ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2012. jún. 18.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 2^{2n+1}}{6^{n-1} + 5} = ?$

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^{2n+1}}{6^{n-1} + 5}$$

Megoldás:

$$\text{a) } a_n = \frac{3^n + 2\cdot 4^n}{\frac{1}{6}\cdot 6^n + 5} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{6} + 5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n} \longrightarrow \frac{0+0}{\frac{1}{6}+0} = 0$$

$\boxed{4}$

$$\text{b) } a_n < \frac{4^n + 2\cdot 4^n}{\frac{1}{6}\cdot 6^n} = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\boxed{6}$

$$18\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ konvergens geometriai sor } \left(q=\frac{2}{3}\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

$|q|<1$

2. feladat (17 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2x-1}, & \text{ha} \quad x \le 0 \\[2ex] \dfrac{\sin(\pi x)}{x}, & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) A jobb és baloldali határértékek kiszámításával döntsön, hogy hol és milyen szakadása van a függvénynek!

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?\,,$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ?$

b) Létezik-e $f'(0)$?
Írja fel $f'(x)$-et, ahol az létezik!

Megoldás:

$$\text{a) } \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{2x-1} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad 2$$

$\boxed{10}$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\sin(\pi x)}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,\pi = \pi \ne f(-0)$$

2

an1o-120618/1.

$\Longrightarrow$ véges ugrása van f-nek $x = 0$-ban (elsőfajú szakadás). 1

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2x-1} = \operatorname{arctg} 0 = 0 \quad 2$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \underbrace{\sin(\pi x)}_{\text{korlátos}} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow \atop 0} = 0 \quad 3$$

b)

$\boxed{7}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{2x-1}\right)^2} \dfrac{-1}{(2x-1)^2}\, 2, & \text{ha} \quad x < 0 \qquad 4 \\[2ex] \dfrac{\pi\, x\, \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x^2}, & \text{ha} \quad x > 0 \qquad 3 \end{cases}$$

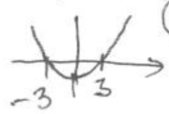
3. feladat (10 pont)

$$f(x) = e^{x^3 - 27x}$$

a) Keresse meg a függvény monotonitási intervallumait!

b) Hol van lokális szélsőértéke? Milyen jellegű?

$$f'(x) = e^{x^3-27x} \cdot (3x^2 - 27) \; 2 \; = \underbrace{3e^{x^3-27x}}_{>0 \;\; 1} \cdot \underbrace{(x^2-9)}_{} \; 2$$



	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 3)$	3	$(3, \infty)$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

} 5

4. feladat (15 pont)

Legyen x_0 az f függvény értelmezési tartományának belső pontja!

a) Írja le az x_0 pontbeli derivált definícióját!

b) Adjon szükséges és elégséges feltételt deriválhatóságra!

c) Mit mondhatunk a differenciálható f függvény deriváltjáról, ha f-nek az x_0-ban lokális szélsőértéke van? Állítását bizonyítsa be!

a.) D $\quad f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$\boxed{2}$

an1o120618/2.

b.) $\boxed{4}$ Ⓣ ***Szükséges és elégséges tétel deriválhatóságra:***

f akkor és csak akkor differenciálható x_0-ban, ha $K_{x_0,\delta} \subset D_f$, $|h| < \delta$-ra:

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h,$$

ahol A csak x_0-tól függhet, h-tól nem, és $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. (Itt $A = f'(x_0)$.)

c.) $\boxed{9}$

Ⓣ *Ha f az x_0 helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. ($K_{x_0,\delta} \subset D_f$)* (2)

Ⓑ Pl. lokális maximumra (4.19.a ábra):

$$\lim_{h\to 0-} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\frac{-}{-}} = \underbrace{f'_-(x_0) = f'(x_0)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \geq 0$$

$$\lim_{h\to 0+} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\frac{-}{+}} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \leq 0$$

■ (7)

$\Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0 \quad$ (vízszintes érintő)

(A $\frac{-}{-}$, illetve a $\frac{-}{+}$ szimbólumokban a + és − jel a tört számlálójának és nevezőjének előjelére utal.)

