Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Egészségügyi mérnök Szak
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Juhász Ferencné – Szilágyi Béla

FOLYAMATSZABÁLYOZÁS

1B. Elméleti alapok
Segédlet

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left[x(t), u(t)\right]$$ → **Differenciál**egyenlet– rendszer (Főegyenlet)

$$y(t) = g\left[x(t), u(t)\right]$$ → **Algebrai** egyenletrendszer (Kiegészítő, mérési egyenlet)

* * * * * * * * * * * * * *

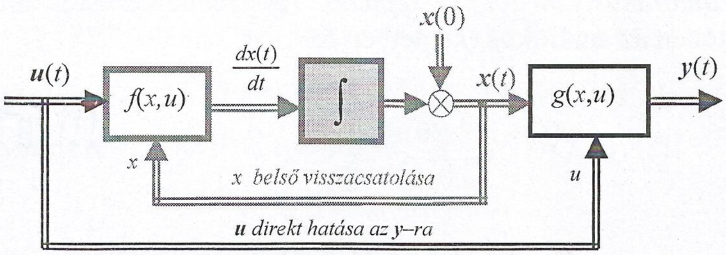
$$adott: f,\ g,\ x(0),\ u(t)$$

f, g: nemlineáris függvények
$x(0)$: kezdeti feltétel vektor
$u(t)$: gerjesztés vektor

* * * * * * * * * * * * * *

$$x(t) = ?,\ y(t) = ?$$

$x(t)$: a főegyenlet megoldása
$y(t)$: az állapotegyenlet megoldása



$\boldsymbol{u}(t)$: bemenőjel (gerjesztés) vektor (j 1)
$x(t)$: állapotvektor (n 1)
$dx(t)/dt$: állapotsebesség vektor(n 1)
$\boldsymbol{y}(t)$: kimenőjel (válasz) vektor (k 1)
$x(0)$: állapotvektor kezdeti értéke (n 1)

Dinamikus rendszer matematikai modellezése, állapotegyenlet–reprezentáció, rendszeregyenlet, átviteli mátrix, átviteli függvény, rendszerjellemző függvények, karakterisztikus polinom, stabilitás.

A szabályozási rendszer mindkét alrendszere (a szabályozó berendezés és a szabályozott folyamat) olyan, egymással kölcsönhatásban lévő dinamikus rendszer, amelynek leírására (matematikai modellezésére) különféle, a jelek idő szerinti deriváltjait tartalmazó differenciálegyenletek alkalmasak. Ezen matematikai modellek egy osztálya a

$$\underbrace{\begin{array}{l}\dfrac{dx(t)}{dt}=f[x(t),u(t)]\\ y(t)=g[x(t),u(t)]\end{array}}_{nemlineáris}\qquad \underbrace{\begin{array}{l}\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{array}}_{lineáris}$$

nemlineáris, vagy *lineáris* **állapotegyenlet reprezentációkkal**, illetve lineáris **SISO** tag esetében a

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+h_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+h_n y(t)=g_0\frac{d^m u(t)}{dt^m}+g_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+g_m u(t)$$

$y^{(n)}(t)$ derivált vezető együtthatójára normalizált **rendszeregyenlettel** jellemezhetőek (a rendszeregyenlet egyébként állapotegyenlet reprezentációs alakra is átalakítható, lásd pl. a *Frobenius* alakokat, vagy az átviteli függvény *direkt* és *részlettörtes* felbontásait).

Az analízis egyik alapkérdése: az adott $u(t)$ gerjesztés vektor, az $x(0)$ kezdeti feltétel vektor, az f és g nemlineáris vektorfüggvények, az A, B, C, D paramétermátrixok, illetve a h_i, g_i állandó, valós, skalár együtthatók ismeretében az $x(t)$ állapotvektor és az $y(t)$ kimenőjel vektor (a válasz) időfüggvényeinek meghatározása. A differenciálegyenlet $x(t)$ és $y(t)$ megoldására nemlineáris esetben általában *numerikus eljárások* alkalmazhatók (lásd pl. *Euler* módszerét), lineáris esetben *analitikus megoldó képletek* is rendelkezésre állnak. A **lineáris** állapotegyenlet esetében az analitikus (képletben felírható) megoldás[1]:

$$x(t)=\underbrace{e^{At}x(0)}_{x_s(t)}+\underbrace{\int_{\tau=0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{x_g(t)}$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

