Felsőbb Matematika 1. ZH 2012-10-24

1. Legyen $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ és $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$ két bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Írjuk fel a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}$, a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}$ és a a $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}$ áttérések mátrixát! Írjuk fel a $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = (1,1,1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli koordinátás alakját! *(4 pont)*

Megoldás. Az áttérések mátrixai:

$$\mathbf{X}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (1/2-1/2 pont)}$$

és

$$\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{X}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{X}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (2 pont).}$$

Utóbbit az $\mathbf{X}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{X}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ mátrixegyenlet megoldásával is megkaphatjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Harmadik megoldási lehetőség: látjuk, hogy $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_3$, $\mathbf{b}_3$ pedig könnyen megkapható $\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1$ alakban, az áttérés mátrixát pedig épp úgy kapjuk, hogy $\mathcal{B}$ vektorait fölírjuk a $\mathcal{C}$ bázisban. Végül a $\mathbf{v}$ vektorra:

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{C} = \mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ (1 pont).}$$

2. Ortogonálisan diagonalizáljuk az $\mathbf{A}$ mátrixot, azaz határozzuk meg azt a $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrixot és $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot, melyekkel $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$, és írjuk fel $\mathbf{A}$ redukált szinguláris felbontását! *(4 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. A karakterisztikus polinom $-\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$ (0.5 pont). A sajátvektorok: $\lambda_1 = 2$-höz $v_1 = (1,0,-1)$, $\lambda_2 = -1$-hez $v_2 = (0,1,0)$ és $\lambda_3 = 0$-hoz $v_3 = (1,0,1)$ (1.5 pont).

Innen a diagonalizáló és a diagonalizált mátrix

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}, \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (1 pont).}$$

A szinguláris felbontáshoz $\mathbf{\Lambda}$ negatív elemét pozitívra kell változtatni, amit úgy lehet ellensúlyozni, hogy $\mathbf{Q}$-ból a második oszlop -1-gyel való beszorzásával kapjuk $\mathbf{V}$-t, és $\mathbf{U} = \mathbf{Q}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (1 pont).}$$

3. Írjuk fel annak a 10×10-es mátrixnak a Jordan-féle normálalakját, melynek egyetlen sajátértéke λ, és amelyre $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k$ rangja $k = 1,2,3,4$ esetén rendre 5, 2, 1, 0. *(3 pont)*

Megoldás.

i		1	2	3	4	
r_i		5	2	1	0	
d_i	0	5	8	9	10	
d'_i		5	3	1	1	0
d''_i		2	2	0	1	

(2 pont),

így a Jordan-alakban 2-2 1×1-es illetve 2×2-es, valamint 1 4×4-es blokk van (1 pont). Lehet az n_i számokra vonatkozó egyenletrendszert is megoldani:

$$\begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 + 2n_4 &= 2 \\ n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= 5 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 10 \end{aligned}$$

(egyenletek + megoldás 2 pont, a következtetések levonása még 1 pont).

4. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét! *(2 pont)*

Megoldás. 1. Az $\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^T(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{R}^T)^{-1}\mathbf{B}^T$ képletbe helyettesítve:

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Mivel $\mathbf{A}$ teljes sorrangú, ezért számolhatunk az $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ képlettel is.
(Akármelyik megoldásban az inverz kiszámítása 1 pont, a maradék még 1 pont.)

5. Melyek pozitív definitek az alábbi mátrixok közül? *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix},$$

Megoldás. Mivel $\det \mathbf{A} = -1$ és $\det \mathbf{B} = 0$, ezért sem $\mathbf{A}$, sem $\mathbf{B}$ nem pozitív definit. $\mathbf{C}$-re viszont a felső minorok determinánsaira 1 és 5 adódik, tehát $\mathbf{C}$ pozitív definit ($\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ 1/2-1/2 pont, $\mathbf{C}$ 1 pont). Számolhatunk a sajátértékekkel is, ezek $\mathbf{A}$-ra $1/2 \pm \sqrt{5}/2$, melyek közül az egyik negatív, a másik pozitív; $\mathbf{B}$-re 10 és 0; $\mathbf{C}$-re pedig $5/2(2 \pm \sqrt{3})$.

6. Melyek irreducibilisek és melyek primitívek az alábbi mátrixok közül? *(3 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. A gráfokat felrajzolva látjuk, hogy $\mathbf{A}$ reducibilis, így nem primitív ($\{2,4\}$-ből nem vezet nyíl $\{1,3\}$-ba). $\mathbf{B}$ irreducibilis, pozitív főátlóbeli elemmel, csakúgy, mint $\mathbf{C}^2$, így mindkettő primitív. $\mathbf{C}$ esetén a logikai értékkel felírt „mátrixszorzás elvégzésével látható, hogy $\mathbf{C}^5$ pozitív. (Mindegyik mátrixért 1-1 pont)

7. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = (1,1,0,1)$ egyenletet $\mathbb{F}_2$ fölött, ahol *(3 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(*a*) Hány megoldása van az egyenletrendszernek? (*b*) Legyen $A : \mathbf{F}_2^k \to \mathbf{F}_2^n$; $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$. Adjuk meg k és n értékét!
(*c*) Mennyi $\operatorname{Ker} A$ és $\operatorname{Im} A$ dimenziója?

Megoldás. Gauss-eliminációt végezve:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így $\mathbf{x} = (t, 1+t, t)$. A megoldások száma 2, mivel t-nek két lehetséges értéke van. Az A leképezés $\mathbf{F}_2^3$-ból $\mathbf{F}_2^4$-be képez. Mivel $r(\mathbf{A}) = 2$, ezért $\dim \operatorname{Im} A = 2$ és $\dim \operatorname{Ker} A = 3 - 2 = 1$.

8. Mutassuk meg, hogy r-reguláris gráf $\mathbf{A}$ adjacenciamátrixának az r szám egy sajátértéke, és minden más λ sajátértékre $|\lambda| \le r$. *(3 pont)*

Megoldás. r-reguláris egy gráf, ha minden csúcsának foka r (például minden n-csúcsú kör 2-reguláris). Mivel ennek illeszkedési mátrixában minden sorban (és oszlopban) pontosan r darab 1-es van, a többi 0 (1 pont), ezért a csupa-1-vektor sajátérték az r-hez, mint sajátértékhez (1 pont). Minden Gerschgorin-kör középpontja az origó, sugara pedig r, innen az egyenlőtlenség a többi sajátértékre fennáll (1 pont).