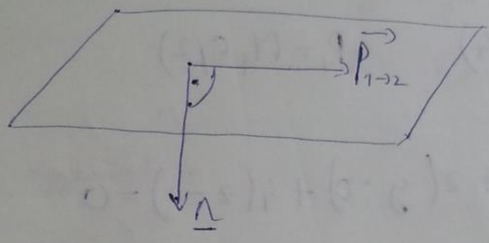
2013 május 28

MATEMATIKA

(1) $P_1(1,0,2)$. $P_2=(4,1,0)$ $\quad \underline{n}$ normálvektora

sík $\to S$ $\quad \underline{n}=(2,2,\alpha)$

a) $\overrightarrow{P_{1\to 2}} = ((4-1);(1-0);(0-2)) = (3;1;-2)$



Ha $\overrightarrow{P_{1\to 2}} \perp \vec{n}$, akkor $\underbrace{\overrightarrow{P_{1\to 2}} \cdot \vec{n}}_{\text{skaláris szorzás}} = 0$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a|\cdot|b|\cos\alpha$

vagy térben

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

!

$(3,1,-2)\cdot(2,2,\alpha) = 0$

$3\cdot 2 + 1\cdot 2 + (-2)\cdot\alpha = 0$

$8 = 4\alpha$

$\boxed{4 = \alpha}$

b) Sík egyenlete $ax+by+cz=d$ alakban ahol $x=1$

Tétel: $\vec{n}=[A, B, C]$ $P_0(x_0, y_0, z_0)$

sík általános egyenlete: $Ax+By+Cz=D$

sík alapegyenlete: ~~[illegible]~~ $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Alapegyenletből kiindulva:

$\vec{n}(2, 2, 4)$ $P_1=(1, 0, 2)$

$$2(x-1)+2(y-0)+4(z-2)=0$$

$$2x-2+2y+4z-8=0$$

$$2x+2y+4z=10$$

$$\underline{\underline{x+y+2z=5}} \rightsquigarrow \text{általános egyenlet}$$

c)

$\underline{\underline{\overrightarrow{P_{1\to2}}=(3, 1, -2)}}$ melynek harmadik koordinátája -2

d) $P_1(1, 0, 2)$ $\vec{v}=(2, 2, 4)$ (eddig ez volt a normálvektor)

(irányvektor)

Tétel:

Az egyenes egyenlete

P_0 helyvektora $= (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v}$ irányvektor $= (v_1, v_2, v_3)$

t futóváltozó $-\infty < t < \infty$

$$r(t) = P_0 + t v \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= x_0 + t v_1 \\ y &= y_0 + t v_2 \\ z &= z_0 + t v_3 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenes egyenlete:

$$x = 1 + t \cdot 2$$
$$y = 0 + t \cdot 2$$
$$z = 2 + t \cdot 4$$

visszahelyettesítve

Kérdés $P_3 = ? = (?, 2, ?)$

$$z = 0 + t \cdot 2$$
$$t = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{P_3 = (3, 2, 6)}$$

x, z meghatározása $z = 2 + 1 \cdot 4 = 6$

$$X = 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

Tétel:

Az egyenes egyenlete

P_0 helyvektora $= (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v}$ irányvektor $= (v_1, v_2, v_3)$

t futóváltozó $-\infty < t < \infty$.

$$r(t) = P_0 + t v \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \\ z = z_0 + t v_3 \end{cases}$$

Az egyenes egyenlete:

$$x = 1 + t \cdot 2$$
$$y = 0 + t \cdot 2$$
$$z = 2 + t \cdot 4$$

Kérdés $P_3 = ? = (?, 2, ?)$ visszahelyettesítve

$$2 = 0 + t \cdot 2$$
$$t = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{P_3 = (3, 2, 6)}$$

x,z meghatározása $z = 2 + 1 \cdot 4 = 6$

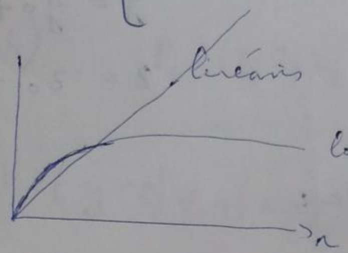
$$x = 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

②

a, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}}$

$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ logaritmikusan

$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} \text{ha } \alpha>0 \longrightarrow \infty \\ \text{ha } \alpha<0 \longrightarrow 0 \text{ lineárisan} \end{cases}$



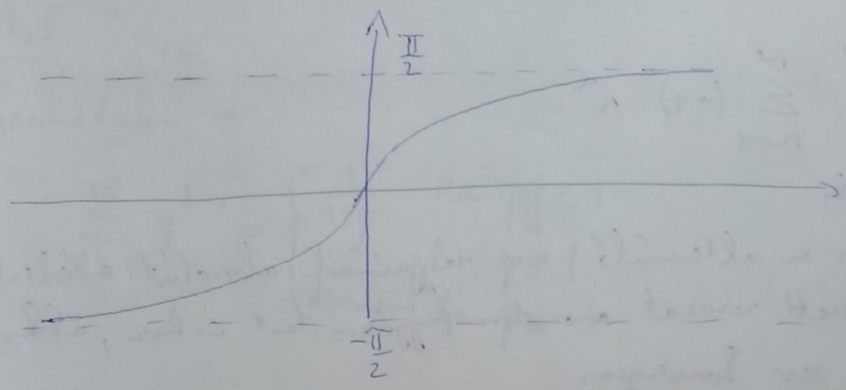
Lineáris a gyorsabb, ezért $\alpha<0$ esetben a nevező gyorsabban tart nullához mint a számláló, ezért az tört „növekedni fog" (egyhez tart) tehát a sor divergens

Ha $\alpha>0$ akkor konvergens, mert $\lim \frac{0}{\infty} = 0$

b, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n^{\alpha}$

Tétel:
Nevezetes sor:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergens, ha $\alpha>1$ Egyébként divergens



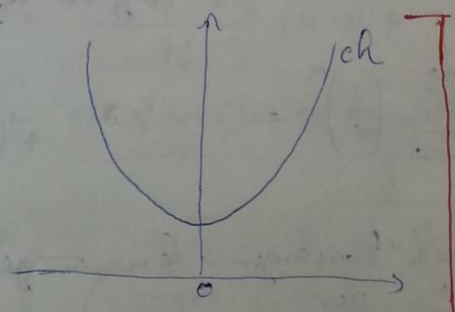
Ha $\alpha > 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n^\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$ A sor divergens lesz

Ha $\alpha < 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$, de ez egy nevezetes sor ami csak akkor ~~tud~~ konvergens ha (esetünkben) $\boxed{\alpha < -1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} n^\alpha$



Nincs ilyen alfa

Mindig divergens

Minden esetben divergens, mert bármilyen érték van a ch() függvényen belül annak soha nem lesz nulla az értéke d/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{\alpha}$

Tétel:
Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat monoton fogyóan tart 0-hoz, akkor a sor konvergens

Ha $\alpha > 0$, akkor

$\lim_{n \to \infty} (-1)^n n^{\alpha} = \cancel{\alpha}\ \infty$ $\Rightarrow$ ezért a sor divergens

Ha $\alpha < 0$, akkor

$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$ $\Rightarrow$ de ez egy nevezetes sor így csak $\alpha < -1$ -ről lesz konvergens a fenti Tétel alapján, amely itt teljesül

3

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n =$$

$\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ $\Rightarrow$ konvergens lesz a geometriai sor

És ennek összege $\frac{1}{1-\left(\frac{1}{e}\right)} = \underline{\underline{\frac{e}{e-1}}}$

Tétel

Geometriai sor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty & \text{ha } q \geq 1 \\ \text{divergens} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

(4)

Tétel:

Taylor-sor az x_0 ~~pont körül~~ helyen:

$$g(x) = g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{g'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 +$$

$$+ \dots + = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

a/ $\cos x^3$ $\quad x=0$ helyen

$$g(x) = \cos(0^3) + \frac{-\sin(x_0^3)\cdot 3x_0^2}{1!}(x-0) + \frac{-\cos(x_0^3)\cdot 3x_0^2\cdot 3x_0^2 + (-\sin(x_0^3))6x_0}{2!}\cdot$$

$$\cdot(x-0)^2 + \frac{-36x_0^3\cdot\cos(x_0^3) + (-9x_0^4)3x_0^2(-\sin(x_0^3)) - [\cos(x_0^3)\cdot 6x_0 \cdot 3x_0^2 + -\sin(x_0^3)\cdot 6]}{3!}\cdot$$

$$\cdot(x-0)^3 =$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$\cos(x^3) = 1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{18}}{6!}$$

$$g(x) = 1 + 0 +$$

csak akkor lesz nullától különböző tag, ha x együtthatói 0-ák és mellette cos áll → első alkalommal 6. deriváltnál lesz ilyen

$x=0$ helyen

b, $\ln(1+x^2) \cancel{= \ln(1+0) + \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{1!}(x-0) + \ldots}$

$$\ln(1+x^2)' = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\ln(1+x^2)'' = \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2-2x^2}{1+2x^2+x^4}\Bigg|_{x=0} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\ln(1+x^2)''' = \frac{-4x(1+2x^2+x^4) - \left((2-2x^2)\cdot(4x+4x^3)\right)}{(1+2x^2+x^4)^2}$$

b, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

5 $\ln(1+x^2) = \cancel{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4} - \frac{x^{12}}{6}} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4}$

$f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}$ $\qquad f(0,0) = 0$ az origóban

Tétel:

Deriválás definíciója:

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Létezik az eredeti függvény adott pontbeli parciális deriváltja ha létezik ilyen határértéke (~~végtele~~ nem végtelen) az eredeti függvénynek a,

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \underline{\underline{0}}$$

b, $$f'_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \underline{\underline{1}}$$

6

Tétel.

Gradiens: Differenciáloperátor amely skalármezőkre alkalmazható és vektormező az eredménye

Derékszögű koordináta rendszerben:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

Tétel:

Iránymenti derivált;

Ha a függvény differenciálható az adott pont környezetében, akkor az iránymenti derivált nem más, mint az adott irányú normált vektor és a gradiens ~~szorzata~~ skalárszorzata (számot kapunk eredményül ha behelyettesítünk az adott pontbeli értékkel)

$$D_{\vec{v}} f = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{v}$$

a) $f(x, y) = x^2 + y^4 - 32y$

$$\text{grad} f = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \vec{e_x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \vec{e_y} =$$

$$= 2x \cdot \vec{e_x} + (4y^3 - 32)\, \vec{e_y}$$

$$\underline{\text{grad} f = (2x, 4y^3 - 32)}$$

b) iránymenti derivált $\vec{e} = (4, 3)$ irányba a $P(2, 1)$ helyen

normálás:

$$|\vec{e}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\vec{e_n} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$D_{\vec{e_n}} f\Big|_{(2,1)} = \frac{\partial f}{\partial \vec{e_n}} = \text{grad} f \cdot \vec{e} =$$

$$= 2x \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5}(4y^3 - 32)$$

Behelyettesítés

$$= 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5}(4 \cdot 1^3 - 32) = \frac{16}{5} - \frac{84}{5} = \underline{\underline{-\frac{68}{5}}}$$

JELEK ÉS RENDSZEREK

1

Tétel:

Hatásos teljesítmény $P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$ [W]

teljesítménytényező

Meddő teljesítmény $Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin\varphi$ [var]

$P = 2MW$

$Q = 1Mvar$

$\cos\varphi = ?$

$$\frac{Q}{P} = tg\,\varphi = \frac{\cancel{U}\cancel{I}\sin\varphi}{\cancel{U}\cancel{I}\cos\varphi} = \frac{1Mvar}{2MW} = \frac{1}{2}$$

$\varphi = 26{,}57°$

$\cos\varphi = \underline{0{,}89}$.

2

Tétel:

Ha a szekunder oldalon rövidrezárjuk a transzformátort, a primer oldalon leesik a feszültség. A feszültségesés százalékos arányát dropnak nevezzük. (Jele: ε)

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_x^2}$$

A nagy és kis feszültségű oldalon így keletkező impedanciák a következők

$$Z^N = \frac{(U_n^N)^2}{S_n} \cdot \frac{\varepsilon^N}{100}$$ ⇝ nagy feszültségű oldal

S_n ⇝ névleges

$$Z^K = \frac{(U_n^K)^2}{S_n} \cdot \frac{\varepsilon^K}{100}$$ ⇝ kis feszültségű

(Megjegyzés: Ekkor már az U és I értékeknél nem kell figyelembe venni a dropot)

$$n = \frac{U_{1n}^N}{U_{2n}^K} = \frac{230\,V}{115\,V}$$

$S_n = 4{,}8\ kVA$

$U_1^N = 10\ V_{eff}$

$\varepsilon_r = 4\%$

$\varepsilon_x = 3\%$

$$\varepsilon = \sqrt{4^2+3^2} \doteq 5\%$$

$$Z^K = \frac{(U_n^K)^2}{S_n} \cdot \frac{\varepsilon}{100} = \frac{150^2}{4{,}8k} \cdot \frac{5}{100} = 0{,}13776\ \Omega$$

$$U_1^K = \frac{U_1^N}{n} = \frac{10V}{2} = 5V$$

$$I_1^k = \frac{U_1^k}{Z^k} = \frac{5V}{0{,}13776V} = \underline{\underline{36{,}3\ A}}$$

③ ~~?~~ lásd később $\quad P_{3F} = 3\, U_{eff} \cdot I_1 \cos\varphi_1 = \underline{\underline{120\ kW}}$

④

$$u(t) = 100 \cos(\omega_0 t + 30°)\ V$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}}{1000} \sin(\omega_0 t + 75°)\ A = \frac{\sqrt{2}}{1000} \cos(\omega_0 t - 15°)\ A$$

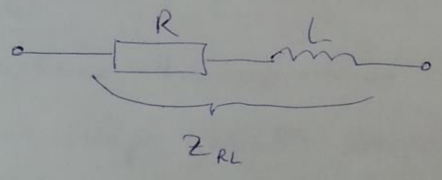
soros RL $\quad R, L = ?$

$$\overline{U}(t) = 100 \cdot e^{j30°}$$

$$\overline{I}(t) = 0{,}0014 \cdot e^{-j15°}$$

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}(t)}{\overline{I}(t)} = \frac{100 \cdot e^{j30°}}{0{,}0014 \cdot e^{-j15°}} = 70710{,}68 \cdot e^{j45°} =$$

$$= 50000 + j50000$$



$$Z_{RL} = R + j\omega_0 L$$

$$Z_{RL} = \overline{Z}$$

$$R + j\omega_0 L = 50000 + j50000$$

$$\underline{\underline{R = 50\ k\Omega}}$$

$$\cancel{j}\omega_0 L = \cancel{j}\,50000$$

$$\underline{\underline{L = 5\ H}}$$

(5)

Tétel:

Nem a valós részét kunem amplitúdóját kell venni!

Fourier sor komplex Fourier együtthatóból:

$$U_0 = \bar{U}_0^c \qquad U_k^A = 2\,\mathrm{Re}\{\bar{U}_k^c\} \qquad U_k^B = -2\,\mathrm{Im}\{\bar{U}_k^c\}$$

valós együttható — komplex együttható

$U_0^c = 5V \qquad U_1^c = 2e^{j30°} \qquad U_2^c = 0{,}5\,e^{j40°} \qquad T = 10ms$

alapharmonikus együttható

$$\omega_0 = \frac{1}{T}\cdot 2\pi = 0{,}2\pi$$

$$2\,\mathrm{Re}\{U_1^c\}\cos(\omega_0 t + \varphi) = \underline{\underline{2\cdot 2\cos(0{,}2\pi t + 30°)}}$$

(6)

Tétel:

$$f(t) = \varepsilon(t)\, e^{-\alpha\cdot t}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}$$

amplitúdóspektrum

$$|F(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{\omega^2+4}}$$

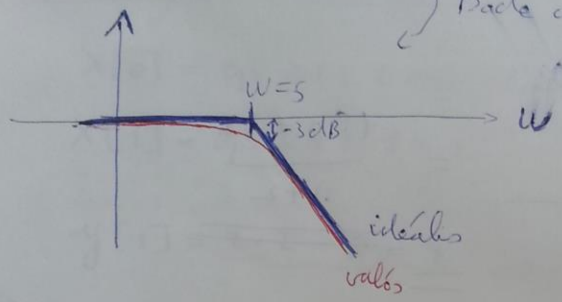
$f(t) = ?$

$$\underline{\underline{f(t) = 5\cdot\varepsilon(t)\cdot e^{-2t}}}$$

(7)

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+5}$$

$$\left.H(s) = \frac{1}{s+5}\right\}$$ Bode diagram



$s+5=0$

$s=-5$

sávszélesség $\boxed{5\,\mathrm{Mrad/s}}$

(8)

Tétel:

Laplace-transzformáció

Csak belépő jelekre vonatkozik ezért az $\varepsilon(t)$-t nem kell figyelembe venni az odatranszformálásnál.

$x(t)$	$\delta(t)$	$\varepsilon(t)$ konstans	t	$e^{-\alpha t}$	$\cos\omega_0 t$	$\sin\omega_0 t$	$x(t-\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)$
$X(s)$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$X(s)\,e^{-s\tau}$

válasz: $y(t)=\varepsilon(t)\left(10+5\cdot e^{-2t}\right)$

gerjesztés: $\varepsilon(t)$ ~ egységugrás

$H(s)=?$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} =$$

$$Y(s) = \frac{10}{s} + \frac{5}{s+2} = \frac{10s+20+5}{s(s+2)} = \frac{10s+25}{s(s+2)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(s) = \frac{\frac{10s+25}{\cancel{s}(s+2)}}{\frac{1}{\cancel{s}}} = \underline{\underline{\frac{10s+25}{s+2}}}$$

9

$p_1 = -2+j$

$p_2 = -2-j$

mindent áteresztő

$Z \xrightarrow[\text{tükrözés}]{} p$

Im tengelyre

$z_1 = 2+j$

$z_2 = 2-j$

$H(0) = 5$

$$H(s) = A_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)} =$$

$$H(s) = 5 \cdot \frac{(s-(2+j))(s-(2-j))}{(s-(-2+j))(s-(-2-j))} =$$

$$= 5 \cdot \frac{(s-2-j)(s-2+j)}{(s+2-j)(s+2+j)} =$$

mindent mindennel ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ szorozni kell

$$= 5 \frac{s^2-4s+4-j^2}{s^2+4s+4-j^2} = 5 \frac{s^2-4s+5}{s^2+4s+5} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{20s^2-20s+25}{s^2+4s+5}}}$$

(10)

$$x[k+1] = 0{,}5\,x[k] + 2\,u[k]$$

$$y[k] = 2\,x[k] - u[k]$$

impulzusválasz $k = 1$?

$$u = \begin{cases} [0]\text{-ban } 1 \\ \text{egyébként } 0 \end{cases}$$

$$x[0] = 0{,}5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{(nem értelmezett)}$$

$$x[1] = 0{,}5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$y[1] = 2 \cdot 2 - 0 = \underline{\underline{4}}$$

(11) $u[k] = 10\cos(0{,}1\pi k + 0{,}4\pi)$

Késleltető

$$\xrightarrow[10\cos(0{,}4\pi)]{k=0} \boxed{-1} \xrightarrow[]{k=-1}$$

$$\underbrace{\underline{\underline{10}}}_{\text{amplitúdó}} \cos\big(\underbrace{-0{,}1\pi + 0{,}4\pi}_{\underline{\underline{0{,}3\pi}}\ \text{fázis}}\big)$$

(12)

$$H(e^{j\vartheta}) = e^{j2\vartheta} + 2 + 3e^{-j\vartheta} + 4e^{-j2\vartheta}$$

Impulzusválasz?

$$h[k] = \delta[k+2] + 2\delta[k] + 3\delta[k-1] + 4\delta[k-2]$$

(13)

[Tétel: G-V stabilitás példán keresztül

$$y[k] - 2y[k-1] = 0{,}5\,u[k-1] - u[k-2]$$

↳ átviteli függvény

G-V stabil-e?

Homogén megoldásnál (ahol a gerjesztés nulla) keressük a G-V stabilitás kritériumát

$y[k] = c \cdot \lambda^k$ Ilyen alakban keressük a választ

Jelen esetben ez:

$$c \cdot \lambda^k - 2 \cdot c \cdot \lambda^{k-1} = 0 \quad /:c$$

$$\lambda^k - 2\lambda^{k-1} = 0 \quad /:\lambda^{k-1}$$

$$\lambda - 2 \cdot 1 = 0$$

$$\lambda = 2$$

A G-V stabilitás feltétele: $\forall\, |\lambda_i| < 1$

Jelen esetben a rendszer nem G-V stabil,

~~[illegible]~~ (de nem ez volt a kérdés / azonban létezik)

Átviteli függvény?