!!! TUDNI

Ebben $x_s(t)$ az $x(0)$ kezdeti feltétel vektor által kiváltott sajátmozgás, az $x_g(t)$ az $u(t)$ gerjesztés által keltett gerjesztett mozgás. Az eredő mozgás a két mozgás szuperpoziciója. A megoldóképlet a rendszám n=1 esetében igen egyszerű, mivel ekkor az $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$ paramérermátrixok skaláris adatok, így a képletek mátrixfüggvényeket nem tartalmaznak. Ha viszont $n\geq 2$, akkor mátrixfüggvényekről van szó, így a mátrixalgebra szabályrendszere alapján kell a megoldóképleteket kezelni. Az állapotegyenlet rendszáma a benne szereplő elsőrendű differenciálegyenletek n számát, a rendszeregyenlet rendszáma az $y(t)$ kimenőjel legmagasabb rendű $y^{(n)}(t)$ időszerinti deriváltjának n rendjét jelenti.

[1] Az itt felírt analitikus megoldás helyességét olyan módon is ellenőrizhetjük, hogy az állapotegyenletbe visszahelyettesítve ezeket a képleteket, azonosságot kapunk. Az $x(t)$ meghatározását követően $y(t)$ egy algebrai képletbe történő egyszerű behelyettesítéssel megkapható.

Példa

Egy kimenetű, három bemenetű, másodrendű rendszer állapotegyenletei–, a rendszer külső hatásként érő $u(t)=[u_1(t)\ u_2(\mathrm{t})\ u_3(t)]^T$ gerjesztés vektora és az állapot vektor $x(0)=[x_1(0)\ x_2(0)]^T$ kezdeti értékei adottak. Az analitikus megoldóképlet alapján számítsuk ki az állapotváltozók és a kimenőjel $x_1(t)$, $x_2(t)$, illetve $y(t)$ időfüggvényeit!

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

****

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} r}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_{\tau=0}^{t} e^{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}(t-r)}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ u_3(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix}\left\{ e^{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} r}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_{\tau=0}^{t} e^{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}(t-r)}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ u_3(\tau) \end{bmatrix} d\tau \right\} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

Lineáris rendszerek mellett – egy alkalmasan megválasztott integráltranszformációs eljárás keretei között, és a komplex függvénytan felhasználásával – a skaláris t időtartományból az s változó komplex operátor tartományra térhetünk át. Az áttérés során figyelembe kell venni a *Laplace* integráltranszformáció $L\{ax(t)+bu(t)\}=ax(s)+bu(s)$ *linearitási* tételét és $L\{dx(t)/dt\}=sx(s)-x(0)$ *differenciálási* szabályát. Ekkor – $x(0)=0$ zérus kezdeti értékeket feltételezve – az állapotegyenlet, ennek *Laplace* transzformáltja, illetve a transzformált függvényekből az időfüggvény meghatározásának eljárása az alábbiak szerint történik:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \qquad \rightarrow \qquad sx(s) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$y(t) = C(x(t) + Du(t) \qquad \rightarrow \qquad y(s) = Cx(s) + Du(s)$$

****

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \qquad \rightarrow \qquad x(t) = L^{-1}\{x(s)\}$$

$$y(s) = \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{\mathbf{W}(s)}u(s) \qquad \rightarrow \qquad y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$$

vagy a **SISO** tag rendszeregyenlete esetében:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + h_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + h_n y(t) = g_0\frac{d^m u(t)}{dt^m} + g_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + g_m u(t)$$

****

$$(s^n + h_1 s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_n)y(s) = (g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \cdots + g_1 s + g_m)u(s)$$

$$y(s) = \underbrace{\frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \cdots + g_1 s + g_m}{s^n + h_1 s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_n}}_{W(s)}u(s)$$

