Haladó lineáris algebra

ELSŐ HÁZI FELADAT

Adott a következő mátrix a kételemű $\mathbb{F}_2$ test fölött

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Határozzuk meg a **H** mátrix négy kitüntetett alterének egy-egy bázisát!

A négy kitüntetett altér: $\mathcal{S}(\mathbf{H})$, $\mathcal{O}(\mathbf{H})$, $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ és $\mathcal{N}(\mathbf{H}^T)$. Ebből az első a mátrix sorterét jelenti, így ennek az altérnek egy bázisa a három sorvektor alkotta vektorrendszer, azaz

$$\mathcal{S}(\mathbf{H}) = span\big\{(1,0,1,0,1,0,1), \quad (0,1,1,0,0,1,1), \quad (0,0,0,1,1,1,1)\big\}.$$

A második fontos altér az oszloptér, amely a mátrix azon oszlopvektoraiból áll, amelyek lineárisan függetlenek. Ezek azok az oszlopok, amelyek a **H** mátrix redukált lépcsős alakjában főoszlopokra adódnak. A mátrix már redukált lépcsős alakban van, így leolvasható róla, hogy melyek a főoszlopok. Tehát

$$\mathcal{O}(\mathbf{H}) = span\big\{[1,0,0]^T, \quad [0,1,0]^T, \quad [0,0,1]^T\big\},$$

azaz az első, a második és a negyedik oszlop alkotja az oszloptér egy bázisát. A fenti két bázis mérete megfelelő, hiszen a $r(\mathbf{H}) = 3 = dim\{\mathcal{S}(\mathbf{H})\} = dim\{\mathcal{O}(\mathbf{H})\}$.

A harmadik altér a mátrix nulltere. Ezt azok a vektorok fogják generálni, amelyek a $\mathbf{Hx} = \mathbf{0}$ lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásait szolgáltatják. Az egyenletrendszert megoldva (ügyelve arra, hogy a műveletek eredményeit mod2-ben kell továbbvinni) a következőt kaptam

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az itt szereplő négy vektor alkotja a mátrix nullterének egy bázisát. A dimenziótétel szerint is négy elemű lesz a bázis, hiszen $n = 7 = dim\{\mathcal{S}(\mathbf{H})\} + dim\{\mathcal{N}(\mathbf{H})\} = 3 + 4$.

A negyedik altér a mátrix transzponáltjának nulltere. Itt is hasonlóan kell eljárni, mint a „sima” nulltér esetén, viszont itt a $\mathbf{H}^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszert kell megoldani. Ehhez a $\mathbf{H}^T$-at redukált lépcsős alakra kell hozni, hiszen az eredeti mátrix transzponáltja már nem ilyen alakú. Gauss-eliminálva $\mathbf{H}^T$-t

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy a redukált lépcsős alak egy 3×3-as egységmátrixra adódott, azaz a $\mathbf{H}^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineáris egyenletrendszernek a triviális zérusvektoron kívül más megoldása nincs, így a $\mathcal{N}(\mathbf{H}^T)$ az nem más, mint a *zérustér*, amelynek bázisa a vektorok üres halmaza.

2. Határozzuk meg a $\mathcal{S}(\mathbf{H}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{H})$ alteret!

A mátrix sortere az ugyanaz, mint a mátrix transzponáltjának oszloptere, azaz $\mathcal{S}(\mathbf{H}) = \mathcal{O}(\mathbf{H}^T)$ és ekkor a feladat úgy is értelmezhető, mint a $\mathcal{O}(\mathbf{H}^T) \cap \mathcal{N}(\mathbf{H})$ altér megkeresése. Tudjuk, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{H}^T) = span\{\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3\}$, ahol $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2$ és $\mathbf{o}_3$ a **H** mátrix sorvektorainak transzponáltja és $\mathcal{N}(\mathbf{H}) = span\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4\}$, ahol az **n**-ek a nulltér egy bázisa. A két altér metszetéből vegyünk egy tetszőleges **w** vektort, amelyre igaz, hogy