Tétel: Diszkrét átviteli függvény átírása Z tartományba

$$a[k-n] = a \cdot z^{-n}$$

$$y - 2y \cdot z^{-1} = 0{,}5 \cdot u z^{-1} - u \cdot z^{-2}$$

$$y(1-2z^{-1}) = u(0{,}5 \cdot z^{-1} - z^{-2})$$

$$\frac{y}{u} = \frac{0{,}5 \cdot z^{-1} - z^{-2}}{1-2z^{-1}}$$

14

Tétel:

$u[k]$, $v[k]$, $w[k]$ diszkrét idejű ~~függ~~ belépő jelek kapcsolatát a $w[k] = u[k] * v[k]$ összefüggés írja le, amelyben a $*$ a konvolúció műveletét jelöli. Ekkor a z transzformáltakra a következő összefüggés igaz:

$$W(z) = U(z) \cdot V(z)$$

15

Tétel:

Mintavételezés: a mintavett jel frekvenciájának és a mintavételi frekvenciának arányosnak kell lennie a következő módon

$$\frac{K}{M} = \frac{f_{jel}}{f_{mintavételi}} \quad \text{ahol } K, M \in N$$

5

$x(t) = 5\cos(2\pi t)$ — $T = 0{,}75$ a mintavétel periódusa

$\omega = 2\pi \cdot f_{jel}$

$2\pi = 2\pi f_{jel}$

$f_{jel} = 1$

$$f_{mintavételi} = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

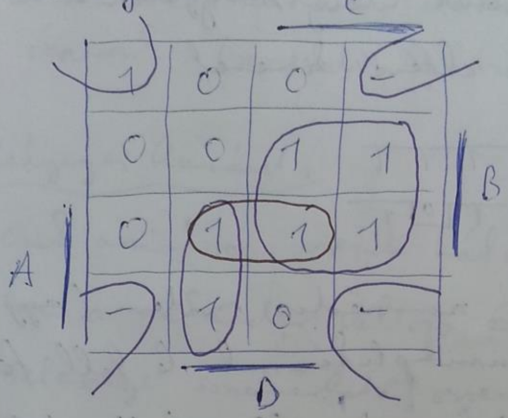
$$\frac{k}{M} = \frac{f_{jel}}{f_{mintavételi}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$ ✓ jó lesz a mintavétel

Mi lesz a diszkrét időfüggvénye?

$$x(t)_{mintavett} = 5\cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}}\,\ell\right) = \underline{5\cos\left(\frac{3\pi}{2}\,\ell\right)}$$

DIGITÁLIS TECHNIKA

(1) Kétszintű hazárdmentes diszjunktív algebrai alak ha funkcióilag nem közömbös.



primimplikánsok

hazárd megszüntetése

$$F = BC + \bar{B}\bar{D} + A\bar{C}D + AB\bar{D}$$

Tétel:

minterm: függvényhez tartozó összes független változó ÉS kapcsolata, amelyben a változók ellenek ponáltak vagy negáltak.

Pl. $\bar{A}\bar{B}C$ $\bar{A}B\bar{C}$ (3 független változós rendszer esetén)

$\cancel{BC}$ nem minterm, mert A nem szerepel

maxterm: ... VAGY kapcsolata ...

diszjunktív: a független változók ÉS kapcsolatainak VAGY kapcsolata

konjunktív: a független változók VAGY kapcsolatainak ÉS kapcsolata

statikus hazárd: ha szomszédos bemeneti jelváltozásnál nincs betervezett kimeneti változás, de a kimeneten rövid ideig megjelenik a statikus értéktől eltérő kimenet

Pl.: várt: 1 1 1

tapasztalt: 1 0 1

Kiküszöbölés: minden szomszédos minterm (vagy maxterm) párt legalább egy primimplikánssal le kell fedni. A közömbös értékeket csak akkor kell lefedni primimplikánssal ha azok a bemeneten előfordulhatnak.

Funkcionális hazárd: ha egyszerre egynél több bemenet változik
↳ kombinációs hálózatnál

(2)

következő állapot

kimenet (aktuális!!)

y_1y_2 \ x	0	1
00	0,0	
01		
10		
11		

1 → bemenet

aktuális állapot: 00, 01, 10, 11

a)

y_1y_2 \ x	0	1
00	00,00	10,00
01	00,01	11,01
10	00,10	11,10
11	00,11	11,11

→ soha nem fordulhat elő 01-es kimenet, ezért ebbe az állapotba nem fogunk soha belekerülni b, Tétel

Rendszer hazárd:

Visszacsatolásnál időkésleltetési különbségek vannak (sorrendi hálózatnál)

Lényeges hazárd:

Csak aszinkron sorrendi hálózatoknál jelentkezik ha a szekunder változó és a bemeneti változó sebessége összemérhető (versenyhelyzet)

- Statikus, dinamikus hazárd nincs, mert csak 1 szintű a logikai hálózat
- Lényeges nem lehet, mert szinkron a hálózat
- Rendszer hazárd lehet, mert a FF-ek belsejét nem ismerjük → lehet nagyon gyors az első FF

3

$Z = 3X - 2Y$

4 bites előjel nélküli bináris számok

8 bites kettes komplemens ábrázolás szerinti bináris szám

$3 | 1$
$1 | 1$
$0 | 0$

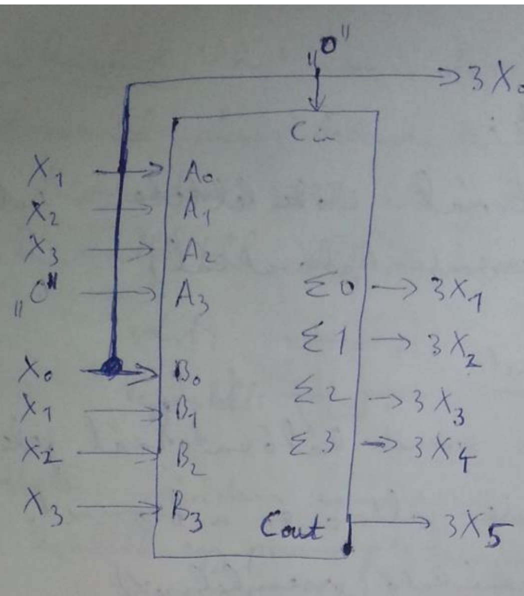
$\boxed{011 = 3}$

$X_3\ X_2\ X_1\ X_0 \cdot 11 =$

$X_3\ X_2\ X_1$ X_0 → kivezethető

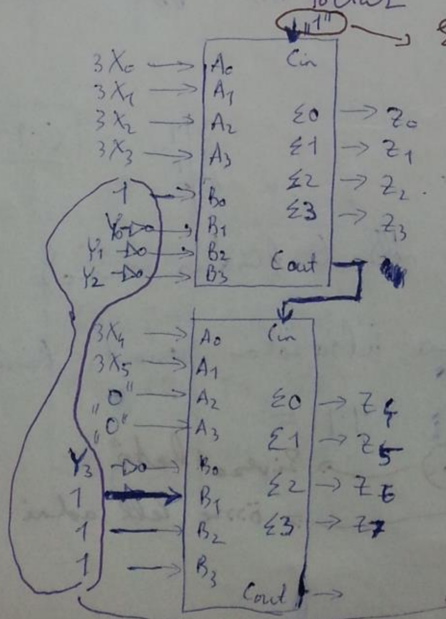
$+\ X_3\ X_2\ X_1\ X_0$ → össze kell adni

X_0



$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & Y_3 & Y_2 & Y_1 & Y_0 & \cdot\ 10 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
+ & Y_3 & Y_2 & Y_1 & Y_0 & \\
\hline
 & Y_3 & Y_2 & Y_1 & Y_0 & 0
\end{array}
$$

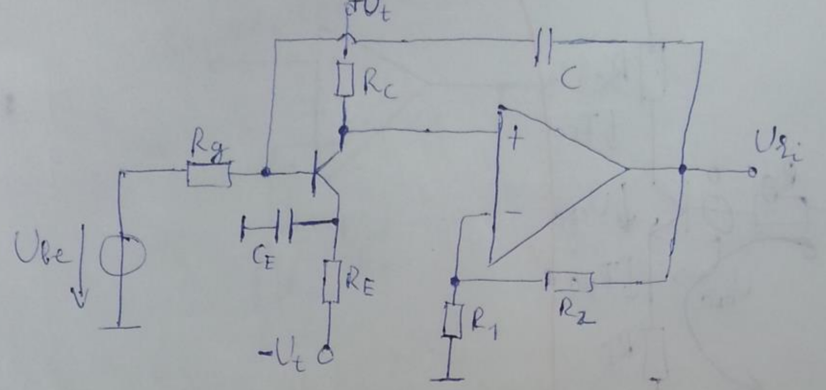
→ egy helyiértékkel feljebb toltuk



→ Kettes komplemensé tételhez kell még hozzáadni egyet

egyes komplemense a 2. Y-nak azaz a negáltja

ELEKTRONIKA



$U_t = 15V$ $R_1 = R_2 = 10\,k\Omega$, $R_g = 10\,k\Omega$, $R_C = 6{,}5\,k\Omega$

$C = 47pF$ $C_E \to \infty$

A műveleti erősítő ideális

Tranzisztor: $U_{BE0} = 0{,}6\,V$

kollektor-emitter maradék feszültség $U_m = 1V$

$\beta = B = \infty$

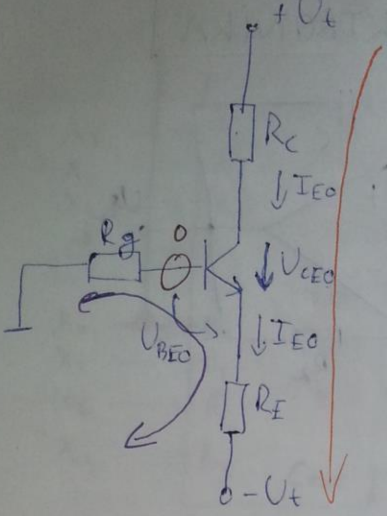
$I_{E0} = 2mA$

$U_T = 26mV$

a, Nagyjelű helyettesítő kép:

$U_{be} = 0$

$C_E \to$ szakadás



Mivel a tranzisztor B-je végtelen, ezért a bázis oldalon nem folyik le áram ⇒ Rg-n nem esik feszültség, így O pont feszültsége 0

Hurokegyenlet

$$-U_t + R_E \cdot I_{E0} + U_{BE0} = 0$$

$$R_E = \frac{U_t - U_{BE0}}{I_{E0}} = \frac{15-0,6}{0,002} = \underline{7,2\,k\Omega}$$

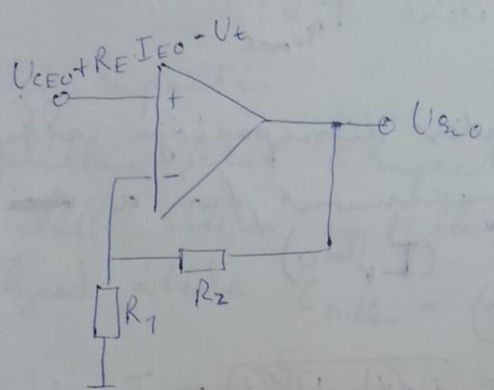
b/ $U_{CE0} = ?$

Hurokegyenlet

$$2U_t - R_E I_{E0} - U_{CE0} - R_c I_{E0} = 0$$

$$U_{CE0} = 2U_t - R_E \cdot I_{E0} - R_c \cdot I_{E0}$$

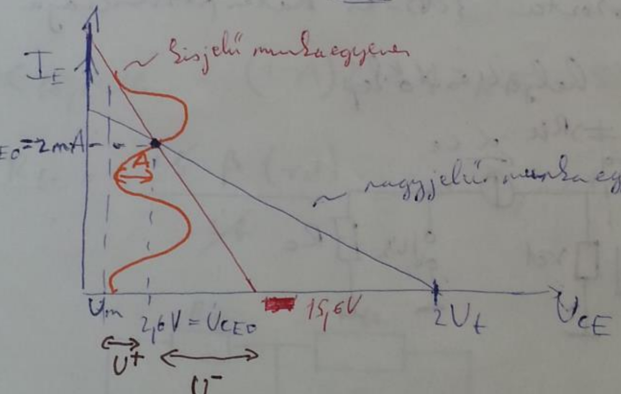
$$U_{CE0} = 2,6V$$



$$\underline{U_{ki0}} = \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\left(U_{CE0}+R_E\cdot I_{E0}-U_t\right) =$$

$$= 2\cdot 2 = \underline{4V}$$

c)



$$U^+ = U_{CE0} - U_m = 1{,}6V$$

$$U^- = R_C\cdot I_C = 13V \quad (I_C = I_E)$$

$$\min\{U^-, U^+\} = 1{,}6V = A$$

$$\underline{U_{kiA}} = 2\cdot A = \underline{3{,}2V} = \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot A$$

d/ $U_{be} = 0$ esetén $P_{D_{tr\,max}} = ?$

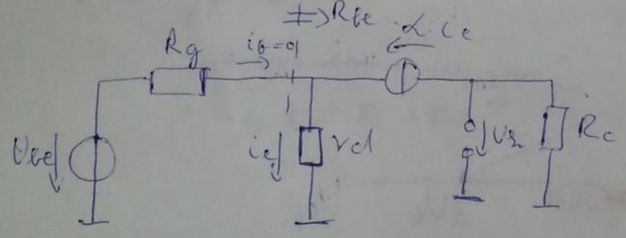
Tétel:

A tranzisztor disszipációja akkor éri el a maximumot, ha a ~~...~~ vezérlés minimális ($I_v = 0$).

$$\underline{\underline{P_{D_{tr\,max}}}} = \overline{i_c(t)\cdot U_{CE}(t)} = I_{E0}\cdot U_{CE0} = \underline{\underline{52\,mW}}$$

e/ $A = \frac{U_{ki}}{U_{be}}$ váltóáramú feszültségerősítésnek a C kapacitás okozta 3dB-es határfrekvenciája?

A=? kisjelű helyettesítő kép



$$r_d = \frac{U_T}{I_{E0}} = 13\,\Omega$$

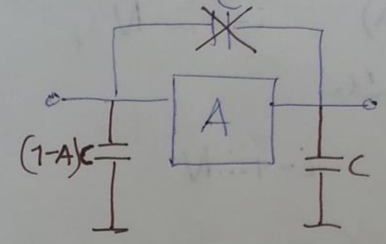
$$A = \frac{U_{ki}}{U_{be}} = \frac{-\frac{\cancel{U_{be}}}{r_d}\cdot \overset{\approx 1}{\alpha} \cdot R_c}{\cancel{U_{be}}} = -\frac{R_c}{r_d}$$

$$U_{ki\,erősítő} = A\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) = -1000$$

Tétel:

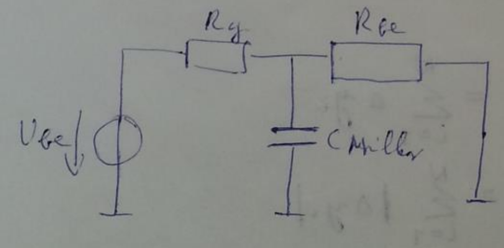
Miller kapacitás

A jelútban fekvő C kapacitás helyettesíthető az alábbi módon egy Miller kapacitással, melynek értéke $C_{Miller} = (1-A)C$



$$C_{be,Miller} = (1-A)C = 47nF$$

$$R_{be} = \frac{\cancel{i_b}\cdot\beta\,(r_d)}{\cancel{i_b}} = \infty \quad \text{, mert } \beta = \infty$$



$$Z_{RC} = \frac{\frac{1}{jC}\cdot R}{\frac{1}{jC}+R} = \frac{\frac{R}{jC}}{\frac{jCR+1}{jC}} = \frac{R}{j(CR)+1}$$

$CR \rightarrow \tau$

párhuzamos RC impedanciája

$$\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} = 2128\ rad/s$$

MÉRÉSTECHNIKA

1

Tétel.

Hibaszámítás:

1, fv. kapcsolat

$$y = f(x) \qquad i = 1 \ldots N$$

2, érzékenység számítás

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad i = 1 \ldots N$$

$$\Delta y_i = c_i \cdot \Delta x_i$$

3, algebrai átalakítás

$$\left.\frac{\Delta y}{y}\right|_{x_i} = \frac{\Delta y_i}{y} \overset{\text{átalakítás}}{=} \ldots = \ldots \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

4, hibaösszegzés

a, előjeles $\Delta y = \sum_{i=1}^{N} \Delta y_i$

b, worst case $\Delta y = \sum_{i=1}^{N} |\Delta y_i|$

c, valószínűségi $\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\Delta y_i)^2}$

2

Tétel:

Véletlen hibák feszültség és áram mérésnél

h_1: mért értékre (of value)

h_2: végértékre (of range)

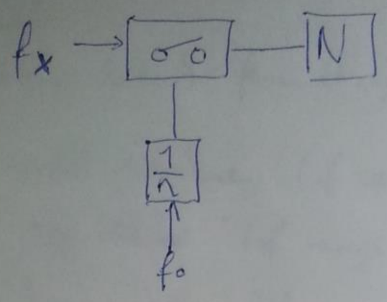
h_3: kvantálási hiba $\quad h_3 = \frac{1}{N}$

pl: 12,345 → N=5

$$\frac{\Delta X}{X} = h_1 + h_2 \frac{X_{max}}{X} + \frac{1}{N}$$

worst case!

4) Frekvencia mérés:



$$N = f_x \cdot \underbrace{\frac{n}{f_0}}_{\sim t_m}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{f_0}{f_x n} = \frac{1}{t_m \cdot f_x}$$

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{N} = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{f_x \cdot t_m}$$

$$f_x = 30000 \, \frac{1}{min} = 500 \, \frac{1}{s}$$

$$h_0 = 100 \, ppm$$

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = ?$$

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = 100 ppm + \frac{1}{1 \cdot 500} = \underline{\underline{0{,}21\,\%}}$$

5) c)

2013 január 3

MATEMATIKA

1

$S_1: x - y + z = -3$

$S_2: 2x + y + z = 1$

a/ $P_{S_3}(0,0)$

$\vec{n}_{S_3} = \vec{n}_{S_1} = (1,-1,1) \xrightarrow{4} \vec{n}_{S_3} = (4,-4,4)$

$S_3: 4x + ay + bz = c$ $\quad$ $a, b, c = ?$ úgy hogy az origón átmenjen a sík

$a = -4$

$b = +4$

$S_3: 4x - 4y + 4z = c$

behelyettesítve $P_{S_3}(0,0,0)$-val igaznak kell lennie az egyenlőségnek, mert az origót tartalmaznia kell a síknak

$4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = c$

$c = 0$

$S_3: \boxed{4x - 4y + 4z = 0}$

b) S_1 és S_2 metszésvonalára eső pont, melynek első koordinátája 2 $P(2, ?, ?) = ?$

2 lehetőség:

- a két sík normálvektorából vektoriális szorzat számítása, amely a metsző egyenes irányvektorát adja meg. Ehhez még meg kell határozni egy, az egyenesen fekvő pont koordinátáit az egyik koordináta önkényes megválasztásával és a többi koordináta kiszámolásával a két sík egyenletrendszeréből. Ebből már felírható az egyenes egyenlete
- Mivel itt az egyik koordináta adott ezért a síkok által alkotott egyenletrendszert kihasználva kiszámolható a pont koordinátái

→ S_1-ből kifejezve z-t

$$z = y - x - 3$$

→ Ezt S_2-be behelyettesítve

$$2x + y - 3 - x + y = 1$$

$$x + 2y = 4$$

→ x-et ismerjük

$$2 + 2y = 4$$

$$\boxed{y = 1}$$

Visszahelyettesítve S_1-be:

$$2-1+z=-3$$

$$z=-3+1-2$$

$$\boxed{z=-4}$$

A keresett koordináták $\boxed{P(2,1,-4)}$

c) $\vec{n}_{S_2?}(?,-4,?)$

S_2-ből felírjuk a normálvektort, majd a megfelelő konstanssal fel kell szorozni, hogy megkapjuk a kérdéses koordinátákat.

$$\vec{n}_{S_2}(2,1,1)$$

$$k\cdot(-4)$$

$$\vec{n}_{S_2?}(-8,-4,-4)$$

(2)

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{0}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{konvergens}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \Rightarrow \text{konvergens}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty\cdot 0 = \infty \Rightarrow \text{divergens}$$

lineárisan tart ∞ 0 logaritmikusan tart

Visszahelyettesítve S_1-be:

$$2-1+z=-3$$

$$z=-3+1-2$$

$$\boxed{z=-4}$$

A keresett koordináták $\boxed{P(2,1,-4)}$

c) $\vec{n}_{S_2?}(?,-4,?)$

S_2-ből felírjuk a normálvektort, majd a megfelelő konstanssal fel kell szorozni, hogy megkapjuk a kérdéses koordinátákat.

$$\vec{n}_{S_2}(2,1,1)$$

$$\cdot(-4)$$

$$\vec{n}_{S_2?}(-8,-4,-4)$$

(2)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{0}{\infty} = 0 \Rightarrow$ konvergens

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \Rightarrow$ konvergens

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty \cdot 0 = \infty \Rightarrow$ divergens

lineárisan tart ∞ — 0 logaritmikusan tart

d/
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \to \infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \Rightarrow \text{konvergens}$$

(3) Mi az összegfüggvénye az alábbi sornak ahol konvergens

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}$$

Ez egy geometriai sor, így akkor lesz konvergens ha $|q|<1$, akkor az összegfüggvény $\frac{1}{1-q}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^4)^n = \frac{1}{1-x^4}$$

Konvergens, ha $|x^4| < 1$

Összegfüggvény: $\boxed{\frac{1}{1-x^4}}$

(4)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{egyébként} \\ 1 & \text{az origóban} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ füzet hátlapján $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Tétel:

L'Hospital szabály:

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$, akkor

alkalmazható az LH szabály, ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}}_{\text{többször alkalmazható a LH szabály}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ha csak egyszer alkalmazzuk

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{LH}{=} \frac{(e^x-1)'}{(x)'} = \frac{e^x}{1} = 1 \rightsquigarrow$$

folytonos a függvény az origóban és akárhányszor deriválható

b/

(5) a/ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

$\sin x^3 = x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \frac{x^{21}}{7!}$

b/ $\ln(e+x^2)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4}$

$\ln(e+x^2) - \ln(e) + \ln(1+\frac{x^2}{e})$

$\cancel{\ln(e+x^2) = \ln(e)\ \ln\left(\frac{x^2}{e}\right)}$

$\ln(e+x^2) = 1 + \frac{x^2}{e} - \frac{x^4}{2e^2} + \frac{x^6}{3e^3} - \frac{x^8}{4e^4}$