Az alkalmazott integráltranszformáció azt a lehetőséget eredményezi, hogy a **lineáris** rendszer dinamikus tulajdonságainak leírására – a t időbeli leírás differenciálegyenletei helyett – az s változó komplex operátor tartományban algebrai egyenletekkel dolgozhatunk. A *Laplace* transzformáció tette bevezethetővé a szabályozástecnika legfontosabb fogalmainak, a $\mathbf{W}(s)=C[(sI-A)^{-1}+D]$ **átviteli mátrixnak**, és a $W(s)=y(s)/u(s)$ **átviteli függvénynek** – az értelmezését. Az átviteli mátrix a **MIMO** rendszerek $y(s)$ kimenőjel vektora és $u(s)$ bemenőjel vektora közötti függvénykapcsolatot *algebrai* mátrixegyenlettel írja le: $y(s)=\mathbf{W}(s)u(s)$. Részletezve:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_k(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1j}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2j}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W_{k1}(s) & W_{k2}(s) & \cdots & W_{kj}(s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}(s)=C(sI-A)^{-1}B+D} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_j(s) \end{bmatrix}$$

A kj méretű, átviteli függvényeket tartalmazó átviteli mátrix fontos tulajdonsága, hogy a kifejezésében szereplő mindenegyes átviteli függvény elemének azonos, $det(sI–A)$ nevezője van. Ez a nevező a rendszer $K(s)$ karakterisztikus polinomja, p_i gyökei mind a stabilitást, mint a dinamikus tulajdonságokat alapvetően befolyásolják. Ezek a $p_i=\lambda_i$ gyökök egyébként a rendszer A állapotmátrixának sajátértékeit is jelentik. Az átviteli mátrix egy átviteli függvény eleméhez egy rendszeregyenlet is rendelhető. Pl. a $W_{35}(s)$ elem azt írja le, hogy az $u(s)$ bemenőjel vektor u_5(s) sorszámú bemenőjele az $y(s)$ kimenőjel vektor $y_3(t)$ sorszámú kimenőjelét miként befolyásolja.

Az átviteli függvény a **SISO** rendszer skalár $y(s)$ és $u(s)$ jelei között szintén $y(s)=W(s)u(s)$ algebrai egyenlet alakjában teremt függvénykapcsolatot, ez utobbi esetben az átviteli függvény $W(s)=y(s)/u(s)$ kifejezéssel is definiálható. A **SISO** tag átviteli függvénye tehát a **MIMO** tag átviteli mátrixának az a speciális esete, amikor az átviteli mátrix egyetlen elemet tartalmaz. A **SISO** tag rendszeregyenlete és az átviteli függvénye egymásnak kölcsönösen megfelelő matematikai modellek, a rendszeregyenletből az átviteli függvény–, illetve az átviteli függvény algebrai tört (polinom/polinom) kifejezéséből a rendszeregyenlet *közvetlenül* felírható.

A lineáris **SISO** tag rendszerjellemző függvényeinek tekintjük – a **rendszeregyenletén** és a $W(s)$ **átviteli függvényén** túlmenően – a tag $v(t)$ **átmeneti függvényét** (az $u(t)=\mathbf{1}(t)$ egységugrás gerjesztésre adott $y(t)$ kimenőjel választ), a tag $w(t)$ **súlyfüggvényét** (az $u(t)=\delta(t)$ *Dirac delta* gerjesztésre adott $y(t)$ kimenőjel választ) és a $W(j\omega)$ **frekvencia függvényét** (a harmonikus $u(t)=u_{max}sin(\omega t)$ bemenőjel hatására keletkező kvázistacioner harmonikus $y(t)=y_{max}(\omega)sin[\omega t+\varphi(\omega)]$ kimenőjel válasz $y_{max}(\omega)$ amplitúdójának és $\varphi(\omega)$ fázisának változása a ω körfrekvencia függvényében). A rendszerjellemző függvények közös tulajdonsága, hogy bármelyikük ismerete esetében megválaszolható az a kérdés, hogy tetszőleges $u(t)$ gerjesztésre a **SISO** tag milyen $y(t)$ választ ad? Ennek elméleti háttere a lineáris rendszerekre érvényes *szuperpozició elve*. A rendszeregyenlet, az átviteli függvény és a frekvencia függvény a szabályozási rendszer analízisében és a szabályozó rendszertechnikai méretezésében (a szabályozási algoritmus meghatározásában) kap fontos szerepet, a súlyfüggvénynek és az átmeneti függvénynek a tranziens folyamatok grafikonon történő szemléltetésében van jelentősége.