5. feladat (10 pont)*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9 - 3x^2}}\, dx = ?$

b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \frac{x}{\sqrt{9 - 3x^2}}\, dx = ?$

a.) $\boxed{4}$ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{9}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}\, dx = \frac{1}{3} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C$

b) $\boxed{6}$ $\displaystyle -\frac{1}{6} \int_0^{\sqrt{5/3}} -6x\, (9 - 3x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{6} \frac{\sqrt{9 - 3x^2}}{\frac{1}{2}} \Bigg|_0^{\sqrt{5/3}} =$

$f' f^{\alpha}$

$= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{9-5} - \sqrt{9}\right) = -\frac{1}{3}(2 - 3) = \frac{1}{3}$

anlo-120618/3.

6. feladat (9 pont)*

$$\int \frac{1}{(x-1)\,(x-2)^2}\ \mathrm{d}x\ = ?$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} \quad 2$$

$$1 = A(x-2)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x-2)$$

$x=1:\ 1=A \qquad x=2:\ 1=B$

$x:=0:\ 1=4A-B+2C \Rightarrow C=-1$

$$\int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \ln|x-1| + \frac{(x-2)^{-1}}{-1} - \ln|x-2| + C$$

3 4

7. feladat (9 pont)*

$$\int 2x \cdot \operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x\ = ?$$

$$\int 2x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx = x^2 \operatorname{arctg} - \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \quad 2$$

$$\left.\begin{matrix} u'=2x & v=\operatorname{arctg} x \\ u=x^2 & v'=\dfrac{1}{1+x^2} \end{matrix}\right\} 2$$

$$= x^2 \operatorname{arctg} x - \int \underbrace{\frac{x^2+1-1}{1+x^2}}_{=1-\frac{1}{1+x^2}}\, dx =$$

$$= x^2 \operatorname{arctg} x - (x - \operatorname{arctg} x) + C$$

4 1

8. feladat (20 pont)*

a) Mondja ki és bizonyítsa be a Newton–Leibniz tételt!
(A tétel pontos feltételeit is ismertesse!)

b) $x = 3\sin(t)$ helyettesítéssel határozza meg a következő integrál értékét!

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\ \mathrm{d}x\ = ?$$

an1o120618/4.

a.) Ⓣ Ha $f \in R_{[a,b]}$ és itt létezik primitív függvénye (F), azaz $x \in [a,b]$-re $F'(x) = f(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

3

Ⓑ F_n: m.h.t.f.f.s.

7

$$\underbrace{F(b)-F(a)}_{\substack{\downarrow\\ F(b)-F(a),\\ \text{ha } n\to\infty}} = \sum_{k=1}^{n}\left(F(x_k)-F(x_{k-1})\right) =$$

a Lagrange-féle k.é.t. miatt

$$= \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \underset{\substack{\downarrow\\ \int_a^b f(x)\,dx,\\ \text{ha } n\to\infty}}{\sigma_{F_n}^{f}}$$

■

b.) $x = 3\sin t$ $\quad t: 0 \to \frac{\pi}{2}$

$\boxed{10}$ $dx = 3\cos t\,dt$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt \xrightarrow{4} = \int_0^{\pi/2} 3\,\underbrace{|\cos t|}_{=\cos t}\,3\cos t\,dt$$

$$= 9\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 9\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{9}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$\to 3$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0-(0+0)\right) = \frac{9\pi}{4}$$ 3

A *-gal jelölt feladatokból legalább 12 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+1}{4n^2-2}\right)^{2n^2} = ?$

b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{2n+1}\,n^5} = ?$

an1v-120618/5

a.) $\boxed{5}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)^{4n^2}}{\left(1+\frac{-2}{4n^2}\right)^{4n^2}}} = \sqrt{\dfrac{e}{e^{-2}}} = e^{3/2}$

b.) $\boxed{5}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{9^n\cdot 3\cdot n^5} = \lim_{n\to\infty} 9\cdot \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\downarrow\, 1}\,(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow\, 1})^5 = 9$

10. feladat (10 pont)

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+5}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+5}\,\mathrm{d}x = ?$

a.) $\boxed{4}$ $\dfrac{1}{5}\displaystyle\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt5}\right)^2}\,dx = \frac{1}{5}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt5}}{\frac{1}{\sqrt5}} + C$

b.) $\boxed{6}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+5}\,dx = \lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to\infty}}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{1}{x^2+5}\,dx =$ (2)

$= \lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to\infty}} \frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt5}\Big|_{\omega_1}^{\omega_2}$ (1) $= \frac{1}{\sqrt5}\lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\omega_2}{\sqrt5} - \operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\sqrt5}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt5}$ (3)

an1w 1206181/6.