(6)

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f(x)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f(x)'' = +2x^{-3} = 2\frac{1}{x^3}$

$f(x)''' = -6x^{-4} = -6\frac{1}{x^4}$

$f(x)'''' = +24x^{-5} = 24\frac{1}{x^5}$

Taylor-sor:

$$g(x) = g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2^2}}{1!}(x-2) + \frac{\frac{2}{2^3}}{\cancel{2!}}(x-2)^2 - \frac{\frac{\cancel{6}}{2^4}}{\cancel{3!}}(x-2)^3 + \frac{\frac{\cancel{24}}{2^5}}{\cancel{4!}}(x-2)^4$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \frac{(x-2)^4}{32}$$

(7) $f(x,y) = x^3 + y^4 + 6x - 7y$

a) grad $f = ?$

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 6$$

$$f'_y(x,y) = 4y^3 - 7$$

$$\text{grad } f = f'_x(x,y) \cdot \vec{e}_x + f'_y(x,y) \cdot \vec{e}_y$$

$$\text{grad } f = (3x^2 + 6 \; ; \; 4y^3 - 7)$$

b) $f(x,y)$-nak az $e = (3,4)$ irányú iránymenti deriváltját a $P = (1,1)$ pontban

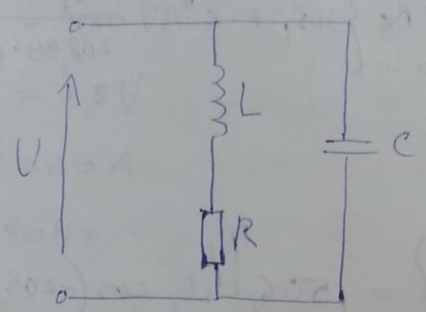
$$\vec{e}_n = \frac{e}{|e|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(\frac{3}{5} \,|\, \frac{4}{5}\right)$$

$$D_{\vec{e}_n} f = \text{grad } f \bullet \vec{e}_n = (3x^2+6)\frac{3}{5} + (4y^3-7)\frac{4}{5}$$

$$D_{\vec{e}_n} f \Big|_{P(1,1)} = (3 \cdot 1^2 + 6)\frac{3}{5} + (4 \cdot 1^3 - 7) \cdot \frac{4}{5} = \underline{\underline{3}}$$

JELEK ÉS RENDSZEREK

1



$R = 10\,\Omega$

$L = 0{,}15\,H$

$C = 58\,\mu F$

$U(t) = 325{,}27 \sin(314{,}16\, t)\ V$

ez lesz a bemenet körfrekvenciája is $\omega = 314{,}16\ \frac{rad}{s}$

$$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos\varphi = \mathrm{Re}\{\overline{U} \cdot \overline{I}\} = U_{eff} \frac{U_{eff}}{R} \cdot \cos\varphi$$

$$Z = (j\omega L + R) \times \frac{1}{j\omega C} = (sL + R) \times \frac{1}{sC} =$$

$$= \frac{(sL+R)\frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{sL}{sC} + \frac{R}{sC}}{\frac{s^2LC + sCR + 1}{sC}} =$$

$$= \frac{sL+R}{s^2LC + sRC + 1} =$$

$$= \frac{j\omega L + R}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1} = \frac{j\, 314{,}16 \cdot 0{,}15 + 10}{-(314{,}16)^2 \cdot 0{,}15 \cdot 58 \cdot 10^{-6} + j\, 314{,}16 \cdot 10 \cdot 58 \cdot 10^{-6} + 1}$$

$$= \frac{10 + j\,47{,}124}{0{,}1413 + j\,0{,}1822} = \frac{48{,}173\, e^{j78{,}02^\circ}}{0{,}2305 \cdot e^{j52{,}21^\circ}} = \boxed{208{,}99\, e^{+j25{,}81^\circ}}$$

$$U(t) = 325{,}27 \cos(314{,}16\, t - 90^\circ) = 325{,}27 \cdot e^{-j90^\circ}$$

~~PZN~~

$$P = Re\left\{ \bar{U} \cdot \frac{\bar{U}}{Z} \right\} = Re\left\{ 325{,}27 \cdot e^{-j90°} \cdot \frac{325{,}27 \cdot e^{-j90°}}{208{,}99 \cdot e^{j25{,}81°}} \right\}$$

$\cancel{P \quad (-0{,}9)}$

$$P = Re\left\{ 506{,}24 \cdot e^{-j205{,}81°} \right\} = 506{,}24 \cdot \underbrace{\cos(-205{,}81°)}_{}$$

teljesítmény tényező

$$\cos\varphi = \cos(-205{,}81°) = \underline{\underline{-0{,}9}}$$

induktív mivel negatív

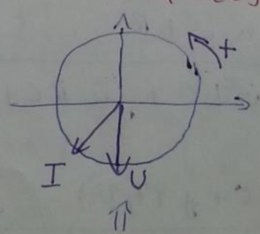
Ha ismét sin-re váltottam volna mindkettő függvényt és azzal számolok, akkor a komplex eredmény is sin-ben jön

NEM EZ VOLT A KÉRDÉS

HANEM A FOGYASZTÓ TELJESÍTMÉNYTÉNYEZŐJE !!!

$$\varphi = 25{,}82°$$

$$\underline{\underline{\cos\varphi = 0{,}9}}$$



$$u(t) = 325{,}27 \cos(314{,}16\, t - 90) = 325{,}27 \cdot e^{-j90°}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{Z} = \frac{325{,}27 \cdot e^{-j90°}}{208{,}99 \cdot e^{j25{,}82°}} = A \cdot e^{-j115{,}82°}$$

(2)

$$n = \frac{U^N}{U^K} = \frac{231}{12}\ \text{V}$$

$S_n = 480\ \text{VA}$

$U^N = 3{,}5\ \text{V}$

$I^K = 20\ \text{A}$

$f = 50\ \text{Hz}$

$\varepsilon = ?$

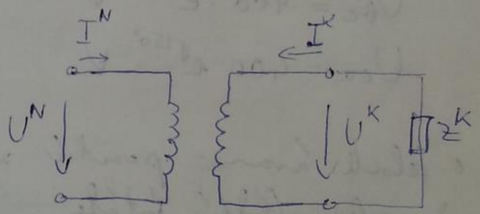
$$n = \frac{U^N}{U^K} = \frac{N^N}{N^K} = \frac{I^K}{I^N} = 19{,}25$$

$$Z^K = \frac{(U_n^K)^2}{S_n} \cdot \frac{\varepsilon}{100} = \frac{12^2}{480} \cdot \frac{\varepsilon}{100} = 0{,}003\,\varepsilon$$

$$\frac{U^K}{Z^K} = I^K \longleftarrow U^K = \frac{U^N}{n} = 0{,}18\ \text{V}$$

$$\frac{0{,}18\ \text{V}}{0{,}003\,\varepsilon} = 20$$

$$\varepsilon = 3\%$$



(3) Tétel:

Szimmetrikus összetevőkre bontás (transzformálás)

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}$$

sorrendi / szimmetrikus összetevők — fázis feszültségek

Fázis feszültségre transzformálás (inverz transzform.)

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \text{zérus sorrendű} \\ \to \text{pozitív sorrendű} \\ \to \text{negatív sorrendű} \end{matrix}$$

$a = e^{j120°}$

$a^2 = e^{-j120°}$

Delta kapcsolás

vonali feszültségek komplex effektív értékei:

$U_{ab} = 400 \cdot e^{j30°}$ V

$U_{bc} = 400 \cdot e^{-j90°}$ V

$U_{ca} = 400\, e^{j150°}$ V

a felvett áram pozitív sorrendű összetevőjének komplex effektív értéke

$I_1 = 10 \cdot e^{-j30°}$

Fázis feszültségre transzformálás:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \cdot e^{-j30°} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$I_a = 10 \cdot e^{-j30°}$ $U_{ab} = 400 \cdot e^{j30°}$

$I_b = 10 \cdot e^{-j150°}$ $U_{bc} = 400 \cdot e^{-j90°}$

$I_c = 10 \cdot e^{j90°}$ $U_{ca} = 400 \cdot e^{j150°}$

Lehet látni, hogy a vonali feszültségek és a fázis áramok között 60°-os szögeltolás van

$\varphi = 60°$, mert

$$P = 3 \underbrace{|I_f| \cdot |U_f|}_{\text{effektív értékek}} \cdot \cos\varphi_1 = 6\,kW$$

4

$$I = \frac{U}{R} = \frac{[mV]}{[\Omega]} = [mA]$$

$$\left.\begin{aligned} Q &= C \cdot U \\ Q &= I \cdot t \end{aligned}\right\}$$

$$I \cdot t = C \cdot U$$

$$[mA] \cdot t = [\mu F] \cdot [mV]$$

$$t = [\mu s]$$

5

$$u(t) = 5V \cdot \cos(\omega t - 2{,}6)$$

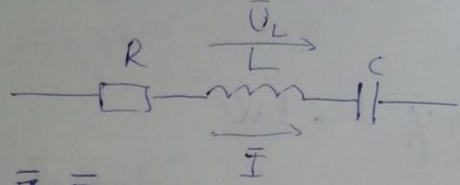
$$\overline{U} = 5 \cdot e^{-j2{,}6}$$

$$\overline{U}_{eff} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j2{,}6} = 3{,}536 \cdot e^{-j2{,}6} = -3{,}0296 - j1{,}8228 \; V$$

⑥ soros RLC $\quad \bar{I} = 15\,mA \cdot e^{j30°}$

komplex amplitúdója (fazorja)

$\bar{U}_L = ?$ $\quad \varphi_{\bar{U}_L} = ?$ ha referenciairány megegyezik az áraméval



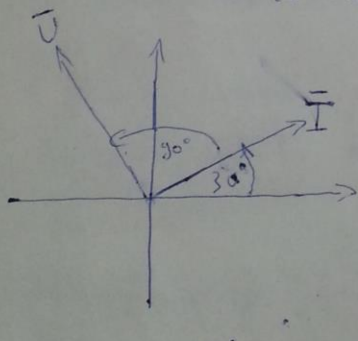
$\bar{U}_L = \bar{Z}_L \cdot \bar{I}$

$\bar{Z}_L = j\omega L = \omega L \cdot e^{j90°}$

$\bar{U}_L = (j\omega L) \cdot 15 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j30°} = \omega L \cdot e^{j90°} \cdot 15 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j30°} =$

$= 15 \cdot 10^{-3} \cdot \omega L \, e^{j120°}$

$\downarrow$



$\underline{\underline{\varphi = 120°}}$ van a tekercs feszültsége és árama között

Egyszerűbben: a tekercsnél a feszültséghez képest 90°-ot késik az áram
ezért a feszültség 30°+90° = 120°-on van

(7)

$R = 200\,\Omega$

$$i(t) = \underset{I_0}{30} + \underset{I_1}{40}\cos(\omega t - 30^\circ) + \underset{I_2}{10}\cos(3\omega t) \quad mA$$

$$P = I_{eff}^2 R$$

$$I_{eff} = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{I_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{\sqrt{2}}\right)^2} = 42{,}426\,mA$$

$$P = (42{,}426\,mA)^2 \cdot 200\,\Omega = \underline{\underline{0{,}359\,W}}$$

(8)

$$X(j\omega) = \frac{5}{j\omega + 2}$$

$$|X(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{\omega^2 + 2^2}}$$

max ha $\omega = 0$ $\quad |X(j\omega)|_{max} = \frac{5}{2}$

$$\frac{5}{2} \cdot 0{,}15 = 0{,}375$$

$$0{,}375 = \frac{5}{\sqrt{\omega^2 + 2^2}}$$

$$0{,}14\,\omega^2 + 0{,}5625 = 25$$

$$\omega = \cancel{8{,}03}\ 13{,}27\ \frac{rad}{s}$$

(9) impulzusválasz

$h(t) = 2\delta(t) - 3\,\varepsilon(t)\,e^{-0{,}5t}$

$H(s) = ?$

Nem kell figyelembe venni Laplace transzformálásnál mert csak azt jelöli, hogy felépő a függvény

$$\frac{\mathcal{L}\{h(t)\} = Y(s)}{U(s)}$$

$$H(s) = \frac{2 - 3\,\frac{1}{s+0{,}5}}{1} = \frac{2s+1-3}{s+0{,}5} = \frac{2s-2}{s+0{,}5}$$

$U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

(10)

átviteli függvény $H(s) = \frac{1-3s}{1+5s}$

Minimálfázisú-e?

Tétel:

Minimálfázisú rendszer:

Folytonos időben:

Olyan G-V stabilis rendszer, amelynek az átviteli függvény minden pólusa a bal félsíkon helyezkedik el és egyetlen zérusa sincs a jobb félsíkon

Diszkrét:

G-V stabilis, egyetlen zérus sincs az egységsugarú körön kívül pólus: $1+5s=0$

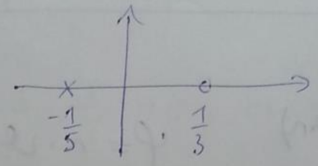
$-1=5s$

$s=-\frac{1}{5}$

zérus $1-3s=0$

$1=3s$

$s=\frac{1}{3}$



Nem minimálfázisú, mert a zérusa pozitív

(11)

$y[k]=0{,}7\,y[k-1]+2u[k-1]$

impulzusválasz $k=2$ ütemre

$u[k]=\delta[k]$, mert impulzusválaszról van szó

$k=0 \quad y[0]=0{,}7\cdot 0+2\cdot 0=0$

$k=1 \quad y[1]=0{,}7\cdot 0+2\cdot 1=2$

$k=2 \quad y[2]=0{,}7\cdot 2+2\cdot 0=\underline{\underline{1{,}4}}$

(12) késleltető

kimeneti jel: $v[k] \xrightarrow{\text{Fourier}} V(e^{j\vartheta})$

bemeneti jel: $u[k] \xrightarrow{\text{Fourier}} U(e^{j\vartheta})=?$

$U(e^{j\vartheta})\cdot H(e^{j\vartheta})=V(e^{j\vartheta})$

$U(e^{j\vartheta})\cdot e^{-j\vartheta}=V(e^{j\vartheta})$

$U(e^{j\vartheta})=\frac{V(e^{j\vartheta})}{e^{-j\vartheta}}$

$\boxed{U(e^{j\vartheta})=V(e^{j\vartheta})\cdot e^{j\vartheta}}$

(13)

$$H(z) = \frac{3}{z^2}$$

$\varphi(\vartheta) = ?$ fáziskarakterisztika

Tétel:

$z^n = e^{j(\vartheta \cdot n)}$ $\quad \varphi = n \cdot \vartheta$

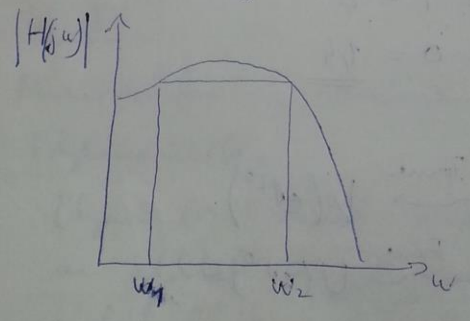
$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{3}{e^{j2\vartheta}} = 3 \cdot e^{-j2\vartheta}$$

$$\varphi(\vartheta) = -2\vartheta$$

(14)

Tétel:

Sávszélesség:



$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$ ahol $\omega_2, \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(j\omega)|_{max}$

sávszélesség: $\Omega = 15 \frac{krad}{s}$

$T_{mintavétel} = ?$

$\Delta\omega = 15 \frac{krad}{s}$

$\Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta f$

$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = 2{,}3873 \text{ kHz}$

Mintavételi tétel: $2B \leq f_{mintavételi}$

$B = \Delta f$

$2\Delta f \leq f_{mintavételi}$

$2 \cdot 2{,}3873 \leq f_{mintavételi}$

$4{,}7746 \leq f_{mintavételi}$

$T_{mintavételi} \leq 0{,}2094 \text{ ms}$

15

Tétel:

Folytonos idejű rendszer diszkrét idejű szimulátora bilineáris transzformáció segítségével.

$$H_D(z) = H_c\left(s = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\right)$$ ahol

T = mintavételi periódusidő

$$H_c(s) = \frac{1}{s+1} \qquad T = 0,1$$

$$H_D(z) = ?$$

$$H_D(z) = H_c\left(s = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{1}{\frac{2}{0,1}\,\frac{z-1}{z+1} + 1} =$$

$$= \frac{1}{20\,\frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{1}{\frac{20z-20+z+1}{z+1}} = \underline{\underline{\frac{z+1}{21z-19}}}$$

DIGITÁLIS TECHNIKA

1

A	B	C	D	F
0	0	0	0	–
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	–

Bemenet: (A, B, C, D)

Kimenet: F

- F=0, ha legalább 3 bemenet 1 értékű

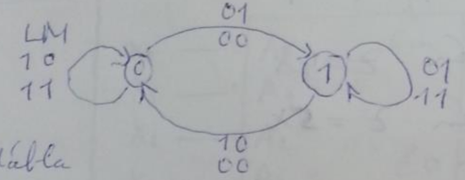
  vagy $D \neq C$ és $A = B$

- egyébként 1

- don't care ahol az összes bemenet azonos értékű

(2)

LM flip-flop állapotgráfja



Állapottábla

y \ LM	00	01	11	10
a	b, 0	b, 0	a, 0	a, 0
b	a, 1	b, 1	b, 1	a, 1

a = 0
b = 1

1 sorban csak 1 féle kimenet ⇒
⇒ $\boxed{\text{Moore modell}}$
mert f(y) az adott állapot megadja a kimenetet

(3) szinkron sorrendi hálózat esetén

- rendszer hazárd: <u>igen</u>, mert van/lehet visszacsatolás
- dinamikus hazárd: <u>nem</u>, mert az kombinációs hálózatnál fordul elő
- funkcionális hazárd: <u>nem</u>, mert az kombinációs hálózatnál fordul elő
- lényeges hazárd: <u>nem</u>, mert szinkron hálózatunk van

(4) 4 bites teljes összeadó

bemenet $x(x_3, x_2, x_1, x_0)$

vezérlőjel → $V=0$ esetén $z=4x$

$V=1$ esetén $z=5x$

Kimenet $z(z_0, z_1, \dots z_7)$

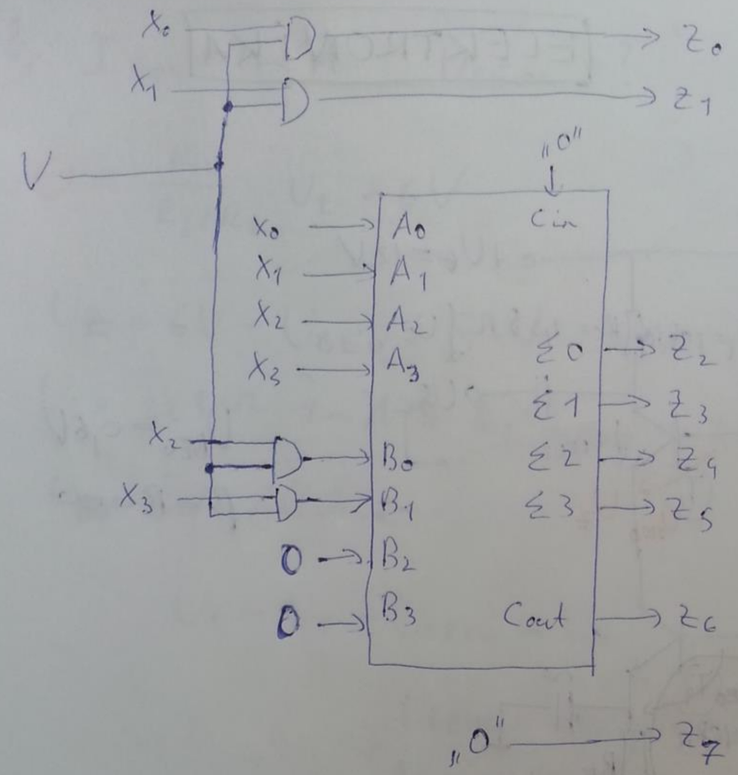
$z=4x$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \cdot 100 \\
\hline
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & & \\
\hline
x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & 0 & 0
\end{array}
$$

→ 2-vel való eltolást jelent

$z=5x$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \cdot 101 \\
\hline
 & & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & & \\
\hline
 & & & & x_1 & x_0
\end{array}
$$

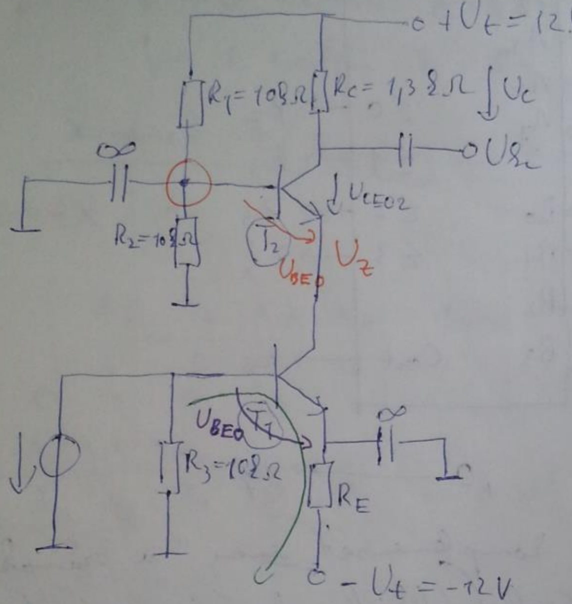


Nem kell „kettes komplemensét venni" a számoknak mert ezek előjel nélküli bináris számok

