1, $\boxed{8}$

$$y' = \frac{sh^6(2y)}{ch(2y)}\sqrt[5]{3+8x}$$ Szeparálható

$y \equiv 0$ megoldás (1)

Ha $y \neq 0$:

$$\int sh^{-6}(2y)\, ch(2y)\, dy = \int (3+8x)^{1/5}\, dx$$ (1)

$f^{-6}\cdot f'$ alak

(3) $$\frac{sh^{-5}(2y)}{2\cdot(-5)} = \frac{(3+8x)^{6/5}}{6/5}\cdot\frac{1}{8} + C$$ (3)

2, $\boxed{10}$ $y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = 3x^2$; $y(1) = 4$ Lineáris, elsőrendű

(H): $y'(x) = -\frac{2}{x}y(x)$; $y \equiv 0$ mo.

Ha $y \neq 0$: $\int \frac{dy}{y} = -2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -2\ln|x| + C$

$y_{H,ált}(x) = K\cdot x^{-2}$; $K \in \mathbb{R}$ (4)

Inhomogén egyenlet part. megoldása:

$y_{I,p}(x) = K(x)\, x^{-2}$; Beírva az egyenletbe:

$$K'(x)\cdot x^{-2} + \cancel{K(x)\cdot(-2)\,x^{-3}} + \cancel{\frac{2}{x}K(x)\,x^{-2}} = 3x^2$$

$K'(x) = 3x^4$; $K(x) = \int 3x^4\,dx = \frac{3}{5}x^5$; $y_{I,p}(x) = \frac{3}{5}x^5x^{-2} = \frac{3}{5}x^3$

$y_{I,ált}(x) = y_{H,ált}(x) + y_{I,p}(x) = K\cdot x^{-2} + \frac{3}{5}x^3$; $K \in \mathbb{R}$ (4)

Kezdőfeltétel:

$4 = K\cdot 1^{-2} + \frac{3}{5}\cdot 1^3 \Rightarrow K = 4 - \frac{3}{5} = \frac{17}{5}$

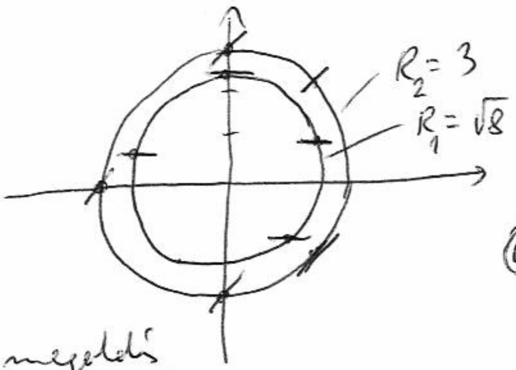
$y_{kezd}(x) = \frac{17}{5}\cdot x^{-2} + \frac{3}{5}x^3$ (2)

3, $\boxed{8}$ $y' = x^2 + y^2 - 8$

a, izoklinák: $x^2+y^2-8=K$

$K=0$: $x^2+y^2=8$; $\sqrt{8}$ sugarú kör

$K=1$: $x^2+y^2=9$; 3 sugarú kör



(4)

b, Legyen $y(x)$ a $(2,-2)$ ponton átmenő megoldás.

$y'(x_0) = x_0^2 + y_0^2 - 8 = 2^2+(-2)^2-8 = 0 \Rightarrow$ lehet szélsőérték (2)

$\frac{d}{dx}$ $y'' = 2x + 2yy'$; $y''(x_0) = 2x_0 + 2y_0 \cdot \underbrace{y'(x_0)}_{0} = 2\cdot 2 = 4 > 0$

$\Rightarrow$ lokális minimuma van a megoldásnak $(2,-2)$-ben. (2)

4, (H): $y''-y'-6y=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-6=(\lambda-3)(\lambda+2)=0$

$\boxed{12}$ $\lambda_1=+3$; $\lambda_2=-2$; $y_{H,ált}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (4)

A zavaró fv.: $f(x) = 4\,ch(3x) = 2e^{3x} + 2e^{-3x}$ (1); az első tagnál külső rezonancia van.

$y_{I,p}(x) = Axe^{3x} + Be^{-3x}$ (2) $\quad /\cdot(-6)$

$y'_{I,p}(x) = Ae^{3x} + 3Axe^{3x} - 3Be^{-3x} = A(3x+1)e^{3x} - 3Be^{-3x}$ $\quad /\cdot(-1)$

$+$ $y''_{I,p}(x) = 3Ae^{3x} + 3A(3x+1)e^{3x} + 9Be^{-3x} = A(9x+6)e^{3x} + 9Be^{-3x}$

$2e^{3x}+2e^{-3x} = Ae^{3x}\underbrace{(-\cancel{6x}-\cancel{3x}-1+\cancel{9x}+6)}_{5} + Be^{-3x}\underbrace{(-6+3+9)}_{6}$

$2=5A \Rightarrow A=\frac{2}{5}$ $\qquad y_{I,p}(x) = \frac{2}{5}xe^{3x} + \frac{1}{3}e^{-3x}$ (3)

$2=6B \Rightarrow B=\frac{1}{3}$

$y_{I,ált}(x) = y_{H,ált}(x) + y_{I,p}(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x} + \frac{2}{5}xe^{3x} + \frac{1}{3}e^{-3x}$ (2)

5, a, [3] $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2-2n+3}{(n+3)^2}}_{a_n}$ divergens, mert

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{n^2+6n+9} = 1 \neq 0$, tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. 3

[5] b, Igazoljuk, hogy Leibniz-sorral van szó, tehát a sor konvergens.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{n-4}{n^2}}_{c_n}$

- váltakozó előjelű ✓ 1
- $c_n = \frac{n-4}{n^2} \to 0$ ✓ 1
- $c_{n+1} = \frac{n+1-4}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} \frac{n-4}{n^2} = c_n$ ✓

$$n^2(n-3) \overset{?}{\leq} (n-4)(n^2+2n+1)$$
$$\cancel{n^3} - 3n^2 \overset{?}{\leq} \cancel{n^3} - 2n^2 - 7n - 4 \quad 2$$
$$0 \leq n^2 - 7n - 4 \text{ teljesül, ha } n \geq 8$$

Tehát ha $n \geq 8$, akkor Leibniz-sor, így konvergens 1

[4] c, $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n+4}{n^{3/2}}}$

$0 < a_n \sim \frac{n}{n^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$, és $\sum_n \frac{1}{n^{1/2}} = \infty$ $(1/2 = \alpha < 1)$

Sejtés: divergens $\Rightarrow$ Minoráns krit.

$a_n = \frac{n+4}{n^{3/2}} \geq \frac{n}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{1/2}} := b_n$, és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, tehát 2 1

az eredeti sor divergens. 1