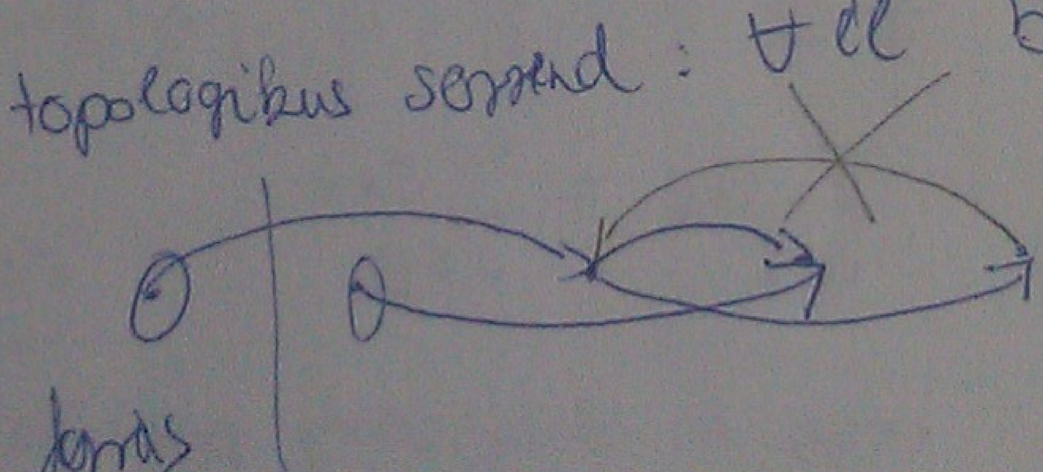
megmunkálási idő mindig adott

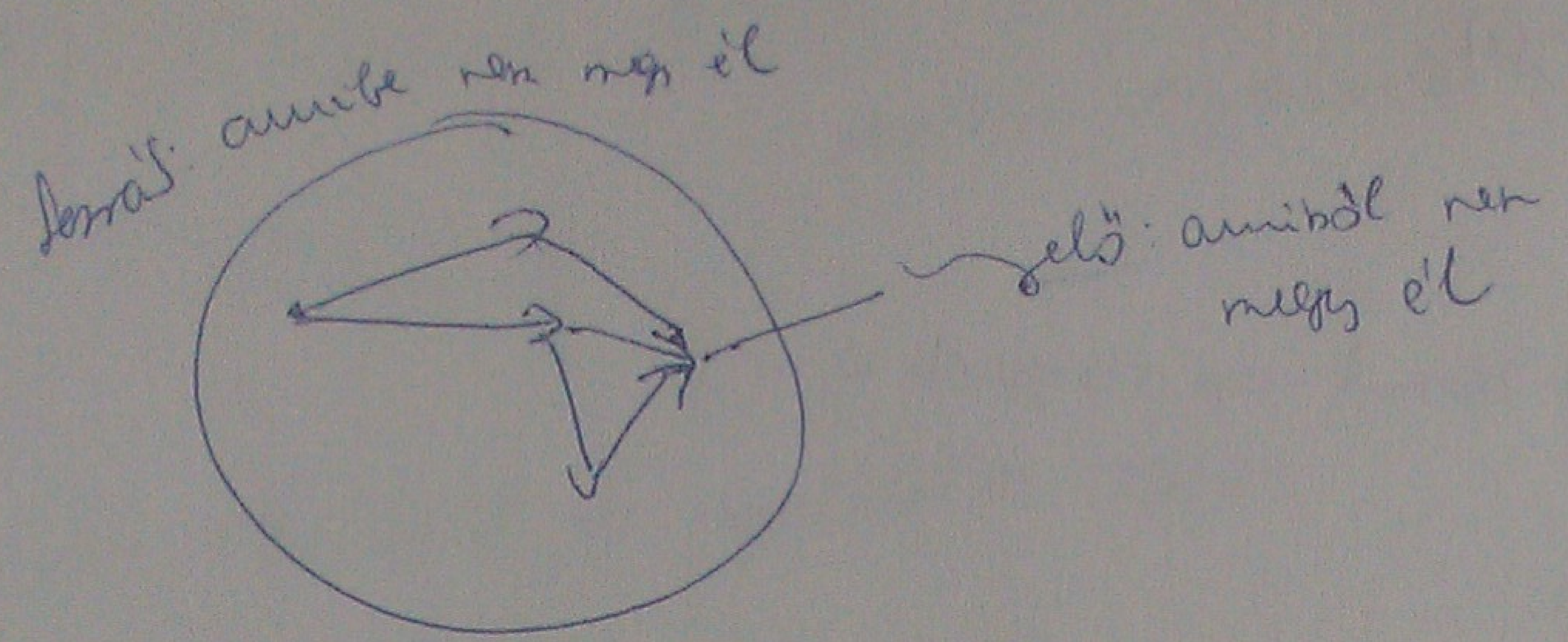
$$C_{max} = \sum_{i=1}^{n} p_i$$



$1 | prec | C_{max}$

topologikus sorrend: ∀ él balról jobbra megy





topologikus sorrend megtalálása: forrás, levágom, forrás megkeresése...