Pl: 5 → -5 ' kettes komplemens képzés

ELEKTRONIKA

(1)

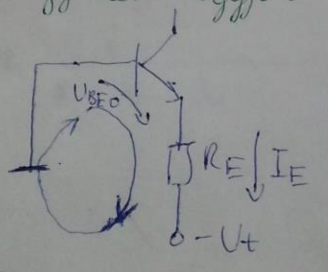


$U_{BE0} = 0{,}6V$

$\beta = B = \infty$

a/ $R_E = ?$ hogy $I_{E01} = 1mA$

Hurokegyenlet nagyjelű helyettesítő képre



$$-U_t + R_E I_E + U_{BE0} = 0$$

$$R_E = \frac{U_t + U_{BE0}}{I_E} = \underline{\underline{11{,}4 k\Omega}}$$

b) $I_{EO1} = 1\,mA$ $\quad U_{CEO2} = ?$

$$O = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_t = 6V$$

$$U_Z = 6V - U_{BEO} = 5,4V$$

$$U_c = 1,3\,k\Omega \cdot 1\,mA = R_c \cdot I_{EO1} = 1,3V$$

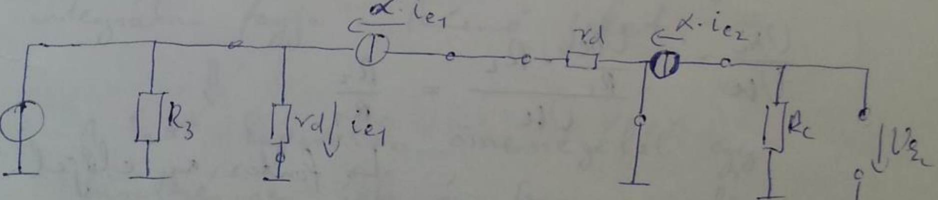
Egyenlet felírása

$$U_t - U_c - U_{CEO2} = U_Z$$

$$U_{CEO2} = U_Z + U_c - U_t$$

$$U_{CEO2} = 5,3V$$

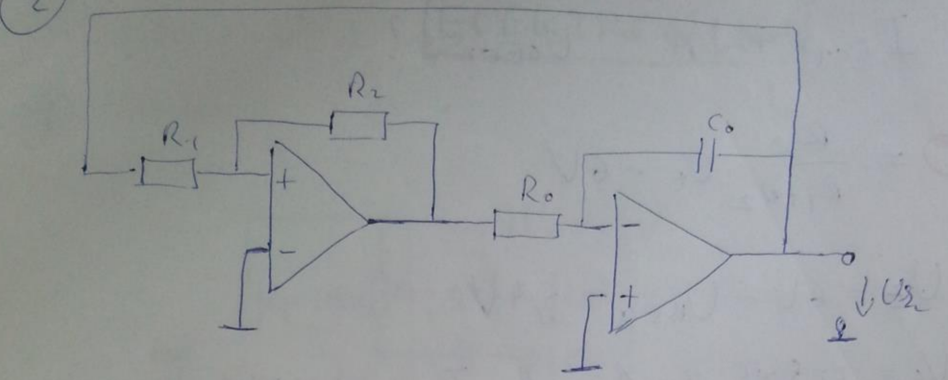
c) $U_T = 26\,mV$ $\quad A = \frac{U_{ki}}{U_g} = ?$ középfrekvencián



$$\frac{U_{ki}}{U_g} = - \frac{\frac{U_g}{rd} \cdot \alpha \cdot \overset{=1}{\alpha} \cdot R_c}{\cancel{U_g}} = - \frac{R_c}{rd} = - \frac{1,3\,k\Omega}{26\,\Omega} = -50$$

$$rd = \frac{U_T}{I_{EO1}} = \frac{26\,mV}{1\,mA} = 26\,\Omega$$

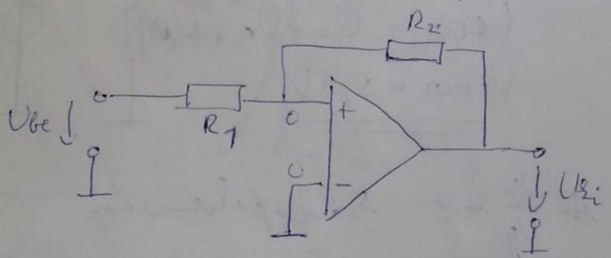
2



Milyen a kimenőjel függvénye?

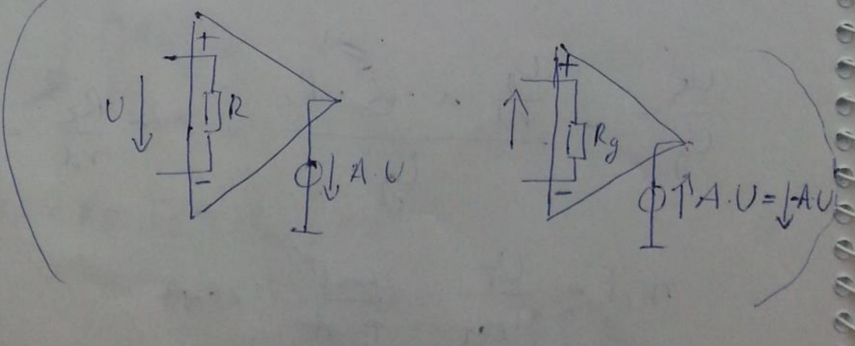
$R_1 = R_2 = R_0 = 10\,k\Omega \qquad C_0 = 10\,nF$

Két részre bontjuk a kapcsolást.



$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = \frac{\frac{U_{be}}{R_1}\cdot R_2}{U_{be}} = \frac{R_2}{R_1}$$

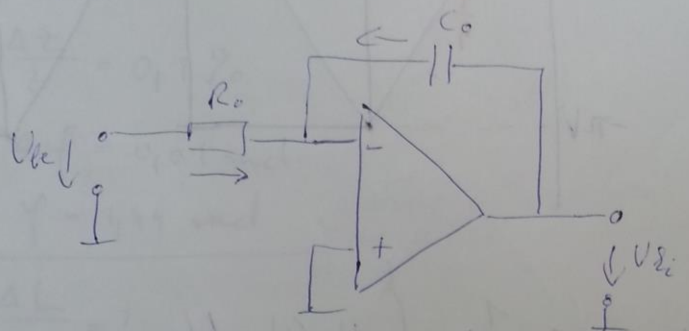
↳ fontos az előjel



Azaz ebben az esetben ez a kapcsolás, egy

$A = \frac{R_2}{R_1} = \frac{10\Omega}{10\Omega} = 1$ erősítésű, azaz előjelhelyesen továbbítja a jelet.

Másik rész:



$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = -\frac{U_{be}}{R_0} \cdot \frac{1}{sC_0} = -\frac{1}{R_0 C_0} \cdot \frac{U_{be}}{s} =$$

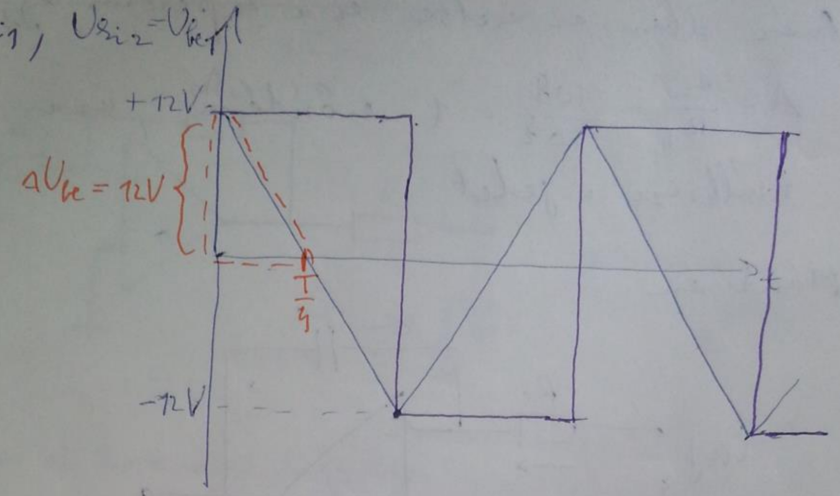
$$= -\frac{1}{R_0 C_0} \int_0^t U_{be}(t)\,dt$$

Azaz ez a kapcsolás ellentétes előjellel integrálni fogja a bemenő jelet.

$\Downarrow$

A kettő kapcsolás összességéből egy hiszterézises jelenség lesz, mivel az első erősítő kimenete +12 V és −12 V között fog váltakozni, ~~annak függ~~ ellentétesen a második erősítő kimenetének előjelével

$U_{be2} = U_{ki1}$, $U_{ki2} = U_{be1}$



b)

$$\Delta U_{be} = -\frac{1}{R_0 C_0} \int_0^t U_{be}(t) \cdot dt$$

$$12V = -\frac{1}{0{,}0001} \int_0^t \underbrace{U_{be}(t)}_{12V} \cdot dt$$

$$\cancel{12V} = -10 \cdot 10^3 \cdot \cancel{12V} \cdot t$$

$$\frac{T}{4} = t = \frac{1}{10 \cdot 10^3}$$

$$f_{\frac{T}{4}} = \frac{1}{t} = 10 \cdot 10^3 = 10\ kHz \qquad \frac{T}{4} = \frac{1}{f_{\frac{T}{4}}} = 0{,}0001\ s$$

ez csak egy negyed periódusra igaz

$$4 \cdot \frac{T}{4} = \frac{1}{T} = f_T = \underline{2{,}5\ kHz}$$

$\boxed{\text{MÉRÉSTECHNIKA}}$

1

$$L = \frac{|Z|}{\omega \sin\varphi}$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = 0{,}1\,\%$$

$$\Delta\varphi = 0{,}01 \text{ rad}$$

$$\varphi = 1{,}44 \text{ rad}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = ?$$

1/

$$L = \frac{|Z|}{\omega \sin\varphi}$$

2/

$$c_Z = \frac{\partial L}{\partial Z} = \frac{1}{\omega \sin\varphi}$$

$$c_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{|Z|}{\omega} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(\sin\varphi)^2} (-\cos\varphi) = \frac{|Z|}{\omega} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$\Delta L_Z = c_Z \cdot \Delta Z = \frac{1}{\omega \sin\varphi} \cdot \Delta Z$$

$$\Delta L_\varphi = c_\varphi \cdot \Delta\varphi = \frac{|Z|}{\omega} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \Delta\varphi$$

3/

$$\left.\frac{\Delta L}{L}\right|_Z = \frac{\frac{1 \cdot \cancel{Z}}{\omega \sin\varphi} \cdot \frac{\Delta Z}{\cancel{Z}}}{\cancel{\frac{|Z|}{\omega \sin\varphi}}} = \frac{\Delta Z}{Z}$$

$$\left.\frac{\Delta L}{L}\right|_\varphi = \frac{\frac{|Z|}{\omega} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \cdot \varphi \cdot \frac{\Delta\varphi}{\varphi}}{\cancel{\frac{|Z|}{\omega \sin\varphi}}} = \varphi \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \frac{\Delta\varphi}{\varphi} =$$

$$= \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \Delta\varphi$$

4/

$$\frac{\Delta L}{L} \underset{wc}{=\!=} \left.\frac{\Delta L}{L}\right|_Z + \left.\frac{\Delta L}{L}\right|_\varphi = \dots$$

$$= \frac{\Delta Z}{Z} + \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \Delta\varphi = 0{,}1\% + 0{,}1315\% =$$

$$= \underline{\underline{0{,}2315\,\%}}$$

2

$U_{max} = 2\,V$

$U = 1{,}25\,V$

$h_1 = 0{,}05\%$ (mért értékre)

$h_2 = 0{,}02\%$ (végértékre)

$h_3 \approx 0\%$

$\frac{\Delta U}{U} = ?$

$$\frac{\Delta U}{U} = h_1 + \frac{U_{max}}{U} \cdot h_2 + h_3 =$$

$$= 0{,}05\% + \frac{2V}{1{,}25V} \cdot 0{,}02\% + 0 = \underline{\underline{0{,}082\%}}$$

3

Tétel:

effektív értékek

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{P_{jel}}{P_{zaj}} = 20 \log \frac{U_{jel}}{U_{zaj}}$$

(jel-zaj viszony)

$U_x = 0{,}775\ V$ (effektív)

$\text{SNR} = 10\ dB$

fehér zaj

$R = 600\ \Omega$

$P_R = ?$

$$\text{SNR} = 10 \log \cdot \frac{U_{jel}}{U_{zaj}} = 10 \log \frac{U_{jel}^2}{U_{zaj}^2}$$

$$10 = 20 \log \cdot \frac{0{,}775V}{U_{zaj}}$$

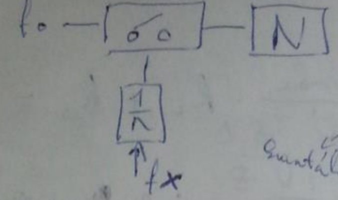
$$10^{\frac{1}{2}} = \frac{0{,}775V}{U_{zaj}}$$

$$U_{zaj} = 0{,}245\ V$$

$$U_{össz} = \sqrt{U_{zaj}^2 + U_{jel}^2} = 0{,}8125V$$

$$P_R = \frac{U_{össz}^2}{R} = \underline{\underline{1{,}1mW}}$$

4



$N = f_0 \frac{n}{f_x} \sim t_m$

$\frac{1}{N} = \frac{f_x}{f_0 n} = \frac{1}{f_0 t_m}$

Kvantálási hiba

Tétel

Frekvencia mérés állandó kapuidejű átlagperiódusidő méréssel

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{t_m \cdot f_0} \sim \frac{1}{N}$$

mért frekvencia relatív hibája

műszer órajelének relatív hibája

mérési idő

$f_x = 50\ Hz$

$f_0 = 100\ kHz$

$\frac{\Delta f_0}{f_0} \approx 0$

$t_m = ?$ hogy $\Delta f_x = 10\ mHz$

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{t_m \cdot f_0}$$

$$\frac{10\ mHz}{50\ Hz} = 0 + \frac{1}{t_m \cdot 100\ kHz}$$

$$20 = \frac{1}{t_m}$$

$$t_m = \underline{\underline{50\ msec}}$$

5

soros RC helyettesítőkép

kapott érték: $R = 5\,\Omega$ $C = -20\,\mu F$

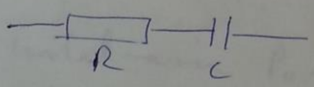
Ebben az esetben milyen impedanciáról beszélhetünk?

Mivel az adott helyettesítőképre negatív kapacitást kaptunk, így biztosan rossz helyettesítőképet választottunk, mivel kapacitás nem lehet negatív $\Rightarrow$ az elemnek induktív jellege van

Ha a kapott érték komplex alakban

$$A + jB$$

akkor



$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$jB = -j\frac{1}{\omega C}$$

$$C = -\frac{1}{\omega B}$$

tehát ha (~~a kapott komplex érték~~ pozitív lenne, ~~a kapacitás értéke a helyettesítőkép~~)

B pozitív $\Rightarrow$ C negatív lesz

B negatív $\Rightarrow$ C pozitív lesz

2012. május 30.

MATEMATIKA

(1)

$S_1: 2x + 4y - 8z = 16$

$S_2: 3x - 9y + 12z = 15$

a) $S = ?$ ami $\parallel S_1$-gyel és tartalmazza $P_0(0,0,0)$ pontot és melynek y együtthatója 2.

$\vec{n}_1 = (2, 4, -8)$

$\vec{n} = \vec{n}_1 = (2, 4, -8)$ mivel $S \parallel S_1$

$\vec{n} = (?; 2; ?)$ $/ \cdot \frac{1}{2}$

$\vec{n} = (1, 2, -4)$

Mivel S tartalmazza P_0-t, így D értékét általa meghatározhatjuk

$S: \quad 1 \cdot x + 2 \cdot y - 4 \cdot z = D$

Behelyettesítve a pontot igaznak kell lennie az egyenletnek.

$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = D$

$0 = D$

$\underline{\underline{S: \ 1x + 2y - 4z = 0}}$

b)

$$P_0 = (5, -2, 5)$$

e egyenes átmegy P_0-n és merőleges S_2-re

Q = ? ahol e döfi S_2-t

$$\vec{n}_2 = \vec{v}_e = (3, -9, 12)$$

Egy ponttal és az irányvektorral felírható az egyenes egyenlete a következő alakban

$$r(t) = P_0 + \vec{v}_e \cdot t$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 5 + 3t \\ y &= -2 - 9t \\ z &= 5 + 12t \end{aligned}\right\}$$

S_2 és P_0 metszéspontja $\Rightarrow$ Q

Az egyenes egyenletével behelyettesítünk a sík egyenletébe

$$S_2: \; 3x - 9y + 12z = 15$$

$$3(5+3t) - 9(-2-9t) + 12(5+12t) = 15$$

$$15 + 9t + 18 + 81t + 60 + 144t = 15$$

$$78 + 234t = 0$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

Visszahelyettesítve

$$x = 5 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 4$$

$$y = -2 - 9\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$z = 5 + 12\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$\underline{\underline{Q = (4, 1, 1)}}$$

c/

f olyan egyenes mely átmegy $P = (8, 8, 8)$ ponton és párhuzamos S_1 és S_2-vel

f egyenlete? ahol $t = 1$

S_1 és S_2 normálvektorainak vektoriális szorzata adja majd a párhuzamos egyenes irányvektorát

$$\vec{n_1} = (2, 4, -8)$$

$$\vec{n_2} = (3, -9, 12)$$

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -8 \\ 3 & -9 & 12 \end{vmatrix} = \left[(4 \cdot 12) - ((-8) \cdot (-9))\right] i - j\left[2 \cdot 12 - (-8) \cdot 3\right]$$

$$+ k\left[2 \cdot (-9) - 3 \cdot 4\right] =$$

$$= i(48 - 72) - j(24 + 24) + k(-18 - 12)$$

$$= \cancel{(-24, -48, -30)}\ (-24, -48, -30) = (-12, -24, -15) = (-4, -8, -5)$$

$$\vec{v} = (-4, -8, -5)$$
$$P = (8, 8, 8)$$

f egyenlete
$$r(t) = P + \vec{v}\,t$$
ahol P pontot
t = 1 értékre veszi fel

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \vec{v}_x t \\ y &= y_0 + \vec{v}_y t \\ z &= z_0 + \vec{v}_z t \end{aligned}\right\}$$

$$\cancel{x = 8 - 4t} \quad \cancel{y = 8 - 8t} \quad \cancel{z = 8 - 5t} \quad \cancel{t = 1}$$

$$8 = x = x_0 - 4 \cdot 1 \longrightarrow x_0 = 12$$
$$8 = y = y_0 - 8 \cdot 1 \longrightarrow y_0 = 16$$
$$8 = z = z_0 - 5 \cdot 1 \longrightarrow z_0 = 13$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 12 - 4t \\ y &= 16 - 8t \\ z &= 13 - 5t \end{aligned}}$$

② konvergensek-e?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow -\infty$ divergens

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0$ divergens

mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ -nél lassabban tart 0-hoz ezért a sor divergens lesz

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ Minoráns kritérium

$\Downarrow$ $\Downarrow$

ő is divergens lesz   divergens

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$ konvergens, mivel $\ln n$ divergens de $\frac{1}{n^3}$ konvergens és ő határozza meg a másik logaritmikus így az egész konvergens lesz

(3)

konvergensek-e és összegfüggvényük?

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^3)^n$$

konvergens, ha $|x^3| < 1$

ekkor az összegfüggvény $\frac{1}{1-x^3}$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$ Ez egy geometriai sor $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'$ deriváltja, azaz az összegfüggvénye nem más mint a $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)$ sor összegfüggvényének deriváltja azaz $\left(\frac{1}{1-x}\right)'$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left((1-x)^{-1}\right)' = (-1)\cdot(1-x)^{-2}\cdot(-1) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' \longrightarrow \; ?$$

c/ Tétel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Ez az e^x sora

(4)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{egyébként} \\ 1 & \text{origóban} \end{cases}$$

a/ Deriválható-e az origóban és ha igen hányszor

Igen, végtelenszer

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y) = \frac{0\cdot y^2}{0^4+y^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}} f(x,y) = \frac{x^2\cdot 0}{x^4+0^2} = 0$$

Megegyezik ⇒ létezik a határérték és értéke 0 lesz

b, $g(x,y) = \dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^4}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = ?$$

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} g(x,y) = \frac{0^4+y^2}{0^2+y^4} = \frac{1}{y^2} \to \infty$$

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}} g(x,y) = \frac{x^4+0^2}{x^2+0^4} = x^2 \to 0$$

Nem egyezik meg
⇓
Nem létezik $g(x,y)$-nak határértéke $(0,0)$-ban

(6) $f(x,y) = x^4 + 4xy$

$P = (2,1)$

$\vec{v} = (1,2)$

$D_{\vec{v}} f = ? = \operatorname{grad} f \cdot \vec{v}_{\text{normált}}$

$$\vec{v}_{\text{normált}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

b, $f''(0) = ?$

$$f''(0) = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}}{x}$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}$$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)''\Big|_{x=0} = -\frac{1}{3}$$

(5)

$$f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^4+y^2}$$

$$g(x,y) = \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4}$$

a, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Tétel:

Többváltozós függvények határértéke:

Többváltozós függvénynek létezik az adott pontban határértéke, ha bármelyen görbével ~~közelítve~~ behelyettesítve a határértéke a függvénynek az adott pontban létezik és mindig ugyanaz lesz

Pl.: – ha csak x-et tartjuk 0-ba és y-t megnézzük hova tart / vagy fordítva

– ha $y = x^2$-nél nézzük meg mi lesz a határérték

stb.

