Villamosmérnök A3 (2017 ősz) 2. vizsga ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $y_1' + y_2 = e^t$, $y_1 + y_2' = e^{-t}$ differenciál-egyenletrendszert!

2. $\int_L v\, dr = ?$, ha $v(x,y) = (2x^2 - y^2, x^2 + y^2)$ és L az $\{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le y\}$ tartomány pozitívan irányított határa.

3. Legyen H az R sugarú, m magasságú, z tengelyű, kifelé irányított hengerpalást, melynek alapja az xy síkban van. Számítsa ki a $v(x,y,z) = (x - y, x + y, z)$ vektorfüggvény felületi integrálját H-n!

4. (a) A sík mely részhalmazán létezik potenciálfüggénye a $v(x,y) = (x^3 + y^3, 3xy^2)$ vektorfüggvénynek? (b) Határozza meg v egy potenciálfüggvényét, ahol az létezik!

5. (a) Definiálja a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvénynek az $F : r(u,v)$, $(u,v) \in A$ felületen vett *felszín szerinti* integrálját!
(b) Legyen $v = (v_1, v_2, v_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deriválható függvény; létezik-e olyan $w = (w_1, w_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény, amelyre $\operatorname{rot} w = (\operatorname{rot} v)_3$?
(c) Igazak-e következő állítások a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mindenütt deriválható vektorfüggvényre? (c1) Ha v konstans, akkor $\operatorname{div} v = 0$ (c2) Ha $\operatorname{div} v = 0$, akkor v konstans.

IMSc-feladat. Mutassa meg, hogy egy elsőrendű, homogén, függvényegyütthatós lineáris differenciálegyenlet megoldásai egydimenziós teret alkotnak!