~~emeletes mód~~
emeletekre bontás

$1||\sum C_i$ — befejezési idők összege
a rövidebbekkel kel kezdeni

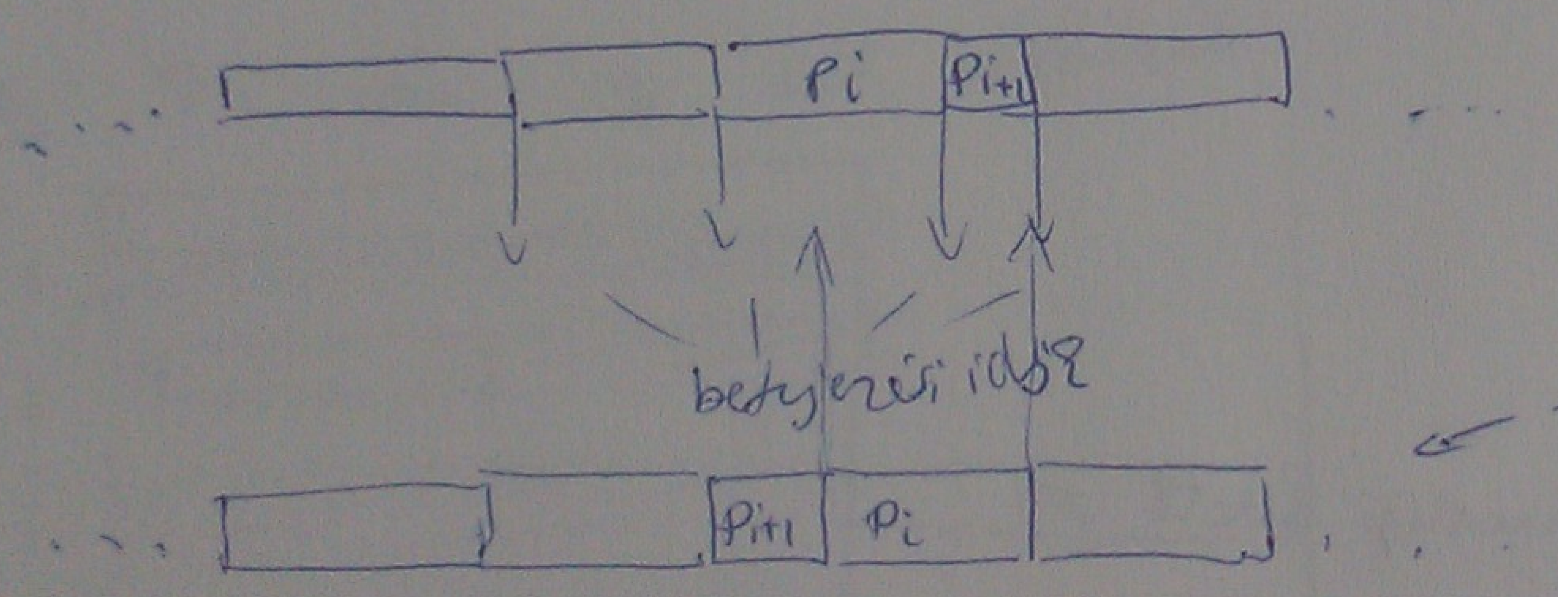
Shortest processing time – SPT

Állítás: SPT optimális az $1||\sum C_i$-re

Biz: Indirekt,

$p_1, p_2, \dots, p_n$ Tfh ez az opt. sorrend, ami nem SPT

$\exists i : p_i > p_{i+1}$ ← rossz sorrend az SPT szerint



← ez jobb $\sum C_i$-re nézve
⇓ → ellent.

