Villamosmérnök A2 (2017 tavasz) — 2. pót ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 40 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. $\int_H xy\,dxdy = ?$, ha H az $y = 2x$ és $y = 3 - x^2$ görbék által határolt, korlátos halmaz.

Megoldás. A két görbe $x = -3$-nál és $x = 1$-nél metszi egymást, és a $[-3, 1]$ intervallumon $2x \le 3 - x^2$, ezért $\int_H xy\,dxdy = \int_{-3}^{1}\int_{2x}^{3-x^2} xy\,dydx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{1} x^5 - 10x^3 + 9x\,dx = \frac{1}{12}x^6 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{9}{4}x^2\Big|_{-3}^{1} = \frac{13}{12} - \frac{81}{4} = \frac{64}{3}$.

2. Konvergensek-e a következő sorok? (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(5+1/n)^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+1/n)^n}$

Megoldás. (a) Igen, a gyökkritérium miatt, mert $\sqrt[n]{\frac{n^5}{(5+1/n)^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^5}}{5+1/n} \to \frac{1}{5} < 1$.
(b) Nem, mert $\frac{n}{(1+1/n)^n} \to \infty \ne 0$.

3. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!}$ sor? Ha igen, adja meg az értékét 1/10 pontossággal!

Megoldás. $a_n = \frac{4^n}{(2n)!} \to 0$, mégpedig monoton csökkenve, mert $a_{n+1} \le a_n \iff 4 \le (2n+1)(2n+2)$, és az utóbbi igaz minden $n \ge 1$-re; tehát a sor Leibniz-sor, ezért konvergens, és a hiba kisebb, mint az első elhagyott tag abszolútértéke: $|a_3| = 4^3/6! = 4/45 < 1/10$, tehát $a_1 + a_2 = -4/3$ jó közelítés.

4. (a) Mikor mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz Jordan–mérhető?
Igazak-e a következő állítások?
(b) Ha f folytonos a $H \subseteq \mathbb{R}^2$ korlátos halmazon, akkor integrálható is H-n.
(c) Ha $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.
(d) Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is konvergens
(e) Ha $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens

Megoldás. (a) Ha $1 \in \mathcal{R}(H)$ (azaz ha $\exists \int_H 1$).
(b) Nem, pl. $H = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : 0 \le x, y \le 1\}$
(c) Nem, pl. $a_n = 1/\sqrt{n}$
(d) Nem, pl. $a_n = 1/n^2$, $b_n = 1/n$
(e) Igen: ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tehát $0 < \lim_{n\to\infty} b_n$ és így $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nem lehet konvergens.

IMSc-feladat. Legyen a_n nemnegatív tagú sorozat. Mutassuk meg, hogy ha van olyan $q < 1$, amire $a_{n+1}/a_n \le q$ minden n-re, akkor van olyan $q < 1$, amire $\sqrt[n]{a_n} \le q$ valamilyen indextől! (Azaz, ha a hányadoskritériumot lehet alkalmazni, akkor a gyökkritériumot is.)

Megoldás. A feltétel miatt minden n-re $a_n \le a_0 q^n$, amiből $\sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{a_0}q \to q < 1$, következésképp valamilyen indextől $\sqrt[n]{a_n} < (1+q)/2 < 1$.

Villamosmérnök A2 (2017 tavasz) 2. pótpót ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 40 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. $\iint_H x^2y = ?$, ha H az a háromszög a síkban, melynek csúcsai $(0,0)$, $(0,4)$ és $(2,2)$.

Megoldás. $\iint_H x^2y = \int_0^2\int_x^{4-x} x^2y\; dydx = \int_0^2 8x^2 - 4x^3\; dx = 16/3$.

2. $\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^1 z\; dzdydx = ?$

Megoldás. Hengerkoordinátákra áttérve:

$$\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^1 z\; dzdydx = \int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^1 rz\; dzd\varphi dr = \int_0^3\int_0^{2\pi} r/2\; d\varphi dr = \int_0^3 r\pi\; dr = 9\pi/2.$$

3. Konvergensek-e a következő sorok? (a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2 2^n}{3^n}$ (b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$

Megoldás. (a) Igen, gyökkritériummal: $\sqrt[n]{\frac{n^2 2^n}{3^n}} = \sqrt[n]{n^2}\frac{2}{3} \to \frac{2}{3} < 1$.
(b) Igen, mert $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$ miatt $\frac{\sin\frac{1}{n}}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, és $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergens.

4. A p valós paraméter mely értékeire konvergens a $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^p}$ sor?

Megoldás. $p \le 0$-ra divergens, mert $\frac{1}{n(\ln n)^p} = \frac{(\ln n)^{-p}}{n} \ge \frac{1}{n}$ miatt majorálja a divergens $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ sort.

Ha $p > 0$, akkor $\frac{1}{n(\ln n)^p}$ monoton csökkenve tart 0-hoz, tehát a kondenzációs kritérium miatt a sor pontosan akkor konvergens, ha $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{2^n(\ln 2^n)^p} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p(\ln 2)^p}$ az, vagyis ha $p > 1$.

IMSc-feladat. $\int_0^{1/\pi}\int_0^\pi x\cos^2(xy)\; dydx = ?$

Megoldás.

$$\int \cos^2 t\; dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cos t\sin t \rightsquigarrow \int \cos^2(xy)\; dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{2x}\cos(xy)\sin(xy)$$

$$\rightsquigarrow \int_0^\pi \cos^2(xy)\; dy = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2x}\cos(\pi x)\sin(\pi x)$$

$$\rightsquigarrow \int_0^{1/\pi}\int_0^\pi x\cos^2(xy)\; dydx = \int_0^{1/\pi} \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi x)\sin(\pi x)\; dx = \frac{\pi x^2}{4}\bigg|_0^{1/\pi} + \frac{\sin^2(\pi x)}{4\pi}\bigg|_0^{1/\pi}$$

$$= \frac{1+\sin^2 1}{4\pi}.$$