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z .$$

$$\operatorname{grad} f = \left(4x^3 + 4y\right) \cdot \vec{e}_x + 4x \cdot \vec{e}_y$$

$$\operatorname{grad} f \Big|_P = 36 \cdot \vec{e}_x + 8 \vec{e}_y = (36, 8)$$

$$D_{\vec{v}} f \Big|_P = \operatorname{grad} f \Big|_P \cdot \vec{v}_{\text{normált}} = 36 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 8 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{52}{\sqrt{5}}}}$$

JELEK ÉS RENDSZEREK

1

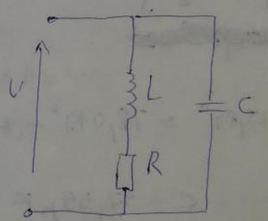
$u(t) = 325{,}27 \sin(314{,}16 \cdot t)\ V$

$L = 0{,}15\ H$

$R = 10\ \Omega$

$\cos\varphi = 0{,}9$

$C = ?$



$$Z = \left(R + j\omega L\right) \times \frac{1}{j\omega C} =$$

$$= \frac{\left(R + j\omega L\right) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + sL \cdot \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} =$$

$$= \frac{\frac{R + sL}{sC}}{\frac{sRC + s^2LC + 1}{sC}} = \frac{R + sL}{sRC + s^2LC + 1} =$$

$$= \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \frac{10 + j47{,}124}{1 - 14804{,}48C + j\,3141{,}6C}$$

$$= \frac{A \cdot e^{j78{,}02^\circ}}{A \cdot e^{j\,\mathrm{arctg}\left\{\frac{3141{,}6C}{1-14804{,}48C}\right\}}}$$

Csak a szögeket kell figyelembevenni abból visszaszámolható a C mivel a feszültség és az áram közötti fázistolás $\varphi = \arccos(0{,}9) = 25{,}84^\circ$ kell hogy legyen

$$\mathrm{arctg}\left\{ \overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} \right\}$$

$$25{,}84^\circ = 78{,}019^\circ - \arctan\left(\frac{3141{,}6C}{1 - 14804{,}476C}\right)$$

$$C = 57{,}99\,\mu F$$

(2)

$S_n = 1,2\ kVA$ $\quad f = 50\ Hz$

$n = \frac{U_n^N}{U_n^k} = \frac{240\ V}{24\ V}$ $\quad \varepsilon = 10\%$

$U^N = 24\ V$

$I^k = ?$

$$Z^k = \frac{(U_n^k)^2}{S_n} \cdot \frac{\varepsilon}{100} = 0,048\ \Omega$$

$$U^k = \frac{U^N}{n} = \frac{24V}{10} = 2,4\ V$$

$$I^k = \frac{U^k}{Z^k} = \frac{2,4V}{0,048\ \Omega} = \underline{\underline{50\ A}}$$

③

$U_a = 230 \cdot e^{j0°}$

$U_b = 230 \cdot e^{-j120°}$

$U_c = 230 \cdot e^{j120°}$

$I_0 = 20 \cdot e^{-j60°}$

$I_1 = 100 \cdot e^{-j30°}$

$I_2 = 15 \cdot e^{j30°}$

$P_{3F} = ?$

Visszatranszformáció

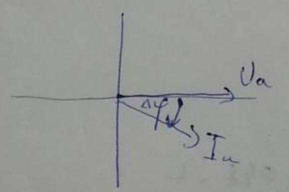
$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \cdot e^{-j60°} \\ 100 \cdot e^{-j30°} \\ 15 \cdot e^{j30°} \end{bmatrix}$$

$$I_a = 20 \cdot e^{-j60°} + 100\, e^{-j30°} + 15 \cdot e^{j30°} = 124{,}86 \cdot e^{-j28{,}63°}$$

$$I_b = 20 \cdot e^{-j60°} + e^{-j120°}\, 100 \cdot e^{-j30°} + e^{j120°}\, 15 \cdot e^{j30°} = 107{,}73 \cdot e^{-j146{,}27°}$$

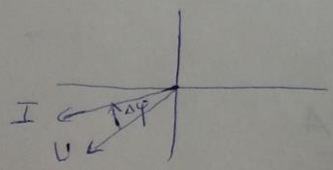
$$I_c = 20 \cdot e^{-j60°} + e^{j120°}\, 100\, e^{-j30°} + e^{-j120°}\, 15 \cdot e^{j30°} = 68{,}47 \cdot e^{j81{,}59°}$$

$P_a = Re\{U_a\} \cdot Re\{I_a\} \cdot \cos\Delta\varphi = 25{,}206$ kW



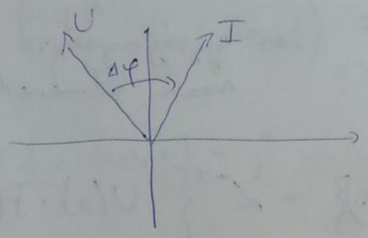
$\Delta\varphi = -28{,}63°$

$P_b = Re\{U_b\} \cdot Re\{I_b\} \cos\Delta\varphi = 22{,}218$ kW



$\Delta\varphi = -26{,}27°$

$$P_c = Re\{U_c\} \cdot Re\{I_c\} \cdot \cos\Delta\varphi = 72,329\ kW$$



$$\Delta\varphi = -38,41°$$

$$P_{3F} = P_a + P_b + P_c = \underline{\underline{59,8\ kW}}$$

Tétel.

Ottó-módszer:

$$Re\{I_{össz}\} = Re\{\bar{I}_1 + \bar{I}_2 - \bar{I}_0\} = 89,59\ A$$

↓

azért mert hatásos teljesítményt nézünk

$$P_{3F} = 3 \cdot \text{Amplitúdó}\{U\} \cdot Re\{I_{össz}\} = 61,82\ kW$$

$$\approx \underline{\underline{59,8\ kW}}$$

↓

megközelítőleg

$$P_{3F} = 3 \cdot U_{eff,f} \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1 =$$

(4)

$u(t) = \varepsilon(t)$

$y(t) = 4\,\varepsilon(t)\,e^{-2t}$ ⇝ egységugrásra válaszfüggvény azaz átmeneti függvény

$h(t) = ?$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\cdot Y(s)\}$$

Tétel:

az impulzusválasz az átmeneti függvény deriváltja $h(t) = (v(t))'$

$$\cancel{h(t) = (y(t))' = 4\,\delta(t)\,(-2)}$$

$$h(t) = (y(t))' = 4\cdot\delta(t)\cdot e^{-2t} + 4\,\varepsilon(t)(-2)\,e^{-2t} =$$

$$= 4\,\delta(t)\,e^{-2t} - 8\,\varepsilon(t)\,e^{-2t} =$$

Mivel a $\delta(t)$ függvénynek csak az origóban van értéke, így $e^{-2\cdot 0} = 1$ azaz az e^{-2t} tag elhagyható

$$h(t) = 4\,\delta(t) - 8\,\varepsilon(t)\,e^{-2t}$$

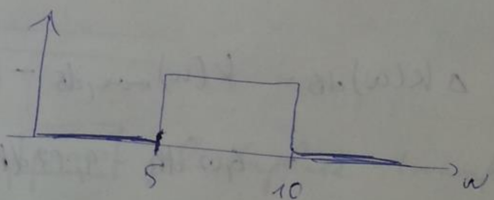
(5) NEM JÓ

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \sin(p\omega_0 t) = \frac{-1}{1}\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) - \frac{1}{8}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{16}\sin(4\omega_0 t)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{0,5}{\sqrt{2}} - \frac{0,125}{\sqrt{2}} + \frac{0,0625}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(-1 + 0,5 - 0,125 + 0,0625)$$

(6)

$x(t)$ spektruma $5 < |\omega| < 10$ tartományon kívül nulla ...



Adja meg azt a tartományt amelyen kívül az $y(t) = x(t)\cos(2t)$ jel spektruma nulla

$$\underline{3 < |\omega| < 12}$$

(7)

$$K(\omega) = \frac{2}{\sqrt{1+\omega^6}}$$ szűrő

áteresztő tartomány: $0 \le \omega \le 0{,}9$

maximumhoz képest hány decibellel csökken az erősítés ezen a tartományon

$$K(\omega)_{max,dB}\Big|_{\omega=0} = 20 \log \frac{2}{\sqrt{1+0^6}} = 6{,}02 \text{ dB}$$

$$K(\omega)_{min,dB}\Big|_{\omega=0{,}9} = 20 \log \frac{2}{\sqrt{1+(0{,}9)^6}} = 4{,}17 \text{ dB}$$

$$\Delta K(\omega)_{dB} = K(\omega)_{max,dB} - K(\omega)_{min,dB} =$$

$$= 6{,}02 \text{ dB} - 4{,}17 \text{ dB} = \underline{\underline{1{,}85 \text{ dB}}}$$

(8)

$$x(t) = \left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\right] \frac{A \cdot t}{T} + A\,\varepsilon(t-T)$$

$X(s) = ?$

$$x(t) = \varepsilon(t)\frac{A \cdot t}{T} - \underbrace{\varepsilon(t-T)\frac{A \cdot t}{T}}_{} + A\,\varepsilon(t-T)$$

t-ről $(t-T)$ alakra kell hozni, hogy transzformálni lehessen

$$x(t) = \varepsilon(t)\,\frac{A\cdot t}{T} - \varepsilon(t-T)\,\frac{A\left[(t-T)+T\right]}{T} + A\,\varepsilon(t-T)$$

$$= \varepsilon(t)\,\frac{A\cdot t}{T} - \varepsilon(t-T)\,\frac{A\,(t-T)}{T} - \varepsilon(t-T)\,\frac{A\cancel{T}}{\cancel{T}} + A\cdot\varepsilon(t-T)$$

$$= \varepsilon(t)\,\frac{A\cdot t}{T} - \varepsilon(t-T)\,\frac{A(t-T)}{T} - \cancel{A\,\varepsilon(t-T)} + \cancel{A\,\varepsilon(t-T)}$$

$$x(t) = \varepsilon(t)\,\frac{A\cdot t}{T} - \varepsilon(t-T)\,\frac{A(t-T)}{T}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$X(s) = \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot e^{-sT} =$$

$$= \frac{A}{T s^2}\left(1 - e^{-sT}\right)$$

9

folytonos idejű, $\boxed{\text{páros}}$ jel Laplace-transzformáltja

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

Melyik jelről van szó?

$\mathcal{L}^{-1}\{\}$

$x(t) = 1$, mivel páros egyébként $x(t) = \varepsilon(t)$ lenne

(10)

$s_{1,2} = -0{,}5 \pm j2 \ \frac{1}{\mu s}$ konjugált komplex (gyökpár) pólusok

Tétel:

$s_{1,2} = -\omega_0 \cdot \xi \pm j \cdot \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$

↓

Konjugált komplex póluspár egy másodrendű rendszernél

ω_0: körfrekvencia $\left[\frac{rad}{s}\right]$

ξ: csillapítás

$$2 \cdot 10^{+6} = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

$$-0{,}5 \cdot 10^{+6} = -\omega_0 \cdot \xi \longrightarrow \omega_0 = \frac{0{,}5 \cdot 10^6}{\xi}$$

$$2 \cdot 10^{+6} = \frac{0{,}5 \cdot 10^6}{\xi} \sqrt{1-\xi^2}$$

$$4 \cdot 10^{12} = \frac{0{,}25 \cdot 10^{12}}{\xi^2} (1-\xi^2)$$

$$\cancel{4 \cdot 10^{12} \xi^2 = 0{,}25 - 0{,}25 \xi^2}$$

$$4 \cdot 10^{12} \xi^2 = 0{,}25 \cdot 10^{12} - 0{,}25 \cdot 10^{12} \xi^2$$

$$4{,}25 \xi^2 \cdot 10^{12} = 0{,}25 \cdot 10^{12}$$

$$\xi = 0{,}242537$$

$$\omega_0 = 2{,}06154 \cdot \frac{Mrad}{s}$$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \underline{\underline{328{,}1 \text{ kHz}}} \approx \underline{\underline{328 \text{ kHz}}}$$

$\tau = ?$

(11)

N számú késleltetőt tartalmazó diszkrét hálózat, amelynél a pólusok száma n (a nevező fokszáma)

n és N viszonya milyen lehet?

$$n \leq N$$

mivel legfeljebb annyi pólusa lehet a rendszernek ahány késleltetője van.

(12)

$u[k] = 2\cos(0{,}1\pi k + 0{,}4)$

$y[k] = 0{,}6\cos(0{,}1\pi k - 0{,}2)$ $\longrightarrow \vartheta_1 = 0{,}1\pi$

$$H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta_2 = 2{,}1\pi} = ?$$

Az átviteli karakterisztika 2π-szerint periodikus, mivel az $e^{j\vartheta}$ 2π-szerint periodikus a szögfüggvényekre (cos, sin) bontása miatt.

Így az átviteli karakterisztikára a következő teljesül.

$$H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta_1=0{,}1\pi} = H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta_2=\vartheta_1+2\pi=2{,}1\pi}$$

$$H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta_1=0{,}1\pi} = ? \Rightarrow$$ kiszámolható a gerjesztés és a válasz komplex hányadosaként

$$\overline{U}(e^{j\vartheta}) = 2 \cdot e^{j0{,}4}$$

$$\overline{Y}(e^{j\vartheta}) = 0{,}6 \cdot e^{-j0{,}2}$$

$$H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta_2=2{,}1\pi} = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{0{,}6 \cdot e^{-j0{,}2}}{2\, e^{j0{,}4}} = 0{,}3\, e^{-j0{,}6} =$$

$$= \underline{\underline{0{,}248 - j\,0{,}169}}$$

(13)

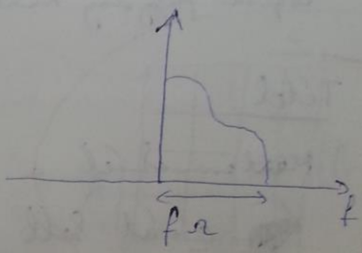
$$H(e^{j\vartheta}) = 2e^{j\vartheta} - 1 + 3e^{-j\vartheta} + 1{,}5\,e^{-j3\vartheta}$$

Nem kauzális a pozitív előjel miatt

(14)

sávkorlát $\Omega = 20 \ \frac{\text{krad}}{\text{s}}$

$$f_\Omega = \frac{20}{2\pi}\ \text{kHz}$$



Mintavételi tétel: $2 f_\Omega \le f_{mintavételi}$

$$\frac{20}{\cancel{2}\pi} \cdot \cancel{2}\ \text{kHz} \le \frac{1}{T_{mintavételi}}$$

$$6366{,}198 \le \frac{1}{T_{mintavételi}}$$

$$T_{mintavételi} \le 0{,}157\ \text{ms}$$

(15)

$$y_c(t) = \varepsilon(t)\left(2 - 3e^{-0{,}5t}\right)$$

$Y_{D\,im} = ?$ $\qquad \Delta t = 0{,}2\ \text{s}$

$$Y_{D\,im} = \left(2 - 3\cdot 0{,}9^{k}\right)\cdot \varepsilon[k]$$

DIGITÁLIS TECHNIKA

1

$$F(A,B,C) = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

Logikai függvény minterm indexei?

Tétel:

Maxtermeknél a Karnaugh táblába 0-át kell beírni azokra a mezőkre amiket a maxtermek negáltjai határoznak meg

Pl.: $A+B+C \longrightarrow \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ -re kell nullát írni

VAGY

Kitalálásos módszerrel, azaz $A+B+C$ helyére „1-esek kerülnek" mert a plusz jel vagy-ot jelent. A maradék helyre pedig 0-a kerül.

De Morgan:

$$\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$$

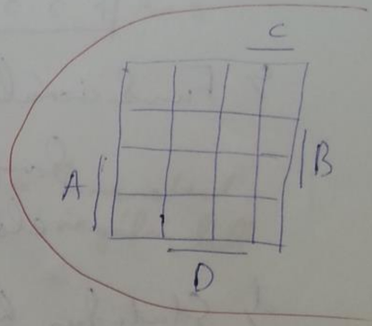
$$\overline{A\cdot B} = \overline{A}+\overline{B}$$

Karnaugh tábla felírása logikai függvény alapján

		B	B	
	0	0	0	0
A	1	1	0	1
			C	C

Mintermek:

$$A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}C$$



Mintermindexek:

$$A\bar{B}\bar{C} = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 4$$

$$AB\bar{C} = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 6$$

$$A\bar{B}C = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 5$$

2

	y\TC	00	01	11	10
0 bemenet lefutott	a	a 0	b –	d 0	a 0
1 bemenet felfutott	b	c 1	b 1	b 1	c 1
1 bemenet lefutott	c	c 1	c 1	d –	c 1
0 bemenet felfutott	d	a 0	d 0	d 0	d 0

NEM JÓ

(3)

a, Rendszeres hazárd nem lehet, mert csak sorrendi hálózatnál van

b, Dinamikus hazárd nem lehet ⇒ csak kettőnél több szintű ~~van~~ kombinációs hálózatnál van

c, Funkcionális hazárd, igen, mert kombinációs hálózatnál fordulhat elő

d, Statikus hazárd igen

(4)

Amit kapni szeretnénk

N_3	N_2	N_1	N_0	
1	0	0	0	$\to 8$
0	1	1	0	$\to 6$
0	1	0	0	$\to 4$
0	0	1	0	$\to 2$

N_0 ↓ fixen 0 lesz

Ahogy a számláló számol

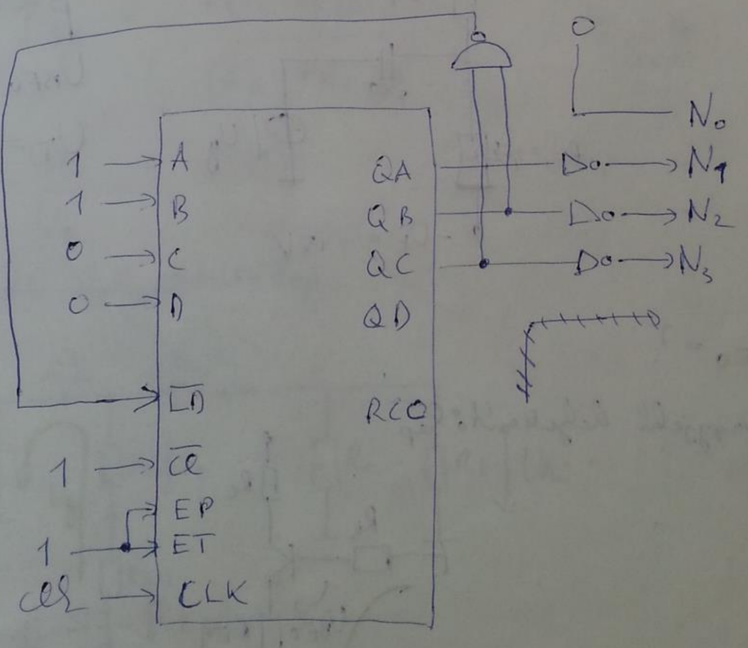
	D	C	B	A
0:	0	0	0	0
1:	0	0	0	1
2:	0	0	1	0
3:	0	0	1	1
4:	0	1	0	0
5:	0	1	0	1
6:	0	1	1	0

Visszafelé számláláshoz negálni kell (egyes komplemens)

$\overline{D}$	$\overline{C}$	$\overline{B}$	$\overline{A}$	
1	1	1	1	⇝ 15
1	1	1	0	⇝ 14
1	1	0	1	⇝ 13
1	1	0	0	⇝ 12
1	0	1	1	⇝ 11
1	0	1	0	⇝ 10
1	0	0	1	⇝ 9