$P2||C_{max}$ ← NP-nehéz

$p_1, p_2, \dots p_n$

$OPT = \frac{\sum p_i}{2}$

⇕

$\exists$ jó partíció

$p_1, p_2, \dots, p_n$-re

PARTÍCIÓ probléma

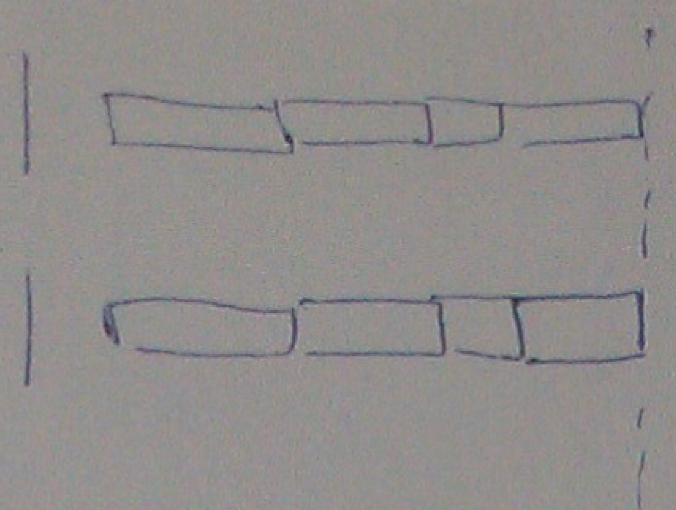
$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$

Két részre bontás, h. a két rész összege egyenlő

$\exists$-e $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$$

vagy a részösszeg probléma

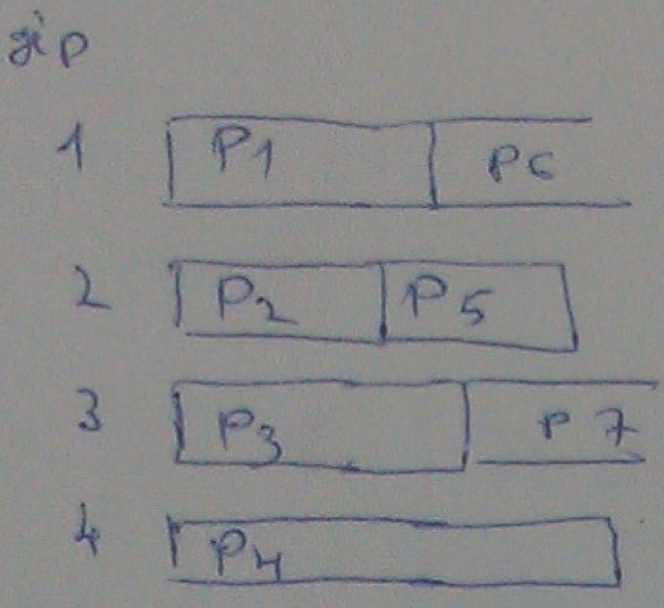


egyszerre végeznek

approx. alg kell v. speciális eset

$P||C_{max}$ a gépek száma is a bemenet része $C_{max} \ge \max p_i$

$p_1, p_2, \dots, p_n$



Listás ütemezés (List scheduling - LS)