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{o}_1 + a_2\mathbf{o}_2 + a_3\mathbf{o}_3 = b_1\mathbf{n}_1 + b_2\mathbf{n}_2 + b_3\mathbf{n}_3 + b_4\mathbf{n}_4,$$

ahol az *a*-k és a *b*-k konstansok. Az előbbi kifejezés azt jelenti, hogy ha w a két altér metszetében van, akkor mind a két altér bázisával külön-külön „kikombinálható”. Ha most ez alapján felírunk egy $\mathbf{Kx} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszert, ahol

$$\mathbf{K} = [\mathbf{o}_1 \quad \mathbf{o}_2 \quad \mathbf{o}_3 \quad \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{n}_3 \quad \mathbf{n}_4] \text{ és } \mathbf{x} = [a_1\ a_2\ a_3\ -b_1 - b_2 - b_3 - b_4]^T,$$

akkor ezt megoldva a megoldásvektorok pont a feladatban szereplő két altér metszetének egy bázisát fogják képviselni, ami éppen a $\mathcal{N}(\mathbf{K})$ egy bázisa. Tehát a következő mátrix nullterét kell meghatározni

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A b-k (-1)-szeres szorzói mod2-ben „nem jelennek meg”, ezért azok elhagyhatók. Redukált lépcsős alakra hozva és megoldva az egyenletrendszert a következő két nulltérbeli megoldást kaptam, amelyek a metszet alteret generálják, azaz

$$\mathcal{S}(\mathbf{H}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{H}) = span\{[0,1,1,1,1,0,0]^T, \quad [1,0,1,1,0,1,0]^T\}.$$

3. Mutassuk meg, hogy egy **y** vektor pontosan akkor kódvektor, ha $\mathbf{Hy} = \mathbf{0}$.

A feladat szövege szerint a kódvektorokat a $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ bázisából összeállított G mátrixszal képezzük. Ez azt jelenti, hogy olyan **y** vektorokat képezünk az $\mathbf{y} = \mathbf{Gx}$ alapján, amelyek „beleesnek” **G** oszlopterébe, viszont ez az oszloptér a **H** nullterével egyezik meg. Tehát másképp fogalmazva azt csináljuk, hogy a **G**-vel a $\mathbf{Hy} = \mathbf{0}$-hoz nemtriviális **y** megoldásvektorokat gyártunk és teljesen mindegy milyen az az **x**, ehhez egy nulltérbeli **y**-t állítunk elő.
Felírva ismét a lineáris egyenletet

$$\mathbf{Hy} = \mathbf{HGx} = (\mathbf{HG})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

A zárójelben lévő mátrixszorzás bővebben kifejtve

$$\mathbf{HG} = \begin{bmatrix} \mathbf{Hg}_1 & \mathbf{Hg}_2 & \mathbf{Hg}_3 & \mathbf{Hg}_4 \end{bmatrix},$$

ahol **g**-k a **G** oszlopai, amelyekről tudjuk, hogy a **H** nullterébe eső megoldásai, így a kifejtett mátrixszorzás végeredménye egy **O** zérusmátrix. Következésképpen $\mathbf{Ox} = \mathbf{0}$, ami $\mathbf{0} = \mathbf{0}$-t ad tetszőleges **x** üzenetvektorra.

4. Szorgalmi feladat.

Legyen a hibás kódszó alakja $\mathbf{y}_h = \mathbf{y} + \mathbf{e}$, ahol **e** az olyan vektor, hogy a 7 koordinátája közül az egyik 1-es a többi zérus, hiszen ez fogja azt jelenteni, hogy a kódszóban az egyik bit megváltozott az átvitel során. A hibás, vett kódszóra alkalmazzuk a **H**-t, azaz

$$\mathbf{Hy}_h = \mathbf{H}(\mathbf{y} + \mathbf{e}) = \mathbf{Hy} + \mathbf{He} = \mathbf{0} + \mathbf{He} = \mathbf{h}_{*i},$$

ahol $\mathbf{h}_{*i}$ épp a H i-ik oszlopa, ha az **e**-ben az i-ik koordinátánál szerepelt az 1-es, azaz a bithiba.