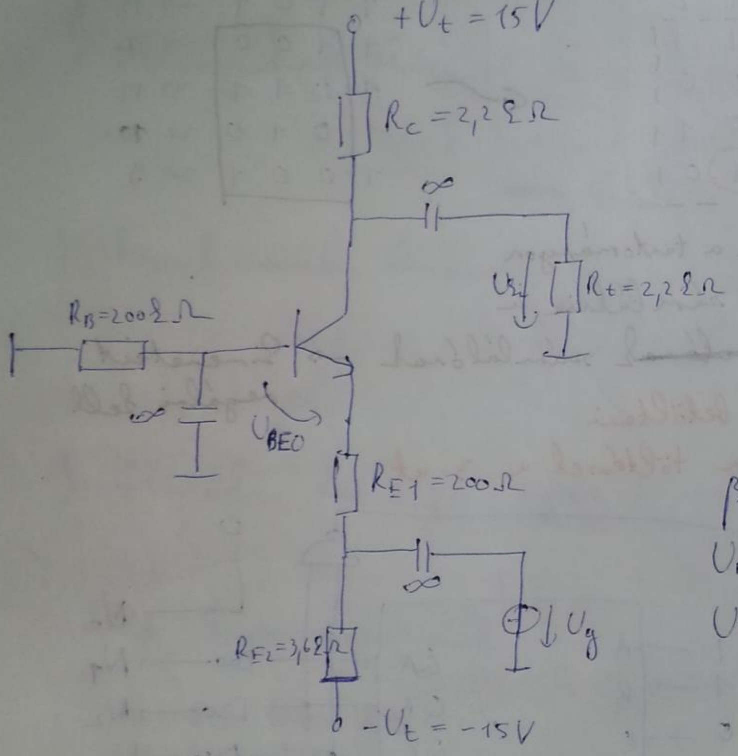
Ezen a tartományon kell számlálnia a ~~számolónak~~ számlálónak → kimeneteit negálni kell

itt kell betölteni szinkron töltéssel a 3-at



ELEKTRONIKA

1



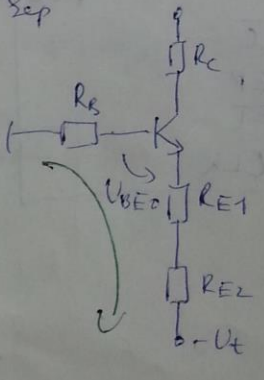
$\beta = 199$

$U_{BE0} = 600\,mV$

$U_T = 26\,mV$

a/ $I_{E0} = ?$

Nagyjelű helyettesítő kép



Hurokegyenlet:

$$-U_t + (R_{E1}+R_{E2}) I_{E0} + U_{BE0} + R_B\, I_{B0} = 0$$

$\cancel{\beta = \frac{i_c}{i_b}}$ $\quad \beta = \frac{i_c}{i_b}$

$i_c = \beta \cdot i_b$

$i_e = i_c + i_b = \beta\, i_b + i_b = (1+\beta)\, i_b$

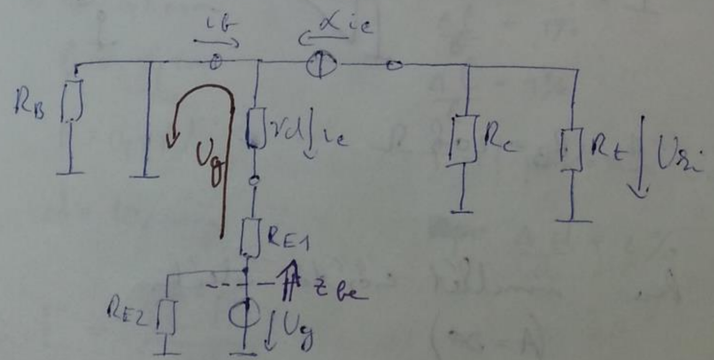
$i_b = \frac{i_e}{(1+\beta)}$ behelyettesítve

$$-U_t + (R_{E1}+R_{E2}) I_{E0} + U_{BE0} + R_B \frac{I_{E0}}{1+\beta} = 0$$

$$I_{E0} = \frac{+U_t - U_{BE0}}{(R_{E1}+R_{E2}) + \left(\frac{R_B}{1+\beta}\right)} = \underline{\underline{3\,mA}}$$

b) $A_u = \frac{U_{ki}}{U_g} = ?$

kisjelű helyettesítőkép



$$A_U = \frac{-\left(-\frac{U_g}{r_d+R_{E1}}\cdot\alpha\cdot\frac{R_C\cdot R_t}{R_C+R_t}\right)}{U_g} =$$

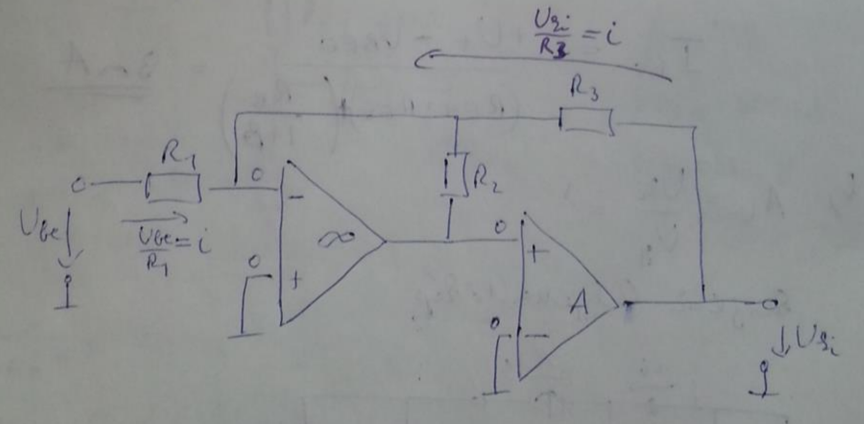
$$= \frac{\alpha}{r_d+R_{E1}}\, R_C \times R_t = \underline{\underline{5,25}}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{1+\beta} = 0,995 \qquad r_d = \frac{U_T}{I_{E0}} = 8,66\,\Omega$$

c)

$$Z_{be} = \frac{U_{be}}{I_{be}} = \left(R_{E1} + r_d\right) \times R_{E2} = \underline{\underline{197\,\Omega}}$$

2



$R_1 = 10\,k\Omega \quad ; \quad R_2 = R_3 = 20\,k\Omega$

a)

$$\left.\frac{U_{ki}}{U_{be}}\right|_{A=\infty} = ?$$ ha mindkét erősítő ideális $(A=\infty)$

$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = \frac{-\frac{U_{be}}{R_1} \cdot R_3}{\cancel{U_{be}}} = -\frac{R_3}{R_1} = -\frac{20}{10} = \underline{\underline{-2}}$$

b/ erősítő 3dB-es határfrekvenciája ?

ha $A = \frac{A_0}{1 + \frac{j}{\omega_1}}$ $\quad A_0 = 10^5 \quad \omega_1 = 10 \cdot \frac{rad}{s}$

↓ amplitúdókarakterisztika $|A|$

$$\frac{A_0}{\sqrt{1^2 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}}$$

$\omega_p = (1 + \beta \cdot A_0)\,\omega_0$

MÉRÉSTECHNIKA

1

$a = 20\,mm$ $\quad \frac{\Delta a}{a} = 1\%$

$b = 0{,}2\,mm$ $\quad \frac{\Delta b}{b} = 1\%$

$l = 0{,}1\,m$ $\quad \frac{\Delta l}{l} = 1\%$

$F = 0{,}1\,N$ $\quad$ F-et pontosan ismerjük,

$d = 10\,mm$ $\quad \frac{\Delta d}{d} = 2\%$

$$E = \frac{4 l^3 F}{a b^3 d}$$

$\frac{\Delta E}{E} = ?$ legvalószínűbb

1/

$$E = \frac{4 l^3 F}{a b^3 d}$$

2/

$$c_l = \frac{\partial E}{\partial l} = \frac{4 \cdot 3 \, l^2 F}{a b^3 d} = \frac{12 \, l^2 F}{a b^3 d}$$

$$c_a = \frac{\partial E}{\partial a} = - \frac{4 l^3 F}{b^3 d} \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$c_b = \frac{\partial E}{\partial b} = -3 \, \frac{4 l^3 F}{a d} \, \frac{1}{b^4}$$

$$c_d = \frac{\partial E}{\partial d} = - \frac{4 l^3 F}{a b^3} \cdot \frac{1}{d^2}$$

$$\Delta E_l = c_l \cdot \Delta l \qquad \Delta E_a = c_a \cdot \Delta a$$

$$\Delta E_b = c_b \cdot \Delta b \qquad \Delta E_d = c_d \cdot \Delta d$$

3/

$$\left.\frac{\Delta E}{E}\right|_l = \frac{\dfrac{\overset{3}{\cancel{12}} \, \cancel{l^2} \cancel{F}}{\cancel{a b^3 d}} \cdot \Delta l}{\dfrac{\cancel{4 l^3 F}}{\cancel{a b^3 d}}} = 3 \frac{\Delta l}{l}$$

$$\left.\frac{\Delta E}{E}\right|_a = \frac{\dfrac{-\cancel{4 l^3 F}}{\cancel{b^3 d}} \cdot \dfrac{1}{a^2} \cdot \Delta a}{\dfrac{\cancel{4 l^3 F}}{\cancel{a b^3 d}}} = - \frac{\Delta a}{a}$$

$$\frac{\Delta E}{E}\Big|_b = \frac{-3\,\frac{4l^3F}{a\,d}\cdot\frac{1}{b^4}\cdot\Delta b}{\frac{4\,l^3F}{a\,b^3\,d}} = -3\,\frac{\Delta b}{b}$$

$$\frac{\Delta E}{E}\Big|_d = \frac{-\frac{4\,l^3F}{a\,b^3}\cdot\frac{1}{d^2}\cdot\Delta d}{\frac{4l^3F}{a\,b^3\,d}} = -\frac{\Delta d}{d}$$

4/

$$\frac{\Delta E}{E} \underset{\text{valósz.}}{=} \sqrt{\left(\frac{\Delta E}{E}\Big|_l\right)^2 + \left(\frac{\Delta E}{E}\Big|_a\right)^2 + \left(\frac{\Delta E}{E}\Big|_b\right)^2 + \left(\frac{\Delta E}{E}\Big|_d\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(3\,\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(-3\,\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta d}{d}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(3\cdot 1\%)^2 + (-1\%)^2 + (-3\cdot 1\%)^2 + (-2\%)^2} = \underline{4{,}8\%}$$

(2)

$$u(t) = 6 + 8\cos(3\omega t) + 8\sin(3\omega t - 90°) - 12\cos(5\omega t + 45°) \quad [V]$$

$\underline{U_{eff} = ?}$

$$u(t) = 6 + \cancel{8\cos(3\omega t)} + \cancel{8\cos(3\omega t - 180°)} - 12\cos(5\omega t + 45°)$$

$$= 6 - 12\cos(5\omega t + 45°) + 8\cos(3\omega t) - 8\cos(3\omega t) =$$

$$= 6 - 12\cos(5\omega t + 45°)$$

$$U_{eff} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right)^2} = \underline{10{,}39\ V}$$

Tétel.

A szög nem számít az effektív értéknél, mert a f periodikus függvény ide-oda tologatása nem változtat az effektív értéken, ami egy teljes periódusra vett integrál.

Akkor lehet a cos és a sin függvények amplitúdóit négyzetesen összegezni, ha a körfrekvenciájuk egymás körfrekvenciájának egész számú többszöröse

Pl. $\underbrace{\cancel{1\omega t \to 3\omega t} \to 5\omega t}_{\text{nem jó}}$ $\underbrace{1\omega t \to 3\omega t \to 6\omega t}_{\text{jó}}$

③

$f = 8\,kHz$
$U = 0{,}5\,V$ effektív } jel

$0 \ldots 1\,MHz$
$U = 10\,mV$ effektív } fehér zaj

$B = ?$, hogy $SNR = 60\,dB$

Tétel.

Ha levágjuk a fehér zaj frekvenciatartományát egy szűrővel, amelynek B a sávszélessége akkor a zaj effektív értéke az levágás arányában $\left(\frac{B}{f}\right)$ csökkenni fog, tehát az SNR érték nő a következőképpen:

$$SNR_{\text{szűrő nélkül}} = 20 \log \frac{U_{jel}}{U_{zaj}}$$

$$SNR_{\text{szűrővel}} = 20 \log \left(\frac{U_{jel}}{U_{zaj} \cdot \frac{B}{f}} \right) = 20 \log \left(\frac{U_{jel}}{U_{zaj}} \cdot \frac{f}{B} \right) =$$

$$= 20 \log \left(\frac{U_{jel}}{U_{zaj}} \right) + 20 \log \left(\frac{f}{B} \right)$$

$$= SNR_{\text{szűrő nélkül}} + SNR_{\text{szűrő}}$$

$$60\,dB = 20 \log \left(\frac{U_{jel}}{U_{zaj}} \cdot \frac{f}{B} \right)$$

$$1000 = \frac{U_{jel}}{U_{zaj}} \cdot \frac{f}{B}$$

$$1000 = \frac{0{,}5\,V}{10\,mV} \cdot \frac{1\,MHz}{B}$$

$$\underline{\underline{B = 50\,kHz}}$$

Maximum 50 kHz sávszélességű zajt engedhetünk át 60 dB-es jel-zaj viszonyhoz, Mivel a jelnek benne kell lennie a szűrőben → sáváteresztő szűrő kell és elegendő lesz a 2,5 kHz-es sávszélesség a fentiek szerint (jobb is)

(4)

$f_{névleges} = 440\ Hz$

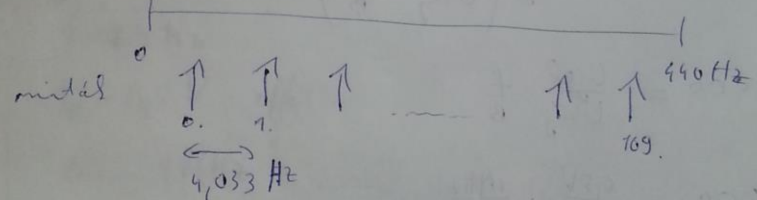
$f_{mintav} = 482\ Hz$

zajmentes a jel

$\frac{\Delta f}{f} = ?$

$N_{minta} = \frac{f_{mintavét}}{f_{név}} = \frac{482\ Hz}{440\ Hz} \approx 109{,}09\ db$

felbontás: $\frac{440\ Hz}{109{,}09\ db} = \underline{\underline{4{,}033\ \frac{Hz}{minta}}}$ kvantálási hiba



(5)

$C = 100\ pF$

$f = 1{,}591\ MHz$ soros helyettesítő kép!!!

$D = 0{,}02$

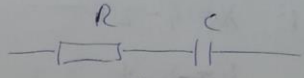
$R = ?$

Tétel: $A + jB$

jósági tényező $Q = \frac{B}{A}$

Veszteségi tényező $D = \frac{1}{Q} = \frac{A}{B}$

$$D = \frac{A}{B} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C}}$$



$$z = R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\, 1{,}591 \cdot 10^6 = 9{,}996548 \cdot 10^6 \ \frac{rad}{s}$$

$$\frac{D}{\omega C} = R = \underline{\underline{20{,}007\ \Omega}}$$

2012 január 3.

MATEMATIKA

(1)

e_1: $x = 4 - 2t$

$y = -3 + t$

$z = 1 + t$

e_2: $x = 3 + s$

$y = -1 + s$

$z = 6 + 4s$

e_1 és e_2 közös pontja? Két ismeretlen: t, s

$$y = -3 + t \quad = \quad y = -1 + s$$

$$-3 + t = -1 + s$$

$$t = 2 + s$$

Ezt behelyettesítve x-ekbe

$$x = 4 - 2t \quad = \quad x = 3 + s$$

$$4 - 2t = 3 + s$$

$$4 - 2(2 + s) = 3 + s$$

$$4 - 4 - 2s = 3 + s$$

$$-3 = 3s$$

$$\boxed{-1 = s}$$

$$\boxed{1 = t}$$

$$P = (4-2\cdot 1,\ -3+1,\ 1+1) = \underline{(2,-2,2)}$$

b)

$$\vec{v}_{e_1} = (-2,1,1)$$

$$\vec{v}_{e_2} = (1,1,4)$$

$$\left.\begin{array}{l} e_3 \perp e_1 \\ e_3 \perp e_2 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_{e_3} = ?$$

$$\vec{v}_{e_1} \times \vec{v}_{e_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = i(1\cdot 4 - 1\cdot 1) - j(-2\cdot 4 - 1\cdot 1) + k(-2\cdot 1 - 1\cdot 1) =$$

$$\vec{v}_{e_3} = \vec{v}_{e_1} \times \vec{v}_{e_2} = 3i + 9j - 3k$$

$$\vec{v}_{e_3} = \underline{(3,9,-3)}$$

c)

$P_0(1,2,4)$

$f \parallel e_1 \longrightarrow \vec{v}_f = \vec{v}_{e_1}$

f egyenlete ahol t = 1-nél P-t veszi fel

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{e_1} = (-2,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{x = 1-2t} \\ \cancel{y = 2+t} \\ \cancel{z = 4+t} \end{array}\right\} \quad r(t) = P_0 + \vec{v}_f\, t$$

~~Ha $t=1$~~

~~$x=-1$~~
~~$y=3$~~
~~$z=5$~~ $\Big\}$ ~~$(-1,3,5)$~~

f egyenlete:

$$x = x_0 - 2t$$
$$y = y_0 + t$$
$$z = z_0 + t$$

$t=1$-nél $P(1,2,4)$-et veszi fel

$1 = x_0 - 2(1) \rightsquigarrow x_0 = -1$

$2 = y_0 + 1 \rightsquigarrow y_0 = 3$ $\qquad P_0(-1,3,5)$

$4 = z_0 + 1 \rightsquigarrow z_0 = 5$

f egyenlete:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -1-2t \\ y &= 3+t \\ z &= 5+t \end{aligned}}$$

2) Konvergens-e?

a/ $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n} \longrightarrow$ divergens

$\Uparrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to$ divergens

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3-n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n}\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{n^2-n}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{n^2-n} \quad \frac{1}{n} \to 0, \; 2+\frac{1}{n} \to 2, \; n^2-n \to n^2 \quad \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \to \text{konvergens}$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\frac{1}{e^n}}{n^2} \quad \frac{1}{e^n} \to 0, \; 1-\frac{1}{e^n} \to 1 =$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to \text{konvergens}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

Tétel:

Leibnitz típusú sor:
- alternáló sor
- abszolútértéke monoton csökken
- abszolútértéke nullához tart

⇓

Ha ezek teljesülnek ⇒ konvergens a sor

A feladatban a sor egy Leibnitz sor, mert
- alternáló
- $\operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ → monoton csökken
- $\operatorname{arctg} \frac{1}{n} \to 0$

} konvergens

③

Hol konvergensek?

a/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ geometriai sor

konvergens ha $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$ $\Rightarrow$ Mindenütt konvergens a sor mivel az első x tagot kell csak eldobni

Tétel:
Ha egy sor első X taggját elhagyjuk és az így kapott sor konvergens, akkor az eredeti sor is konvergens

b/ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)$

$x=0$-ban konvergens

egyébként divergens

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2(x^2+n^2)}{x^2+n^2} \quad \operatorname{arctg}^2(x^2+n^2) \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad x^2+n^2 \to n^2 \to \infty$$

Mindenütt konvergens

(4) Taylor-sor? $x=0$ körül

a)

$$(1+x)\ln(1+x) = \ln(1+x) + x\ln(1+x)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20} \dots$$

b)

$$\frac{x}{1-x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6$$

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \dots$$

5

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{egyébként} \\ 0 & \text{origóban} \end{cases}$$

a) $f'_x(0,0) = ?$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h+0,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

b)

$$f'_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0^3}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

c)

$$\left(f'_x(2,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h,1) - f(2,1)}{h} = \right)$$

$$f'_x = \frac{3x^2(x^2+y^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_x(2,1) = \frac{3 \cdot 2^2(2^2+1^2) - 2^3 \cdot 2 \cdot 2}{(2^2+1^2)^2} = \frac{60-32}{25} = 1{,}12 = \frac{28}{25}$$

JELEK ÉS RENDSZEREK

1

$S_n = 1{,}2\ kVA$ $\qquad \varepsilon = 10{,}42\ \%$

$n = \frac{U_n^N}{U_n^K} = \frac{240\ V}{24\ V} = 10$

$U^N = 15\ V$

$\hat{I}^K = ?$

$$Z^K = \frac{(U_n^K)^2}{S_n} \cdot \frac{\varepsilon}{100} = 0{,}05\ \Omega$$

$$U^K = \frac{U^N}{n} = \frac{15\ V}{10} = 1{,}5\ V$$

$$I^K = \frac{U^K}{Z^K} = \frac{1{,}5\ V}{0{,}05\ \Omega} = \underline{\underline{30\ A}}$$

$$\hat{I}^K = I^K \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{30 \cdot \sqrt{2}\ A}}$$

2

$U_{v,n} = 6\ kV \quad \longrightarrow \quad U_{f,n} = \frac{6}{\sqrt{3}}\ kV$

$f = 50\ Hz$

$\left.\begin{array}{l} P_{3F} = 1\ MW \\ Q_{3F} = 700\ kvar \end{array}\right\}$ szinkron motor, Y kapcsolású

$\varphi = ?$

$$P = 3\, U_{eff,f} \cdot I_{eff,f} \cdot \cos\varphi$$

$$Q = 3\, U_{eff,f} \cdot I_{eff,f} \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tg\,\varphi$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{Q}{P}\right)$$

$$\varphi = 34{,}99° \approx \underline{\underline{35°}}$$

(3)

$$U_a = 230 \cdot e^{j0°}$$
$$U_b = 230 \cdot e^{-j120°}$$
$$U_c = 230 \cdot e^{j120°}$$

$$I_0 = 20 \cdot e^{-j60°}$$
$$I_1 = 300 \cdot e^{-j20°}$$
$$I_2 = 15 \cdot e^{j75°}$$

$P_{3f} = ?$ $\quad Q_{3f} = ?$

Ötlő módszer (Updated)

Ha P_{3F} a kérdés, akkor

$$I_{össz} = Re\{\overline{I}_1 + \overline{I}_2 - \overline{I}_0\}$$

$$P_{3F} = 3\, U\, I_{össz}$$

Ha Q_{3F} a kérdés, akkor

$$I_{össz} = Im\{\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_0\}$$

$$Q_{3F} = 3 \cdot U \cdot I_{össz}$$

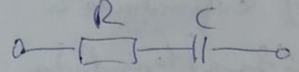
$P_{3F} \approx 190{,}2\ kW$ $\quad Q_{3F} \approx 72\ kvar$

$\underline{D}$

$P_{3F} = 3 V_{eff} I_1 \cos\varphi_1 = 194{,}55 kW$

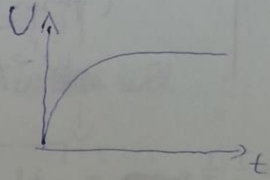
$Q_{3F} = 3 V_{eff} I_1 \sin\varphi_1 = -70{,}8 kvar$