Graham-féle

ha egy gép felszabadul, odaadjuk a köv feladatot

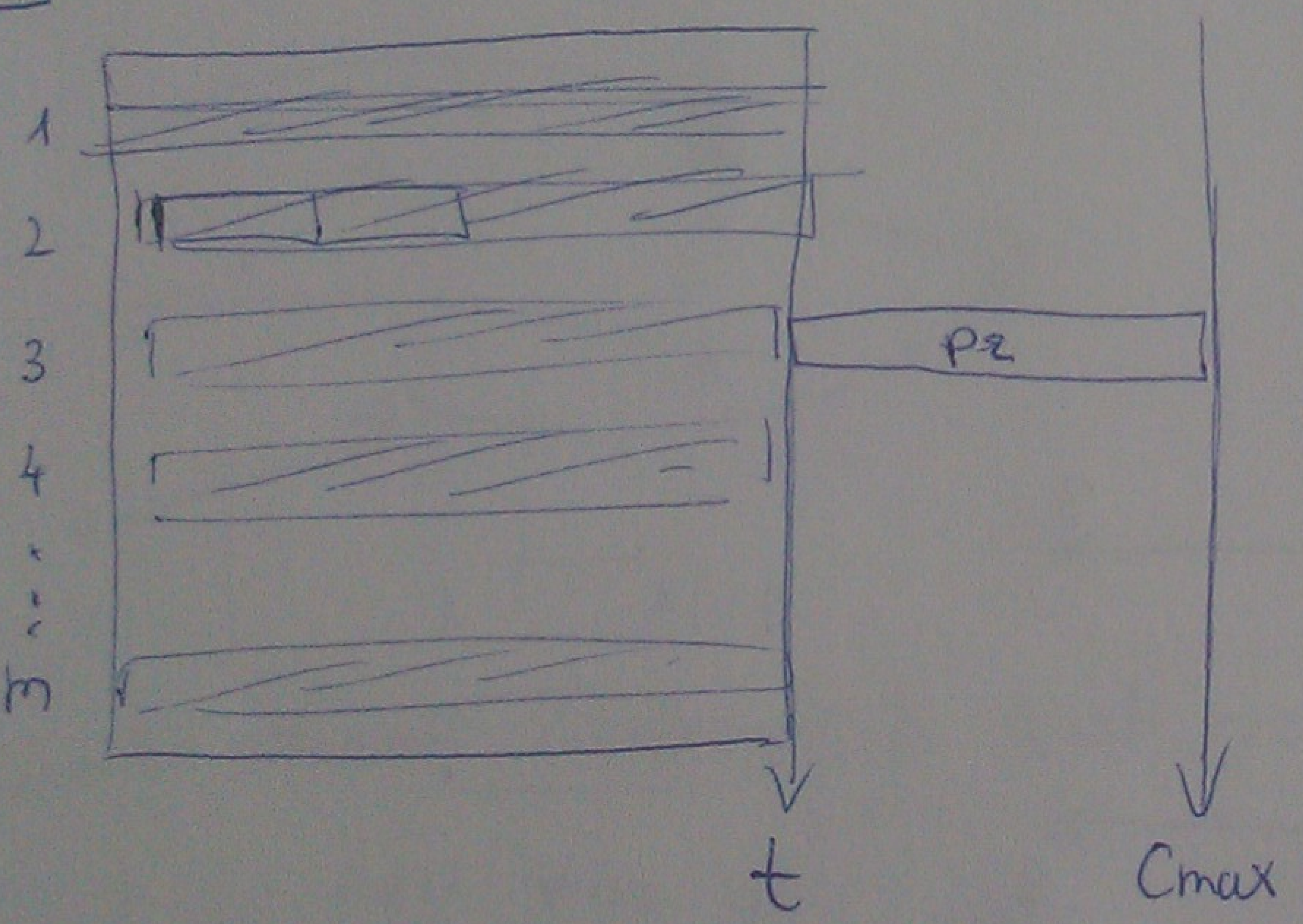
Áll: m db gép esetén LS $\left(2-\frac{1}{m}\right)$-approximáció

Áll:

1) $C^*_{max} \ge \max p_i$

2) $C^*_{max} \ge \frac{\sum p_i}{m}$

Biz: Tfh van egy LS ütemezés



J_k: utolsónak befejeződő munka p_k

t: amikor elkezdjük J_k-t

$C_{max} = t + p_k$

Áll: A t időpillanatig $\forall$ gép végig dolgozik

$\Downarrow$

$m \cdot t \le \sum_{i \ne k} p_i$

$\Rightarrow t \le \frac{\sum_{i \neq k} p_i}{m}$

$$C_{max} = t + p_k \le \frac{\sum_{i \neq k} p_i}{m} + p_k = \frac{\sum p_i}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) p_k \le$$

$$\le \underset{2)}{C^*_{max}} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \underset{1)}{C^*_{max}} = \left(2 - \frac{1}{m}\right) C^*_{max}$$

□

$C_{max} = t + p_k$ $\qquad\qquad \left(1 - \frac{1}{m}\right) p_k$

p_k kicsi legyen

$p_1 \ge p_2 \ge \dots \ge p_n$ $\qquad$ Longest processing time (LPT)

Áll: LPT listás ütemezés $\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3m}\right)$-approx