A **SISO** tag **rendszerjellemző függvényei:** lineáris differenciál-egyenlet / lineáris állapotegyenlet

$u(t) \rightarrow$ [LDE, LÁE $x(t)$] $\rightarrow y(t)$ $y(t)$: a **LDE**, vagy a **LÁE** analitikus vagy numerikus megoldása

$u(t) \rightarrow$ [*Súlyfüggvény* $w(t)$] $\rightarrow y(t)$ $$y(t)=\int_0^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$u(t) \rightarrow$ [*Átmeneti függvény* $v(t)$] $\rightarrow y(t)$ $$y(t)=u(0)v(t)+\int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau}v(t-\tau)d\tau$$

Laplace-transzformált $u(s) \rightarrow$ [*Átviteli függvény* $W(s)$] $\rightarrow y(s)$ $$y(s)=W(s)u(s) \quad y(t)=L^{-1}\{W(s)u(s)\}$$

Fourier-transzformált $u(j\omega) \rightarrow$ [*Frekvencia függvény* $W(j\omega)$] $\rightarrow y(j\omega)$ $$y(j\omega)=W(j\omega)u(j\omega) \quad y(t)=F^{-1}\{y(j\omega)\}$$

A rendszerjellemző függvények egymással is szoros kapcsolatban vannak, nevezetesen:

MÁS JELÖLÉSSEL:

$$g(t)=\int^t h(t)\,dt$$

$$h(t)=g'(t)$$

$$v(t)=\int_0^t w(t)dt \qquad \frac{dv(t)}{dt}=w(t) \qquad W(s)=L\{w(t)\}=\frac{y(s)}{u(s)}$$

$$w(t)=L^{-1}\{W(s)\} \qquad v(t)=L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} \qquad W(j\omega)=W(s)\big|_{s=j\omega}$$

súlyfüggvény

arányos összegző
P, I, Σ, H
integráló holtidő

A **SISO** tag $W(s)$ átviteli függvényéhez – az átviteli függvény különféle felbontásainak eljárásaival – hozzárendelhető egy kizárólag lineáris alaptagokat (**P**, **I** és **Σ** tagok) tartalmazó hatásvázlat. Ezen az **I** tagok kimenőjeleit x_i állapotváltozóknak elnevezve, a rendszeregyenlethez egy állapotegyenlet reprezentáció rendelhető. Ezen a hatásvázlaton annyi integrátor szerepel, amennyi a rendszeregyenlet n rendszáma, az állapotegyenlet pedig annyi elsőrendű differenciálegyenletből fog állni, ahány integráló tagja van a hatásvázlatnak. A $W(s)$ átviteli függvény felbontásának sok változata van, szabályozástecnikai alkalmazásokban a *direkt* felbontásnak és a *részlettörtes* felbontásnak van meghatározó szerepe. A részlettörtes felbontás különösen jelentős, mert a rendszeregyenlethez olyan állapotegyenletet rendel, amelynek állapotmátrixa **diagonális**.

Példa
Egy dinamikus, másodrendű **SISO** rendszer $W(s)$ átviteli függvénye és az ennek megfelelő rendszeregyenlete:

$$W(s)=\frac{g_1s+g_2}{s^2+h_1s+h_2}=\frac{y(s)}{u(s)} \rightarrow (s^2+h_1s+h_2)y(s)=(g_1s+g_2)u(s) \rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2}+h_1\frac{dy(t)}{dt}+h_2y(t)=g_1\frac{du(t)}{dt}+g_2u(t)$$

A $W(s)$ pólusai a $s^2+h_1s+h_2=0$ karakterisztikus egyenlet p_1 és p_2 gyökei. Feltételezve, hogy $p_1 \neq p_2$ és a számláló $z=-g_2/g_1$ zérusa sem azonos egyik pólussal sem[2], a $W(s)$ részlettörtre bontása:

[2] Ezt a feltételezést azért kell megtenni, mert $p_1=p_2$ esetében a felbontást a többszörös multiplicitású gyökök esetére érvényes eljárással kellene elvégezni, illetve $z=p_1$ vagy $z=p_2$ esetében (a pólus–zérus kiejtés miatt) a rendszer elsőrendűre egyszerűsödne.

