Méréselmélet 1. zárthelyi – megoldás **2011.03.29.** **A**

1. Két konstans érték között ugrásszerűen váltakozó jelet detektálunk egyetlen zajos megfigyelésre alapozva. A megfigyelések független, Gauss eloszlású valószínűségi változók *a* és 3*a* (*a*=1) várható értékkel, σ_n=0.3 szórással. H_0 jelzi azt a hipotézist, hogy a jel *a* értékű. Ennek a priori valószínűsége P_0=0.9. H_1 jelzi az a hipotézist, hogy a jel 3*a* értékű. Ennek a priori valószínűsége P_1=0.1. A feltételes sűrűségfüggvények:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_n}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_n^2}} \text{ ill. } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_n}e^{-\frac{(z-3a)^2}{2\sigma_n^2}}$$

A költségek: C_{10} =C_{01} =10; C_{00} =C_{11} =0. Határozza meg a döntési küszöb értékét (max. 6 pont)! Mi a feltétele annak, hogy a döntési küszöb 2*a* legyen (max. 2 pont)?

Megoldás:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_n}e^{-\frac{(z-3a)^2}{2\sigma_n^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_n}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_n^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0(C_{10}-C_{00})}{P_1(C_{01}-C_{11})}=\eta \text{, ill. } -\frac{(z-3a)^2}{2\sigma_n^2}+\frac{(z-a)^2}{2\sigma_n^2} \gtrless \ln\eta \text{, ebből } \boxed{z \underset{<}{>} \frac{\sigma_n^2}{2a}\ln\eta+2a};$$

A küszöb nulla, ha $\eta = 1$.

2. Egy megfigyelés aposteriori sűrűségfüggvénye csak a [0,4] intervallumban különbözik nullától. [0,1] között 0.125, majd (1,3) között lineárisan nő 0.125-ről 0.625-re, végül [3,4] között konstans. Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 6 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 4 pont), és a maximum a posteriori becslő értékét (max. 2 pont)!

Megoldás:

$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{+\infty} af(a|z)da = \int_0^1 \frac{a}{8}da + \int_1^3\left(\frac{a}{4}-\frac{1}{8}\right)ada + \int_3^4 \frac{a}{8}da = \left.\frac{a^2}{16}\right]_0^1 + \left.\frac{a^3}{12}\right]_1^3 - \left.\frac{a^2}{16}\right]_1^3 + \left.\frac{a^2}{16}\right]_3^4 = ,$$

$$= \frac{1}{16}+\frac{27}{12}-\frac{1}{12}-\frac{9}{16}+\frac{1}{16}+1-\frac{9}{16} = 2\frac{1}{6}$$

$\hat{a}_{ABS} = f(a|z)$ mediánja: A [0,1] és a [3,4] intervallumok feletti terület azonos, összesen 0.25. Az ismeretlen az [1,3] intervallum feletti terület felező pozíciója. Az origót ideiglenesen az (1,0) pontba helyezve: $0.125x+\frac{0.25x^2}{2}=0.375$, ahonnan $\hat{a}_{ABS}=\frac{\sqrt{13}+1}{2}\cong 2.3$.

$\hat{a}_{MAP} = f(a|z)$ maximuma = 3.

3. Vezesse le az adaptív lineáris kombinátor esetére érvényes Wiener-Hopf egyenletet (max. 4 pont)! Határozza meg a súlytényezőket arra az esetre, amikor $\mathbf{P}^T$ = [0 -0.5*sin(6π/*N*)], **R** első sora = [0.5 0.5*cos(6π/*N*)], **R** második sora = [0.5*cos(6π/*N*) 0.5], ahol *N*=18 (max. 4 pont)! A lineáris kombinátor bemeneteire egységnyi amplitúdójú, szinuszos hullámformájú jelek mintáit vezettük. Határozza meg ezen jelek egymáshoz viszonyított fázishelyzetét (max. 2 pont)! Határozza meg a lineáris kombinátor kimenetén megjelenő hullámformát (max. 2 pont)!

Megoldás:

A levezetéshez lásd az óravázlat (84)-(85) összefüggéseit. A súlytényezők számításához az **R** mátrix inverzét kell előállítanunk:

$$R^{-1} = \frac{1}{0.25 - 0.25\cos^2(6\pi/N)} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5\cos(6\pi/N) \\ -0.5\cos(6\pi/N) & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad W = R^{-1}P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{tg(\pi/3)} \\ \dfrac{-1}{\sin(\pi/3)} \end{bmatrix},$$

$W = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$. A két hullámforma fázishelyzete: $\sin(\frac{2\pi}{N}n)\sin(\frac{2\pi}{N}n+\varphi)$ várható értéke alapján számítható, ami a trigonometrikus azonosságok és a korrelációs mátrix felhasználásával $\varphi = -\pi/3 = -6\pi/N$ értéket ad. Ebből két alkalmas bemenő hullámforma: $\sin(\frac{2\pi}{N}n)$ és $\sin(\frac{2\pi}{N}(n-3))$. A kimenőjel:

$$\frac{2}{tg(\pi/3)}\sin(\frac{2\pi}{N}n) - \frac{2}{\sin(\pi/3)}\sin(\frac{2\pi}{N}(n-3)) = \cos(\frac{2\pi}{N}n).$$

Megjegyzés: $\sin(\frac{6\pi}{N}n)$ és $\sin(\frac{6\pi}{N}(n-1))$ diszkrét időfüggvényű bemenetek esetén a korrelációs mátrixok ugyanezek, a súlytényezők is, a kimenőjel pedig $\cos(\frac{6\pi}{N}n)$.

4. Vezesse le a legkisebb négyzetes hibájú becslő (nincsen előzetes ismeret) kifejezését skalár esetre, lineáris megfigyelési egyenlet feltételezésével (max. 3 pont)!

Megoldás: A levezetéshez lásd az óravázlat (68)-(69) összefüggéseit.

5. Egy autonóm diszkrét idejű rendszer állapotátmenet mátrixa: **A**=diag<1, -1>, megfigyelési mátrixa **C**=[0.1, 0.1]. Megfigyelőt tervezünk. Tegyen javaslatot a G mátrix elemeinek értékére (A diag<...> jelölés diagonális mátrixot jelöl, melynek csak a főátlóban vannak nullától különböző elemei.) (max. 5 pont)!

Megoldás: lásd az első előadás 2. példáját azzal a különbséggel, hogy a **C** kicsatolás erőssége tizedrészére csökkent, aminek következtében a becsatolásnak tízszeresére kell növekednie.