LS nem mindig jó: két db 1-es munka: 1,1

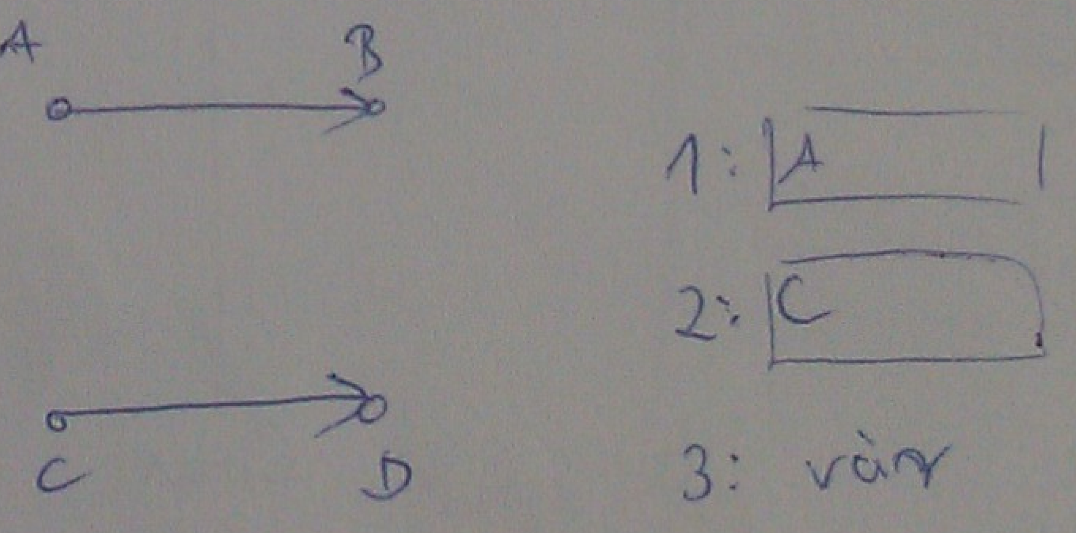
10-es seb.	1: 1	$\frac{1}{10}$ időegység	$C_{max} = 1$
1-es seb.	2: 1	1 -"-	ha mindkettőt az 1-esre $\Rightarrow C_{max} = \frac{1}{5}$

megelőzési feltételek is vannak

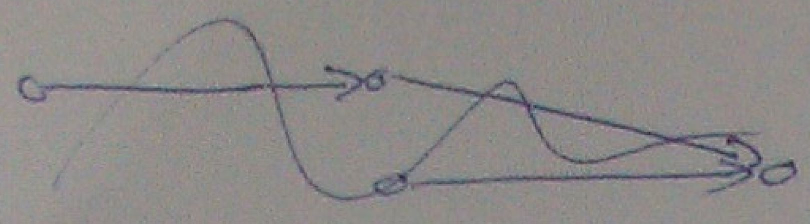
$P \mid prec \mid C_{max}$

LS itt: $p_1, p_2, \dots, p_n$

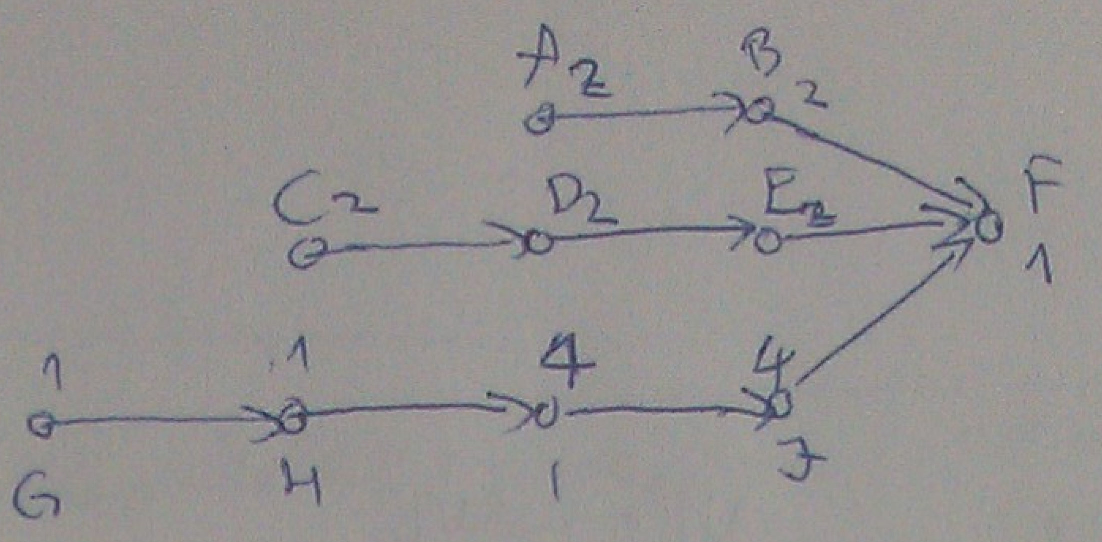
legkisebb sorszámú munkát adjuk a felszabaduló gépnek, azok közül amik elérhetőek