$$W(s)=\frac{g_1s+g_2}{s^2+h_1s+h_2}=\frac{g_1s+g_2}{(s-p_1)(s-p_2)}=\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_2}=\frac{r_1(s-p_2)+r_2(s-p_1)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

****

$$g_1s+g_2=(r_1+r_2)s-(r_1p_2+r_2p_1)$$
$$r_1+r_2=g_1,$$
$$-p_2r_1-r_2p_1=g_2$$

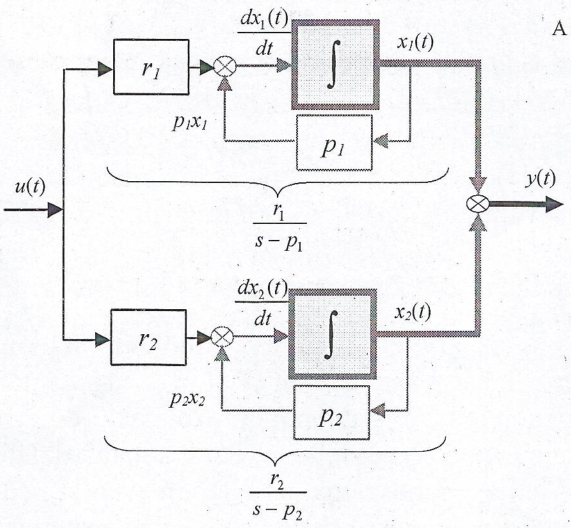
****

$$r_1=\frac{\begin{vmatrix} g_1 & 1 \\ g_2 & -p_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -p_2 & -p_1 \end{vmatrix}}=\frac{g_1p_1+g_2}{p_1-p_2} \qquad r_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & g_1 \\ -p_2 & g_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -p_2 & -p_1 \end{vmatrix}}=\frac{g_2+g_1p_2}{-p_1+p_2}$$

Az $r_1/(s-p_1)$ tényező legyen az $x_1(s)/u(s)$, az $r_2/(s-p_2)$ tényező $x_2(s)/u(s)$. Ennek alapján az egyes tényezőkhöz tartozó elsőrendű lineáris differenciálegyenletek és az y kimenőjel:

$$(s-p_1)x_1(s)=r_1u(s)\rightarrow sx_1(s)=p_1x_1(s)+r_1u(s) \quad \rightarrow \quad \frac{dx_1(t)}{dt}=p_1x_1(t)+r_1u(t)$$
$$(s-p_2)x_2(s)=r_2u(s)\rightarrow sx_2(s)=p_2x_2(s)+r_2u(s) \quad \rightarrow \quad \frac{dx_2(t)}{dt}=p_2x_2(t)+r_2u(t)$$
$$y(s)=x_1(s)+x_2(s) \quad \rightarrow \quad y(t)=x_1(t)+x_2(t)$$

A részlettörtes hatásvázlat és az ennek alapján felírható állapotegyenlet:



A rendszeregyenlethez rendelt állapotegyenlet:

integrátorok kimenőjele az állapotváltozó

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=p_1x_1(t)+r_1u(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt}=p_2x_2(t)+r_2u(t)$$
$$y(t)=x_1(t)+x_2(t)$$

****

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}}_{B}u(t)$$

$$y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Figyeljük meg, hogy a részlettörtes felbontás az állapotváltozókat **szétcsatoltja** (a $dx_1(t)/dt$ nem függ az $x_2(t)$–től, a $dx_2(t)/dt$ nem függ az $x_1(t)$–től). Ez a rendszeranalízist jelentősen leegyszerűsíti. A bemutatott eljárás természetesen n tetszőleges értékére alkalmazható. A példa egyrészt érzékelteti, hogy az átviteli függvény algebai tört (polinom/polinom) alakjából a rendszeregyenlet közvetlenül felírható, másrészt az átviteli függvény részlettörtre bontására épülő állapotegyenlet állapotmátrixa **diagonális** alakú. A hatásvázlat szemléletesen jeleníti meg a karakterisztikus egyenlet p_i gyökeinek szerepét is. Ha ezek valamelyike pozitív, vagy zérus (p_i>0 vagy p_i=0), az ennek megfelelő integráló tag *pozitívan visszacsatolt*, vagy *visszacsatolatlan*, ami a **labilitás** biztos jele. A $W(s)$ részlettörtes kifejezésének egy eleme $r_i/(s-p_i)$, ahol r_i a p_i pólushoz tartozó reziduum. Ennek az $r_i/(s-p_i)$ komponensnek, illetve ennek figyelembevételével a $W(s)$ átviteli függvénynek az inverz transzformáltjai ($W(s)$ inverz transzformáltja a tag $w(t)$ súlyfüggvénye):