(4)



U_0 egyenfeszültséget kapcsolunk

$u(t) = ?$



$u(t) = \varepsilon(t)\, U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

belép! — ekkor fog beállni — tranziens tag

(5)

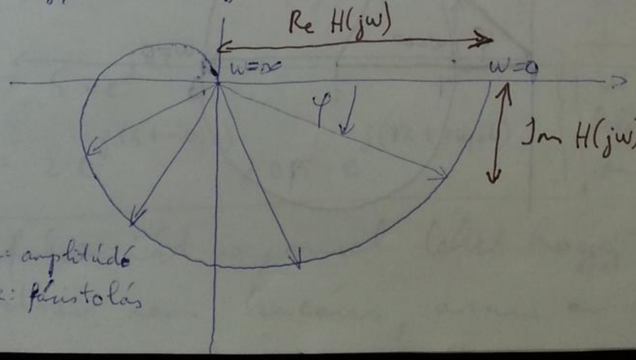
Nyquist-diagram ahol

$H(j0) = 3$, $\lim_{\omega \to \infty} H(j\omega) = 1$ két

pontja a szabályos kör alakú diagrammal

$\text{fázistartalék}_{max} = ?$

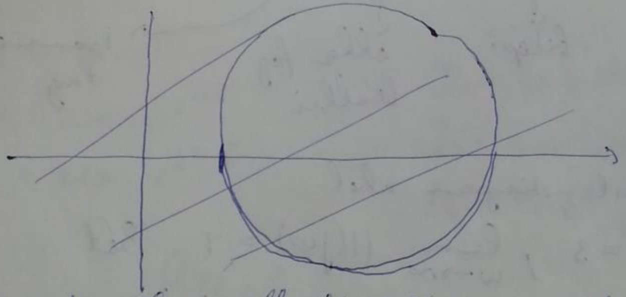
Tétel: Nyquist-diagram



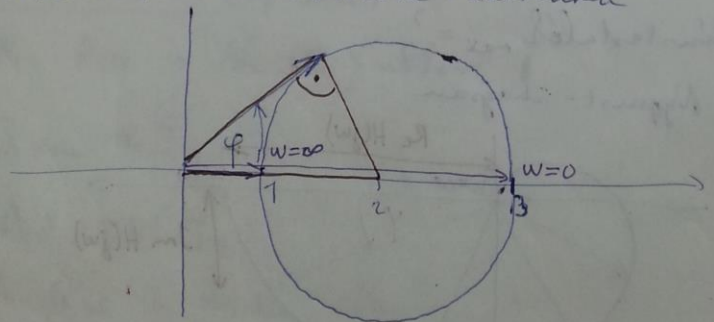
vektor hossza: amplitúdó

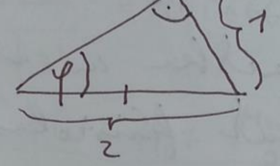
vektor szöge: fázistolás

~~A ampl~~ A Nyquist diagram tehát nem más mint a rendszer átviteli függvényének ábrázolása $w=0 \dots w=\infty$ tartományon.
Adott frekvencián (vektor) leolvasható a vektor hossza (amplitúdó-karakterisztika értéke az adott w-ra), illetve vektor szöge (fáziskarakterisztika értéke az adott w-ra, azaz a fázistolás)



Akkor kapjuk a legnagyobb fázistolást ha érintőt húzunk a körhöz $\Rightarrow$ fáziskarakterisztika maximuma





~~[illegible]~~ $\sin\varphi = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\varphi = 30^\circ}$$

(6)

$$i_g(t) = 20\,mA\,[\varepsilon(t-gT) - \varepsilon(t-gT-\tfrac{T}{4})]$$

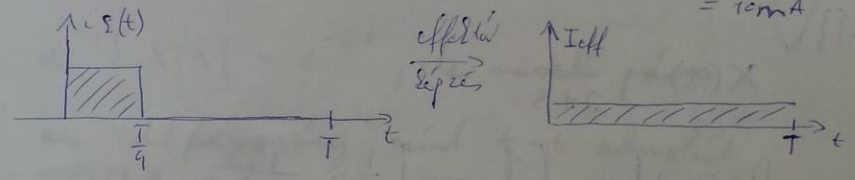
25% kitöltési tényező

$R = 100\,\Omega$

$P_R = ?$

INTEGRÁLNI kell

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|^2\,dt} = \frac{1}{T}\,\frac{T}{4}\cdot 20 = 10\,mA$$



$$P = I^2 \cdot R = \cancel{(20\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}25)^2\cdot 100 = 2{,}5\,mW}$$

$$(10\cdot 10^{-3})^2\cdot 100 = 10\,mW$$

(7)

$$u(t) = 5\cos(4t)$$

$$y(t) = 2\cos(4t-0{,}3) + 0{,}5\cos(12t+0{,}62)$$

$$\overline{U} = 5\cdot e^{j4t}$$

$$\overline{Y} = 2e^{j(4t-0{,}3)} + 0{,}5\cdot e^{j(12t+0{,}62)}$$

itt most bele kell venni a

körfrekvenciát is, mivel lehet hogy a rendszer nem lineáris, azaz az átviteli karakterisztikája torzítja a felharmóniát

Az lineáris rendszerekben az átviteli karakterisztika csak fázistolást eredményez frekvenciatolást nem.

$\underline{\underline{C}}$ Ebben az esetben a válaszban vannak felharmonikusok $\Rightarrow$ és a rendszer nem lineáris

(8)

$$x(t) = \varepsilon(t)\, e^{-3t} \qquad t = [\mu s]$$

$\Delta\omega = ?$ sávszélesség max amplitúdó 20%-áig

$\mathcal{L}\{\}$

$$X(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$|X(j\omega)| = \left|\frac{1}{j\omega+3}\right| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+3^2}}$$

amplitúdó karakterisztika

$$|X(j\omega)|\Big|_{\text{max ha } \omega=0} = \frac{1}{3} \qquad \omega_{max} = 0$$

$$|X(j\omega)|\Big|_{20\%=min} = \frac{1}{3}\cdot 0{,}2 = 0{,}0666$$

$\omega_{min} = ?$

$$|X(j\omega)|_{min} = 0{,}0666$$

$$\frac{1}{\sqrt{\omega^2+3^2}} = 0{,}0666$$

$$\omega = 14{,}7 \ \frac{Mrad}{s}$$

$$\cancel{MAX\ |X(j\omega)|_{max}}$$

$$\Delta \omega = |\omega_{max} - \omega_{min}| = \left|0 - 14{,}7 \ \frac{Mrad}{s}\right| = 14{,}7 \ \frac{Mrad}{s}$$

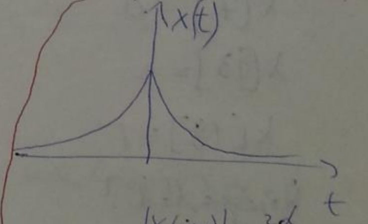
9

$$X(s) = \frac{1}{s+\alpha} \qquad \alpha \in R_+ \qquad x(t) \text{ páros !!}$$

$$|X(j\omega)| = ?$$

$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = e^{-\alpha t}$, de mivel páros az időfüggvény, ezért t-t abszolút értékbe kell rakni

$$x(t) = e^{-\alpha|t|}$$



$$|X(j\omega)| = \frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$$

$\mathcal{F}\{\}$ $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \ldots$

$|X(j\omega)|$ vesszük az amplitúdóját

$$|X(j\omega)| = \frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2} \Rightarrow \text{amplitúdó spektrum (karakterisztika)}$$

(10) $u[k] = \delta[k]$

$x[k+1] = -0{,}7\,x[k] + 2\,u[k]$

$y[k] = 3\,x[k]$

$y[2] = ?$

$k=-1 \quad x[0] = -0{,}7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$

$k=0 \quad x[1] = -0{,}7 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$

$k=1 \quad x[2] = -0{,}7 \cdot x[1] + 2 \cdot 0 = -0{,}7 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -1{,}4$

$$y[2] = 3\,x[2] = 3 \cdot (-1{,}4) = \underline{\underline{-4{,}2}}$$

(11)

$L = 5$ periódus

$x[0] = -1$

$x[6] = 0 \xrightarrow[\text{miatt}]{\text{periodikusság} \quad /:5} x[1] = 0$

$x[7] = 0 \xrightarrow{/:5} x[2] = 0$

$x[13] = 2 \xrightarrow{/:10} x[3] = 2$

$x[19] = 1 \xrightarrow{/:15} x[4] = 1$

} van elegendő adatunk

középérték?

$$X_{közép} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x[0] + x[1] + x[2] + x[3] + x[4] = \frac{2}{5} = \underline{\underline{0{,}4}}$$

$$X_{közép} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$$

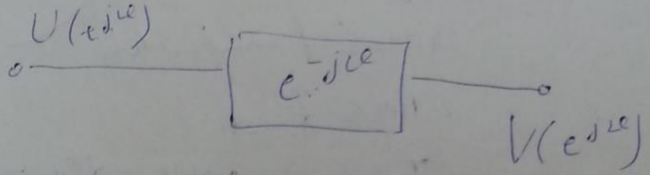
(12)

$v[k]$ kimenő jel

$V(e^{j\vartheta})$

késleltető rendszer

$U(e^{j\vartheta}) = ?$



$$V(e^{j\vartheta}) = U(e^{j\vartheta})\, e^{-j\vartheta}$$

$$U(e^{j\vartheta}) = \frac{V(e^{j\vartheta})}{e^{-j\vartheta}} = \underline{\underline{V(e^{j\vartheta}) \cdot e^{j\vartheta}}}$$

(13)

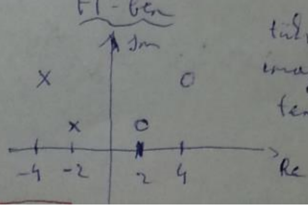
diszkrét idejű, elsőrendű, mindentáteresztő rendszer átviteli függvényének egyetlen zérusa $= 4$

Pólus értéke?

((Mivel mindentáteresztő a rendszer, így a pólusnak ki kell ejtenie a zérust.))

Tétel. Mindentáteresztő szűrő pólus-zérus viszonya FI-ben és DI-ben

FI-ben



tükrözés az imaginárius tengelyre

DI-ben

$$\frac{1}{\text{Zérus}} = \text{Pólus}$$

$$z = 4 \longrightarrow p = \frac{1}{4}$$

(14)

$f_B = 12\ MHz$ a sávkorlát

$f_{mintavételi} = ?$

Mintavételi tétel

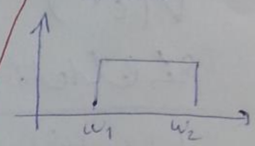
$$2 \cdot f_B \leq f_{mintavételi}$$

$$24\ MHz \leq f_{mintavételi}$$

$$24\ MHz \leq \frac{1}{T_{minta}}$$

$$T_{mintav} \leq 0{,}041 \cdot 10^{-6}\ s = 41{,}7\ ns$$

Tétel:



sávszélesség: $\Delta W = W_2 - W_1$ (B)

sávkorlát $f_B = W_2$

(15)

$$H_c(s) = \frac{1}{s+4}$$

$H_D(z) = ?$ ha $T = 0{,}1$ $p = 2$

$$H_D(z) = H_c\left(s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} + 4} =$$

$$H_D(z)\Big|_{T=0{,}1} = \frac{\frac{20(z-1)}{z+1}}{\frac{20(z-1)+4(z+1)}{z+1}} = \frac{20(z-1)}{20(z-1)+4(z+1)} =$$

$$= \frac{20z-20}{20z-20+4z+4} = \frac{20z-20}{24z-16} = \frac{5z-5}{6z-4}$$

$U_E^A \cos(\ )$ $\quad 2 Re\{2 \cdot e^{j30°}\} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 30° = U_E^A$

$2 \cdot 2 \cdot \cos 30° \cos($[illegible]$t + 30°)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{1} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \cancel{-1}}{x}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{x}}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots}{\cancel{x}}$$

$$= 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!}$$

$\downarrow$

akárhányszor lehet deriválni

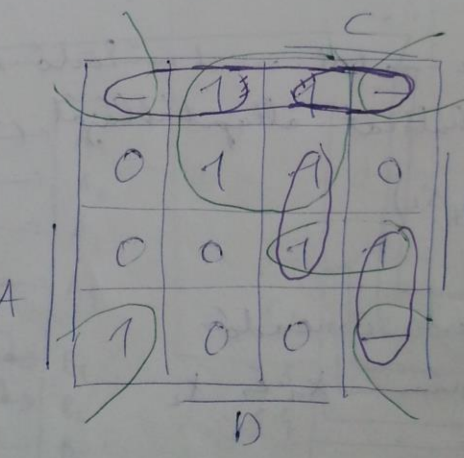
ZÁRÓVIZSGA

2012 január

DIGITÁLIS TECHNIKA

1

Adja meg a legegyszerűbb kétszintű diszjunktív hazárdmentes algebrai alakot ha nem tartalmazhat statikus hazárdot



hazárdmentesítés primimplikánsok

don't care-ek primimplikánsokkal lefedése opcionális

! De hazárdmentesítés nem feltétlenül

⇓

Ez jó megoldás, de nem a legegyszerűbb, mivel a don't care-ek előfordulhatnak a kimeneten, ezért a hazárdmentesítésnél őket is le kell fedni. Így viszont nem lesz optimális a megoldás

Optimális megoldás

	–	1	1	–
	0	1	1	0
	0	0	1	1
A	1	0	0	–

C, B, D

$$F = \bar{A}D + BCD + ABC + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

(2)

Adja meg Moore-modell szerint működő szinkron sorrendi hálózat állapottábláját, amely:

2 bemenet (x_1, x_2)

1 kimenet (z)

áramkör: soros összeadó

összeadandó szám: x_1 és x_2

eredmény: z

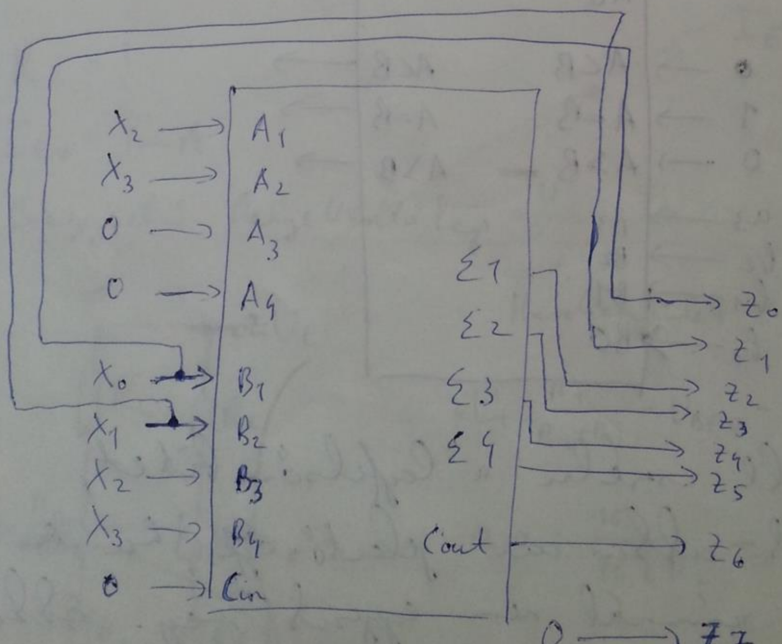
	$y \backslash x_1 x_2$	00	01	11	10
0 kimenet nincs carry	a	a 0	b 0	c 0	b 0
1 kimenet nincs carry	b	a 1	b 1	c 1	b 1
0 kimenet van carry	c	b 0	c 0	d 0	c 0
1 kimenet van carry	d	b 1	c 1	d 1	c 1

③ D ?!

④

$Z = 5X$ $\qquad x_3, x_2, x_1, x_0 \rightarrow$ előjel nélküli

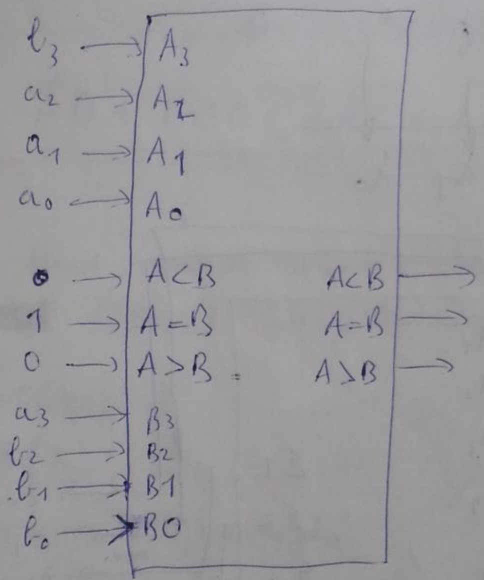
$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & & X_3 & X_2 & X_1 & X_0 \cdot 101 \\
\hline
 & & & X_3 & X_2 & X_1 & X_0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
+ & X_3 & X_2 & X_1 & X_0 & & \\
\hline
 & & & & & X_1 & X_0
\end{array}
$$



(5)

$A(a_3, \dots a_0)$ }
$B(b_3, \dots, b_0)$ } kettes komplemens számok

$A = B$, $A < B$, $A > B$ kimeneteket előállító hálózat?



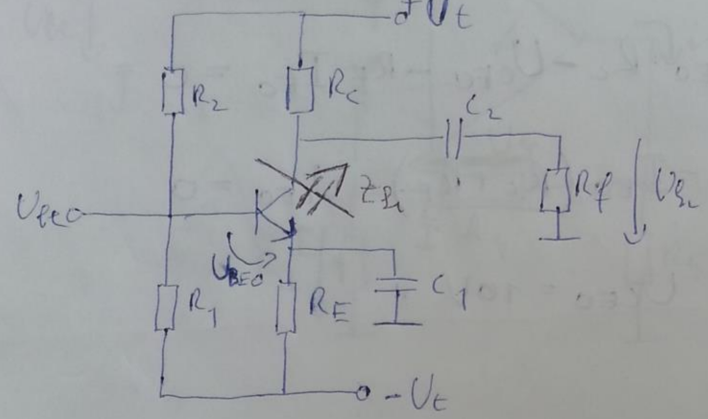
Meg kell cserélni a legfelső bitet, aminek akkor van jelentősége, ha ez a két számnál nem egyezik meg. Ekkor:

Pl. kettes komplemens érték	komparálás	megcseréljük	komparálás
-1 ←	1111		0111
$\wedge$	$\vee$	$\Longrightarrow$	$\wedge$
$+1$ ←	0001		1001

Így lesz jó a [illegible]

ELEKTRONIKA

(1)



$U_t = 10V$

$R_E = R_C = R_f = 5\,k\Omega$

$R_1 = 10\,k\Omega$

$C_1 \to \infty$

$C_2 \to \infty$

$A = 1 \quad (B = \infty)$

$U_{BE0} = 1V$

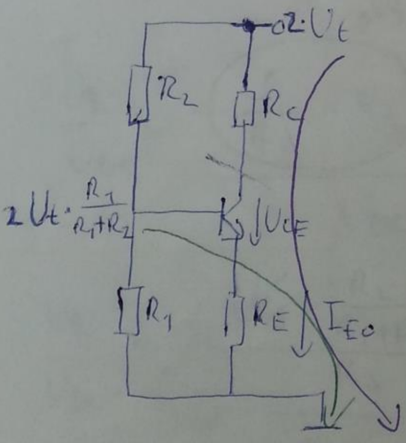
$U_m = 1V$

$I_{E0} = 1mA$

a/ $R_2 = ?$

$I_{E0} = 1mA$

Nagyjelű helyettesítőkép



Hurokegyenlet

$$2U_t \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} - U_{BE0} - I_{E0} \cdot R_E = 0$$

$$20 \cdot \frac{10}{10+R_2} - 1 - 1 \cdot 5 = 0$$

$$\frac{10}{10+R_2} = \frac{6}{20}$$

$$10 = 3 + 0{,}3R_2$$

$$\underline{\underline{R_2 = 23{,}33\ k\Omega}}$$

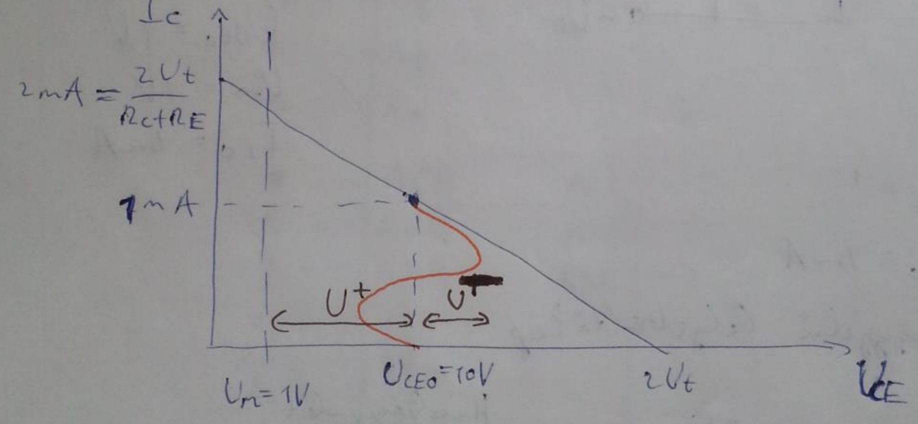
b) Szimmetri sinusos jelnek mekkora lehet a max amplitúdója