Ez is $\left(2 - \frac{1}{m}\right)$-approx



2 gép



LPT

	2	2	2		9	
1:	A	B	E	I	J	F
2:	C	D	G H			

→ 15 időegység

	2	4	4	1
1	G H	I	J	F
2	C	A D	B E	

→ 11 időegység

$\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3m}\right)$ nem tudja

LPT

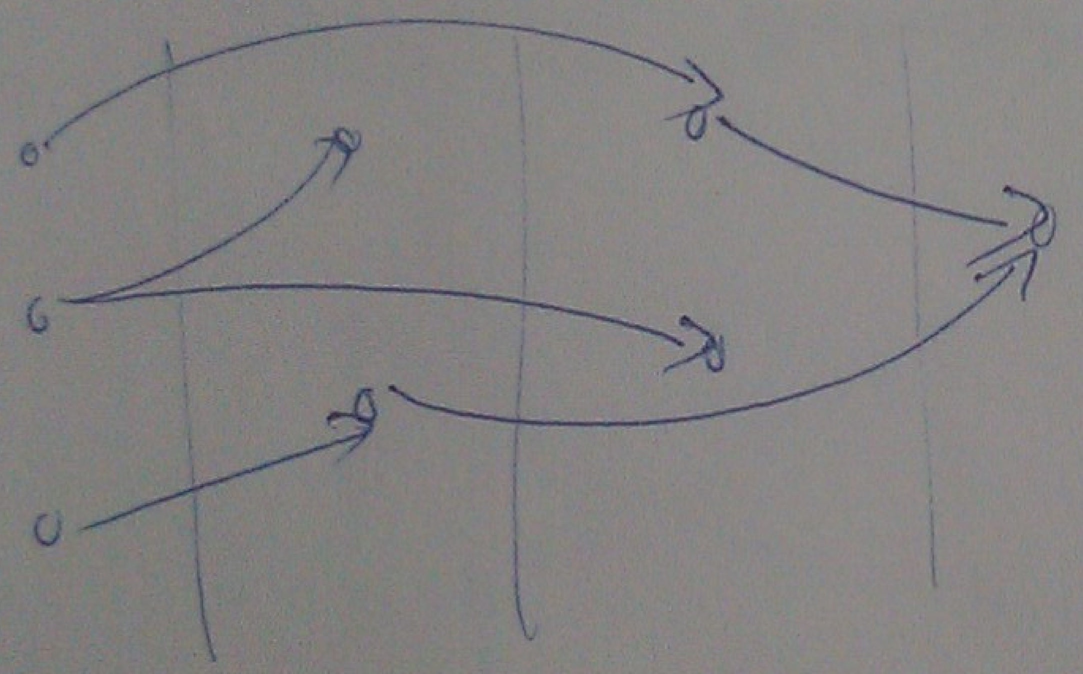
$2 - \frac{1}{m}$ tudja

pont szintje: belőle kivezető leghosszabb ir. út hossza

↓