r_i = reziduum

$$L^{-1}\left\{\frac{r_i}{s-p_i}\right\}=r_ie^{p_it}\rightarrow w(t)=L^{-1}\{W(s)\}=L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{s-p_i}\right\}=\sum_{i=1}^{n}r_ie^{p_it}$$

Ennek alapján is nyilvánvaló, hogy az $u(t)=\delta(t)$ *Dirac deltára* adott $y(t)=w(t)$ válasz $t\to\infty$ mellett kizárólag akkor tart zérushoz, ha $w(t)$ minden komponense zérushoz tart. Ennek feltétele, hogy a p_i pólusok mindegyikének valós része negatív legyen ($real(p_i)$<0 !!!). Ez lényegében a stabilitási kritériumnak a súlyfüggvény alapján történő megfogalmazása.

A $W(s)$ átviteli függvény részlettörteken alapuló felbontása alapján $r_i/(s-p_i)$ komponensű tagok **párhuzamos** kapcsolásáról van szó. Ha a p_i pólusok mindegyike negatív érték, akkor

$$\frac{r_i}{s-p_i}=-\frac{r_i}{p_i}\frac{1}{1+\frac{1}{-p_i}s}=\frac{k_i}{1+sT_i} \qquad k_i=-\frac{r_i}{p_i},\quad T_i=-\frac{1}{p_i}>0$$

Miután $T_i>0$ miatt a $k_i/(1+sT_i)$ *egytárolós arányos tagot* jelent, $W(s)$ – az adott feltételek mellett –ilyen tagok párhuzamos kapcsolásával egyenértékű. Mindezekből az is következik, hogy egy olyan hatásvázlat struktúrában, amelyben egytárolós arányos tagok és összegző tagok szerepelnek, az egytárolós tagok kimenőjelei állapotváltozónak tekithetők, így a rendszeregyenlet ekkor is közvetlenül felírható. A $W(s)$ p1 és p2 pólusokhoz tartozó reziduumai egyébként

$$r_i=\left.\frac{G(s)}{\frac{dH(s)}{ds}}\right|_{s=pi}=\left.\frac{g_1s+g_2}{\frac{d}{ds}(s^2+h_1s+h_2)}\right|_{s=pi}\ \frac{g_1p_i+g_2}{2p_i+h_1}\rightarrow r_1=\frac{g_1p_1+g_2}{2p_1+h_1},\quad r_2=\frac{g_1p_2+g_2}{2p_2+h_1}$$

kifejezések alapján is kiszámíthatók.