ezszerint csökkenő sorrend

emeletekre bontás



szintek szerinti ütemezés is lehet rossz

A 0 10

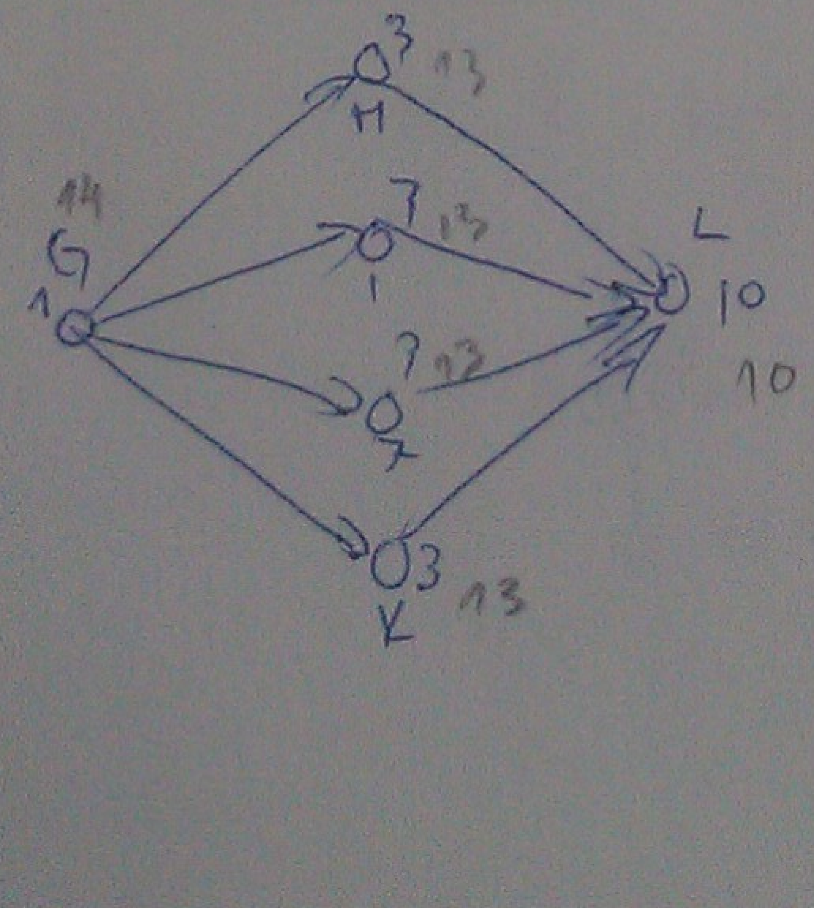
B 0 10

C 0 10

D 0 1

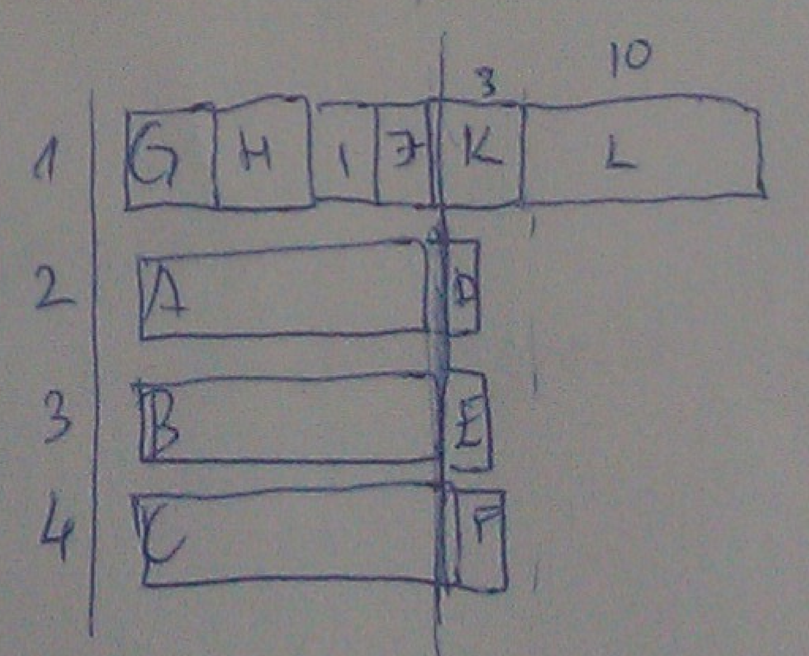
E 0 1

F 0 1



4 gép

szint



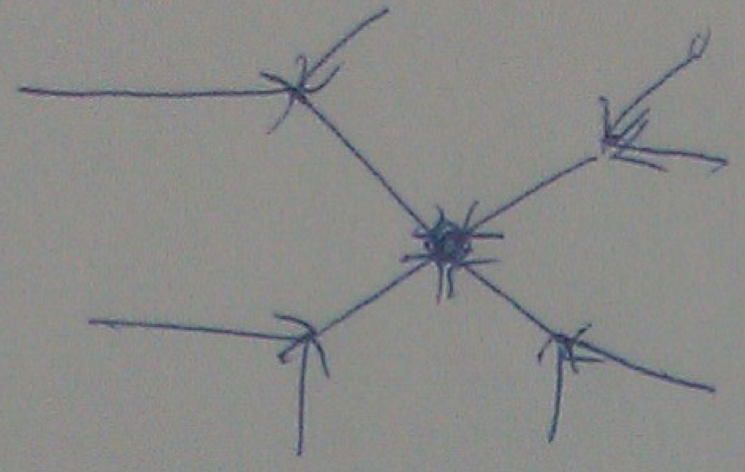
→ 23

		1	3	10
1		G	H	A
2		D	I	B
3		E	J	C
4		F	K	L

→ 14

$P \mid prec, p_i = 1 \mid C_{max}$ NP-nehéz