A dinamikus rendszer egyik alapvető jelensége a rendszer **stabilis**–, vagy **labilis** tulajdonsága. Ez legegyszerűbben az $u(t)=u_0\mathbf{1}(t)$ ugrás típusú gerjesztésre adott $x(t)$ és $y(t)$ válaszokban mutatkozik meg. Ha az $x(t)$ és $y(t)$ jeleknek az adott $u(t)=u_0$=állandó gerjesztés, és adott $x(0)$ kezdeti feltétel hatására létrejönnek az $x(t)$ állapotváltozó x_0=állandó–, és a $y(t)$ kimenőjel y_0=állandó értékei, a rendszer *stabilis*, mert állandó u_0 bemenőjel hatására az állapotváltozó és a kimenőjel – egy tranziens folyamat lejátszódásának végére – állandó x_0, y_0 értékeikre állnak be. Az állapottér ezen x_0 koordinátákkal rendelkező pontja a rendszer egyensúlyi pontja. Ebben az egyensúlyi pontban (ha ez a stabilitás okán létezik) a állapotsebesség értéke zérus: $dx_0(t)/dt=0$. Nemlineáris esetben az egyensúlyi pontnak az állapottérben kialakuló x_0 koordinátáit a $f(x_0,u_0)=0$ egyenletrendszer x_0–ra való megoldása–, lineáris esetben az $Ax_0+Bu_0=0$ egyenletből az $x_0=-A^{-1}\boldsymbol{B}u_0$ képlet szolgáltatja. Ha a lineáris **SISO** tag a rendszeregyenletével definiált, akkor stabilis rendszer mellett az $u(t)=u_0\mathbf{1}(t)$–re adott $y(t)$ válasz állandósult értéke $y_0=(g_m/h_n)u_0$, mert az egyensúlyi helyzetben az $u(t)$ és az $y(t)$ jelek $u^{(i)}(t)$, $y^{(i)}(t)$, deriváljai zérusok. Ekkor a $k=g_m/h_n=y_0/u_0$ a **SISO** tag átviteli tényezője. A nemlineáris rendszernek **több** egyensúlyi pontja is lehet, a lineáris rendszernek **egyetlen** $x_0=-A^{-1}Bu_0$ állapot–koordinátákkal rendelkező egyensúlyi pontja van.

Labilis rendszerek esetében is létezhet a $f(x_0,u_0)=0$, vagy a $Ax_0+Bu_0=0$ egyenleteknek x_0 megoldása, csak a labilitás okán ez egy virtuális egyensúlyi állapot (labilis egyensúlyi pont), mivel bármilyen kis kitérés hatására ebbe a ponba a labilis rendszer visszaállni nem képes, ennek a labilis egyensúlyi pontnak a környezetét elhagyja. A dinamikus rendszerek stabilitáselmélete *Ljapunov* stabilitási tételeire épül, de a lineáris rendszereknek viszonylag egyszerű stabilitási kritériumai is vannak (pl. *Hurwitz* kritérium). Az állapotegyenletével leírt lineáris rendszer aszimptotikusan stabilis, ha $det(\lambda I-A)$ karakterisztikus polinomjának minden λ_i gyöke (az A állapotmátrix minden λ_i sajátértéke) negatív valós részű. A lineáris **SISO** tag rendszeregyenlete alapján a stabilitás feltétele, hogy a

$$\lambda^n+h_1\lambda^{n-1}+h_2\lambda^{n-2}+\ldots+h_{n-1}\lambda+h_n=0$$

karakterisztikus egyenletének λ_i gyökei negatív valós részűek legyenek. A lineáris rendszer állapotegyenletének van analitikus megoldó képlete, és mint ahogy ez ebből látható az $x(t)$ megoldásnak $x_s(t)=exp(At)x(0)$ sajátmozgás–, és $x_g(t)$ gerjesztett mozgás összetevői vannak. Ha az $u(t)\equiv 0$ esetében (gerjesztetlen rendszer) az $x_s(t)$ tranziens folyamat az állapotér origójába, mint egyensúlyi pontba tart, a rendszer *aszimptotikusan stabilis*. Ebben az esetben a gerjesztett rendszer stabilitása is biztosított. A stabilitási feltétel a lineáris rendszer $w(t)$ súlyfüggvénye alapján is megfogalmazható: ha $|w(t)|$ $0<t<\infty$ intervallumon vett

$$\int_{t=0}^{\infty} |w(t)| dt < \infty \qquad \lim_{t \to \infty} w(t) = 0$$

integrálja véges, akkor a lineáris rendszer aszimptotikusan stabilis. Ez egyben azt is jelenti, hogy stabilis lineáris rendszer mellett a súlyfüggvény végértékének zérusnak kell lennie.

A lineáris rendszerelméletnek a nemlineáris rendszerek analízisében is jelentős szerepe van. Ennek lényege, hogy a nemlineáris rendszert az egyensúlyi pontjában linearizálva, az egyensúlyi pont környezetében lejátszódó tranziens jelenségeket egy közelítő lineáris modellel tárgyalhatjuk. *Ljapunov* stabilitási tételei alapján a nemlineáris rendszer egyensúlyi pontjának stabilis vagy labilis tulajdonsága a linearizált modell A állapotmátrixának λ_i sajátérték eloszlása alapján is eldönthető.