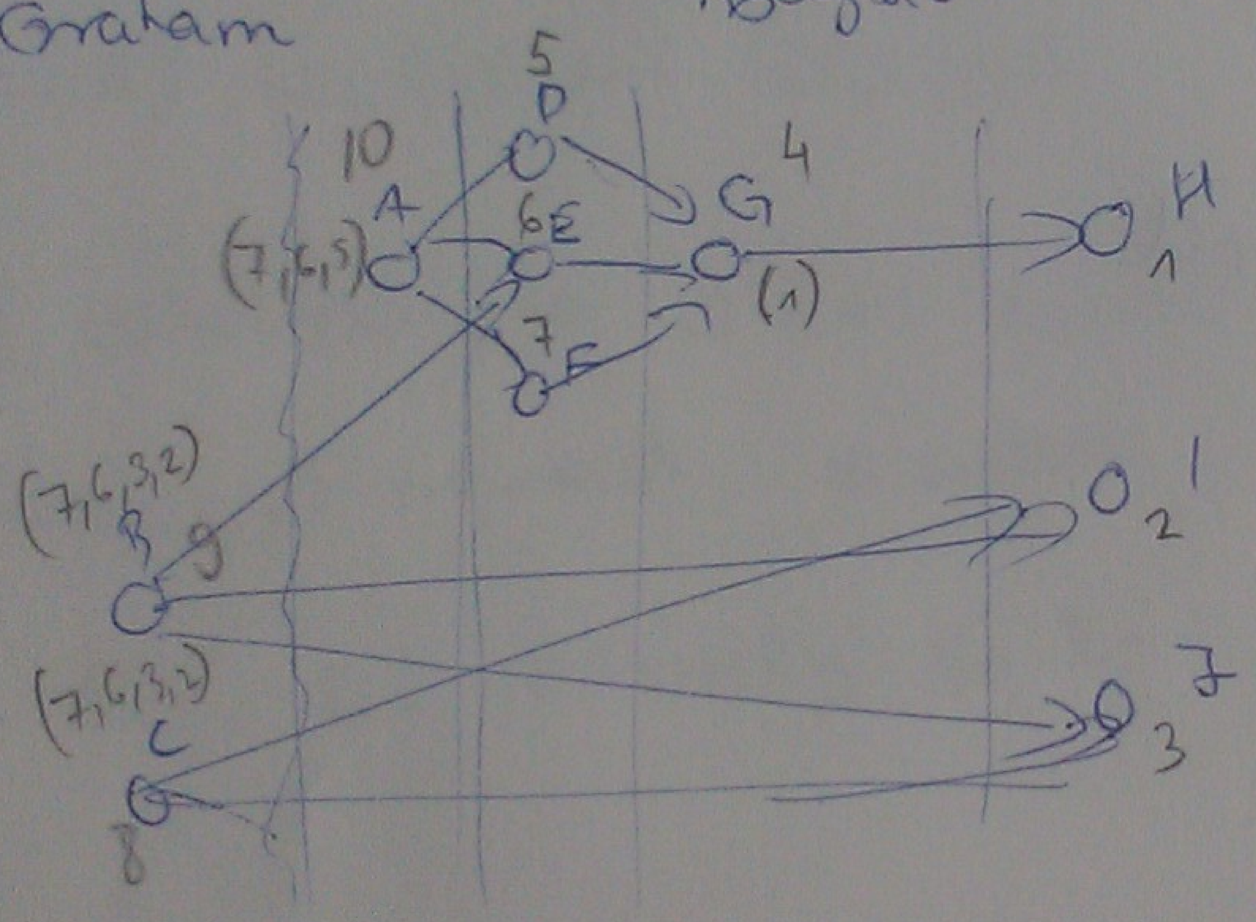
1. spec. eset: prec gráf be-fenyő
in-tree



Hu algoritmusa: (OPT) polinom idejű
erre a spec. esetre a szintszám szerinti
sorrend ütemezés

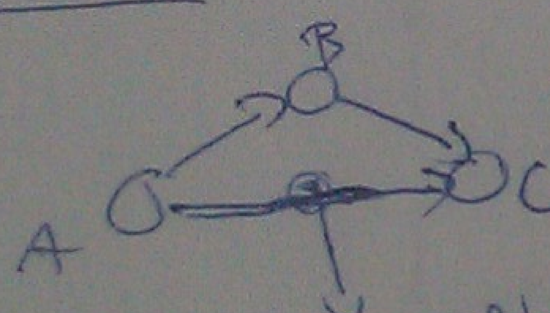
$P2 \mid prec; p_i = 1 \mid C_{max}$

Coffman-Graham könyvben benne van



~ optimális
lexikografikus

szabály:



törölhető él : tranzitív redukció

eddig zh