Az elméleti alapfogalmakat tartalmazó **1A** és **1B** Füzetekben részleteiben is megalapoztuk a dinamikus rendszerek matematikai modellezésének elveit és gyakorlati módszereit. Mindezek azt a célt szolgálták, hogy a lineáris és a nemlineáris matematikai modellek kezelésében jártasságot adjunk, illetve az alkalmazott eljárásoknak elméleti hátterét is idokoljuk. A lényeg azonban az, hogy az állapotegyenlet felállításában, a numerikus és analitikus megoldásában, a stabilitási kérdések eldöntésében, a megoldások számítógépes eljárásainak alkalmazásában módszereket adunk. Ha a dinamikus rendszert leíró matematikai modell alacsony rendszámú (pl. n: 1~2), van esély a számítások „papír–ceruza" módszer alapján történő **kézi** végrehajtására, bár a számítások ekkor is hosszadalmasak lehetnek. Magasabb rendszámok mellett ez nem járható út, ekkor számítógépes szolgáltatások igénybevétele igencsak indokolt. Ezek legfontosabbika a nemlineáris és lineáris állapotegyenlet–, illetve a lineáris **SISO** tag rendszeregyenletének gépi megoldásai. Lineáris rendszerek analízise során döntő jelentőségű az n fokszámú karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása, ami n>2 esetében szintén gépi módszereket kíván. Az *n–edrendű* lineáris rendszer n fokszámú

$$\lambda^n + h_1\lambda^{n-1} + h_2\lambda^{n-2} + \ldots + h_{n-1}\lambda + h_n = 0$$
$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots\ldots(\lambda-\lambda_i)\ldots\ldots(\lambda-\lambda_n) = 0$$

valós h_i együtthatókkal rendelkező karakterisztikus egyenletének – az algebra alaptétele szerint – n számú λ_i gyöke van, és a polinomos alak gyöktényezős alakban is felírható. Ezek a λ_i gyökök a komplex síkon a valós tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el, stabilis rendszer esetében mindegyik gyök a negatív valós részű félsíkon (a stabilis félsíkon) van. A λ_i gyökök (amelyeket a lineáris dinamikus rendszer **pólusainak** is neveznek) azonban nem csupán a stabilitás kérdésének szempontjából fontosak, hanem az időfüggvények lefolyását is determinálják, mivel ezek $exp(\lambda_i t)$ típusú komponenseket tartalmaznak. Ezek a komponensek $\lambda_i > 0$ és $t \to \infty$ esetében végtelenhez tartanak (labilis rendszer), $\lambda_i < 0$ és $t \to \infty$ esetében zérushoz tartanak (stabilis rendszer). Ha $\lambda_i << 0$ (vagyis λ_i nagy negatív érték), az $exp(\lambda_i t)$ tranziens összetevő gyorsan, rövid idő alatt eltűnik. Ez a tulajdonság a szabályozó méretezése során fontos szerepet kap. A karakterisztikus polinom h_i együtthatói ugyan valósak, de $n \geq 2$ rendszám mellett a λ_i gyökök között konjugált komplex gyökpárok is lehetnek. Ha ilyen gyökpár van, akkor a $u(t) = u_0\mathbf{1}(t)$ gerjesztés hatásának kitett stabilis folyamat csillapodó lengésekkel veszi fel az x_0, y_0 állandósult értékét.

A szabályozási rendszer bármelyik alrendszere stabilis, vagy labilis tulajdonsággal rendelkezhet, de az eredő rendszernek (az alrendszerek esetleges labilitásának ellenére is) természetszerűen **stabilisnak kell lennie**. Ez a követelmény azt jelenti, hogy a rendszert érő $y_A(t) = y_{A0}$=állandó alapérték, és $u_z(t) = u_{z0}$=állandó zavarójel bemenőjelekre előbb–utóbb létre kell jönnie az $u(t)$ irányító jelnek és az $y(t)$ szabályozott jellemzőnek is az $u(t) = u_0$ állandó, $y(t) = y_0$=állandó értéke.