Hurokegyenlet

$$2U_t - I_{E0} \cdot R_C - U_{CE0} - R_E I_{E0} = 0$$

$$2U_t - I_{E0}(R_C + R_E) - U_{CE0} = 0$$

$$U_{CE0} = 10V$$



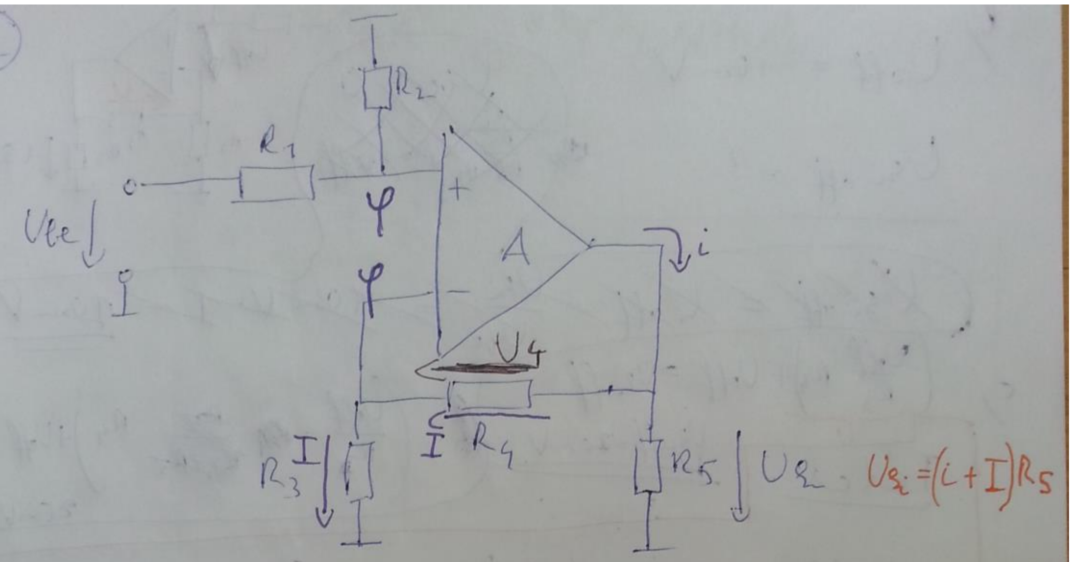
$$U^+ = U_{CE0} - U_m = 9V$$

$$Z_{ki} = R_f \times R_C = 2{,}5\,k\Omega$$

$$U^- = Z_{ki} I_{E0} = 2{,}5V$$

$$\min\{U^-, U^+\} = \underline{2{,}5V}$$

(2)



$R_1 = R_2 = 9\,k\Omega$

$R_3 = R_4 = 5\,k\Omega$

$R_5 = 9\,k\Omega$

a/ $\dfrac{U_{ki}}{U_{be}} = ?$ ha $A = \infty$ ideális

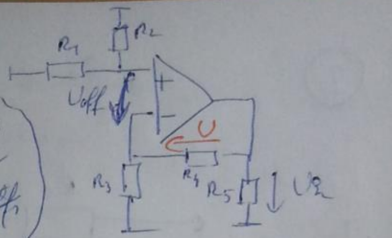
$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = \frac{\underbrace{\frac{\varphi}{R_3} \cdot R_4}_{U_4} + \varphi}{U_{be}} =$$

$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = \frac{\dfrac{U_{be} \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}}{R_3} \cdot R_4 + U_{be} \cdot \dfrac{R_2}{R_1+R_2}}{U_{be}}$$

$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot R_4}{R_3} + \frac{R_2}{R_1+R_2} = \underline{1}$$

b/ $U_{off} = 10mV$

$U_{ki\,off} = ?$



$\cancel{U_{be} = 0}$

$\cancel{\frac{U_{ki} \frac{R_3}{R_3+R_4}}{}}$ $\cancel{A = U_{ki\,off}}$

$\cancel{U_{ki\,off} = U_{off}} \cdot \cancel{\frac{U_{ki}}{U_{be}}} = \cancel{10mV \cdot 1} = 10mV$

$\left(\frac{U_{off}}{R_3} R_4\right) + U_{off} = U_{ki\,off}$

$U_{ki\,off} = 20mV$

$\left(\frac{U_{off}}{R_3} \cdot R_4\right) + U_{off} = U_{ki\,off}$

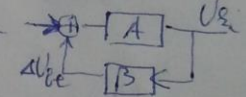
$20mV = U_{ki\,off}$

c/ Tétel:

3 dB-es határfrekvencia kiszámítása

$$\omega_p = (1+\beta A_0)\cdot\omega_0$$

β nem más mint a visszacsatoló ág (konstansa) bemeneti feszültsége a kimenetről visszarántva

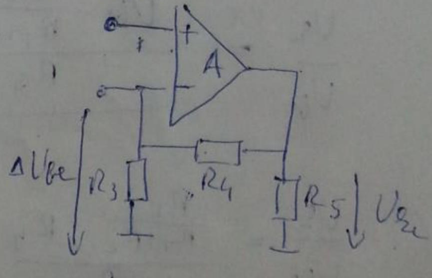


$$\beta = \frac{\frac{R_3}{R_3+R_4}\cdot U_{ki}}{U_{ki}}$$

$$\beta = \frac{\Delta U_{be}}{U_{ki}}$$

$$\beta = \frac{R_3}{R_3+R_4}$$

$$\omega_p = (1+10^5 \cdot 0{,}5)$$



MÉRÉSTECHNIKA

1.

$$Q = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\, d \cdot h^{1,5}$$

$$\frac{\Delta d}{d} = 1\% \qquad \frac{\Delta h}{h} = 2\%$$

g, h, d ismert pontosan

$$\frac{\Delta Q}{Q} = ?$$

2/

$$c_d = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\, h^{1,5}$$

$$c_h = \frac{2}{3} \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2g}\, d \cdot h^{0,5}$$

3/

$$\left.\frac{\Delta Q}{Q}\right|_d = \frac{\cancel{\frac{2}{3}\sqrt{2g}\, h^{1,5}} \cdot \Delta d}{\cancel{\frac{2}{3}\sqrt{2g}}\, d\, \cancel{h^{1,5}}} = \frac{\Delta d}{d}$$

$$\left.\frac{\Delta Q}{Q}\right|_h = \frac{\cancel{\frac{2}{3}} \cdot 1,5 \cdot \cancel{\sqrt{2g} \cdot d} \cdot h^{0,5} \cdot \Delta h}{\cancel{\frac{2}{3}\sqrt{2g}\, d}\, h^{1,5}} = 1,5\frac{\Delta h}{h}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} \underset{\text{w.c.}}{=} \frac{\Delta d}{d} + 1,5\frac{\Delta h}{h} = 4\%$$

(2) $v(t) = 6 \sin(\omega t)$

Tétel:

Deprez műszer csak effektív értékek mérésére képes, így amikor pl. abszolút középértékmérő állásban van, akkor a mért effektív értéket kompenzálnia kell a $\frac{\text{közép}}{\text{effektív}}$ hányadossal

szinuszos a jel

$v(t) = 6 \sin(\omega t)$

Deprez műszer $\frac{6}{\sqrt{2}}$-t mér.

Ezt kompenzálja $\frac{\text{közép}}{\text{effektív}}$ hányadossal.

Azaz szinuszos jel esetében ez

$\frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ lesz. Így kijelezni már a középértéket fogja mért effektív $\cdot \dfrac{\text{középérték}_{(\text{szinusz})}}{\text{effektív}_{(\text{szinusz})}}$ = mutatott középérték

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 6 \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{3{,}82\,V}}$$

(3)

$$P_{dB} = 0\ dB \longrightarrow P = 10^{\left(\frac{0}{10}\right)} = 1$$

10 független, megegyező teljesítményű jelforrás jelének összege ? dB teljesítményű

$$P_{10} = 10 \cdot P = 10 \cdot 1 = 10$$

$$P_{10\,dB} = 10 \log(10) = 10 \cdot 1 = \underline{\underline{10\ dB}}$$

VAGY

$$P_{dB} + 10 \log(10) = 0\ dB + 10\ dB = 10\ dB$$

(4)

$f_x = 50\ Hz$

$t_m = 10\ sec$

$f_0 = 10\ kHz$

Δ beérkezett periódusok = ?

$f_m = \frac{1}{t_m} = 0{,}1\,Hz$

beérkezett periódusok: $\frac{f_x}{f_m} = \frac{50\,Hz}{0{,}1\,Hz} = 500$ db

$\frac{\Delta\,\text{beérkezett periódusok}}{\text{beérkezett periódusok}} = \frac{1}{500} = 0{,}002 = \frac{\Delta f_x}{f_x}$

~~Δ beérkezett periódusok = Δ beérkezett periódusok / beérkezett periódusok · beérkezett periódusok = 0,002 · 50 Hz~~

$\Delta f_x = \frac{\Delta f_x}{f_x} \cdot f_x = 0{,}002 \cdot 50 = \underline{0{,}1\,Hz}$

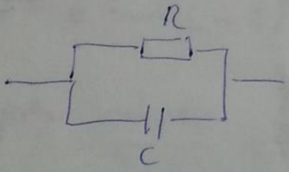
VAGY frekvenciamérés $t_m = 10\,sec$ $\cdot$ $f_0 = 10^8\,Hz$ $\cdot$ $\frac{\Delta f_0}{f_0} = 0\%$ $\quad f_x = 50\,Hz$

$\frac{\Delta f_x}{f_x} = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{N} = \underbrace{\frac{\Delta f_0}{f_0}}_{0} + \frac{1}{t_m \cdot f_x} \qquad \Delta f_x = \frac{1}{t_m f_x} \cdot f_x = \underline{0{,}1\,Hz}$

5

$C = 10\,nF$

$D = 0{,}05$ ha $f = 159{,}15\,Hz$



$R = ?$

$$Z = R \times \frac{1}{jC} = \frac{\frac{R}{jC}}{\frac{1 + jRC}{jC}} = \frac{R}{1 + jRC} \cdot \frac{(1 - jRC)}{(1 - jRC)} =$$

$$= \frac{R - jR^2C}{1 - j^2R^2C^2} = \frac{R - j\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$= \frac{R}{1+\omega^2R^2C^2} - j\,\frac{\omega R^2C}{1+\omega^2R^2C^2}$$

$$D = \frac{Re}{Im} = \frac{\dfrac{R}{1+\omega^2R^2C^2}}{-\dfrac{\omega R^2C}{1+\omega^2R^2C^2}} = -\frac{R}{\omega R^2C}$$

$$0{,}05 = \frac{R}{2\pi \cdot 159{,}1\,kHz \cdot R^2 \cdot 10nF}$$

$$0{,}0005 \cdot R^2 = R$$

$$0{,}0005R^2 - R = 0$$

$$R(0{,}0005R - 1) = 0$$

$$R_1 = 0$$

$$R_2 = 2000{,}69\ \Omega = \underline{\underline{2k\Omega}}$$

2011 január 3 90 pontos

MATEMATIKA

4) $\frac{1}{1-x}$ $1+x+x^2+x^3 \ldots$

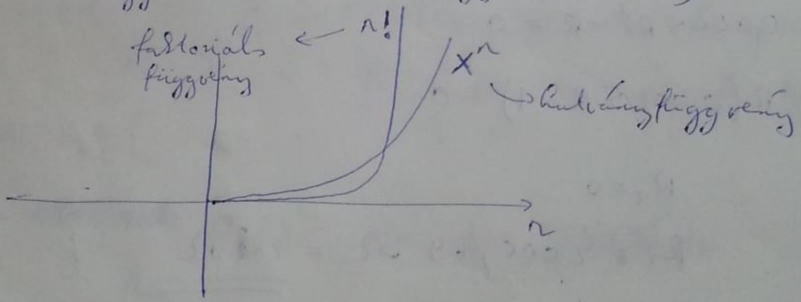
3) $\frac{1}{1+x^2} = \cancel{1+x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots}$

$1-x^2+x^4-x^6+x^8 \pm \ldots$

a) $\frac{1}{(1+x)^2} = \left(\frac{1}{1+x}\right)\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$= 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4$

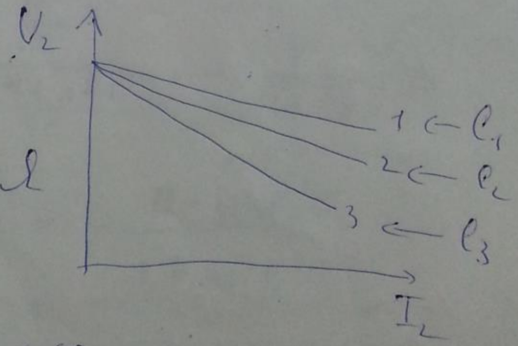
b) faktoriális sokkal gyorsabban megy mint a hatványfüggvény a nagy számoknál (egy idő után)



JELEK ÉS RENDSZEREK

2)

$$R = \frac{U}{I}$$



Rögzítjük I-t és megnézzük hogy hol a legnagyobb az U feszültség, tehát hol a legnagyobb az R értéke.

Minél nagyobb az R értéke annál nagyobb teljesítményt tudunk kivenni

Ezért l_1 -hez tartozó egyenes adja adja a legnagyobb teljesítmény értéket egy rögzített Ix áram mellett.

$$P = \frac{U^2}{R}$$

↓

l_1 a legkisebb távolság a tekercsek között, mert akkor záródnak leggyorsabban az erővonalak

⇓

$$\underline{l_1 < l_2 < l_3}$$

③

$U_m = 230\,V$

$i(t) = 0{,}4 \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$

$\cos\varphi = 0{,}82$

2óránként 30percig üzemel ⟶

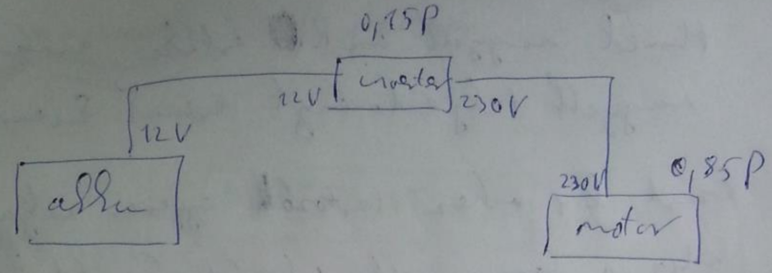
⟶ $\frac{30p}{120p} = \frac{1}{4}$ időben üzemel csak

inverter hatásfoka 85%

$U_{akku} = 12\,V$

üzemidő: 48 óra

Mekkora kapacitású akku kell legalább hogy kibírja az üzemidőt



Az inverter az akkuból kivett teljesítmény 15%-át eldisszipálja

$$P_{motor} = \cdot 230 \cdot \frac{0,4}{\sqrt{2}} \cdot 0,84 = 53,34\ W$$

$$P_{motor} = U_{motor} \cdot \frac{\hat{I}_{motor}}{\sqrt{2}} \cdot \cos\varphi$$

$$0,85\ P_{akku} = P_{motor}$$

$$P_{akku} = \frac{P_{motor}}{0,85} = 62,75\ W$$

$$P_{akku\ \text{időleges üzem}} = \frac{P_{akku\ \text{folyamatos}}}{4} = 15,69\ W$$

$$I_{akku\ \text{időleges üzem}} = \frac{P_{akku\ \text{időleges üzem}}}{U_{akku}} = 1,307\ A$$

$$I_{akku\ \text{időleges üzem}} \cdot \text{üzemidő} = \text{kapacitás}$$

kapacitás = 62,75 Ah → legalább akkora kell

Megoldás: $\boxed{65\ Ah}$

(5)

$u(t) = [2 + 3\cos(\omega t - 1{,}4)]\ V$

$i(t) = [5\cos(\omega t + 2{,}1) + 4\cos(2\omega t)]\ mA$

$P_{hatásos} = ?$

Tétel:

Hatásos teljesítményt csak az azonos frekvenciájú tagok fejtenek ki.

Ebben az esetben $u(t)$ és $i(t)$-ben csak az azonos frekvenciájú tagok, azaz az (ωt)-s tagok fejtenek ki teljesítményt

Tétel

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

$$P = \mathrm{Re}\{\bar{S}\}$$

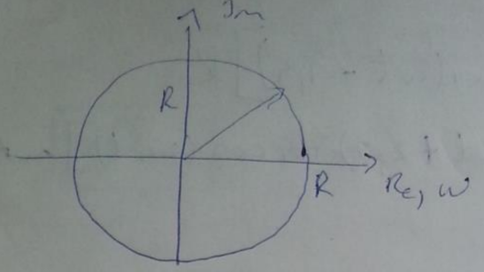
$$Q = \mathrm{Im}\{\bar{S}\}$$

konjugálás miatt lesz ⊖

$$P_{hatásos} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \cos(-1{,}4 - 2{,}1) = \underline{-7{,}023\ mW}$$

(6)



Mivel az amplitúdókarakterisztikát a vektorok hossza adja ezért itt mindig R lesz

$$\underline{\underline{k(w) = R}}$$

(7) $\underline{D}$

(12)

$x[0] = 0$

$x[1] = 1$

$x[2] = 2$

$x[3] = -1$

$L = 4$ a periódus hossz azaz

$x[k+4] = x[k]$

Fourier sor összetevője ahol $H(e^{j0}) = ?$

Tehát az egyenkomponenst kell meghatároznom középérték képzéssel

$$\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L} x[i] = \underline{\underline{0,5}}$$

(13)

$$x[k] = -\delta[k+1] + \delta[k-1]$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}\{x[k]\}$$

$$X(e^{j\vartheta}) = -1 \cdot e^{j\vartheta} + 1 \cdot e^{-j\vartheta}$$

Tétel:

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\cancel{X(e^{j\vartheta}) = \frac{e^{-j\vartheta} - e^{j\vartheta}}{2j} \cdot 2j}$$

$$X(e^{j\vartheta}) = -e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta} = -\underbrace{\left(\frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{2j}\right)}_{\sin(\vartheta)} \cdot 2j =$$

$$= -2j \sin(\vartheta)$$

(14)

$$x[k] = \varepsilon[k+2]$$

Ha $x[k] = \varepsilon[k-2]$ lenne

$\downarrow$ z transzf. csak belépő függvényekre alkalmazható

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot z^{-2}$$

$\downarrow$

negatív tartományt levágjuk ezért csak $\varepsilon[k]$-t transzformáljuk

(15)

$\omega =$

$x(t) = 5\cos(2\pi \cdot t)$

$T_m = 0{,}75 \rightsquigarrow$

DI jel = ?

DI jel: 0,75 egész számú többszörösei lesz az eredeti jelnek $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ csak $k \cdot 0{,}75$ időpillanatokban nézünk rá a jelre ezért $t = k \cdot 0{,}75 = k \cdot T$ -t kell helyettesíteni

$$x_{DI} = 5\cos(2\pi \cdot k \cdot T)$$

$$= 5\cos(2\pi \cdot 0{,}75 \cdot k)$$

$$= 5\cos\left(\frac{3\pi}{2} k\right)$$

(mintavételi tétel viszont nem teljesül)

DIGITÁLIS TECHNIKA

(1)

$F(ABC) = AB + AC$

Konjunktív ~~alak~~? kanonikus alak!

$\overline{F}(ABC) = \overline{AB + AC} = \cancel{(\bar{A}+\bar{B})(\bar{A}+\bar{C})}\ \overline{AB} \cdot \overline{AC} =$

$= \overline{(\bar{A}+\bar{B})\cdot(\bar{A}+\bar{C})}$

Nem De Morgannal kell csinálni

			C	C
	0	0	0	0
A	0	1	1	1
		B	B	

$F(ABC) = A \cdot (B + C)$

De ez még nem kanonikus

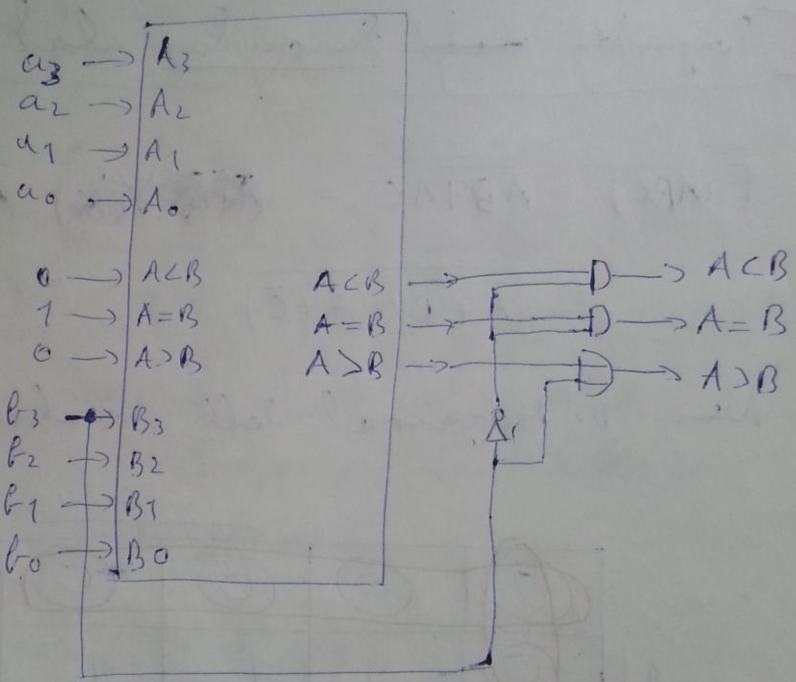
$F(ABC) = (\bar{A}+B+C)\cdot(A+B+C)\cdot(A+\bar{B}+C)(A+\bar{B}+\bar{C})\cdot$

$\cdot(A+B+\bar{C})$

(4)

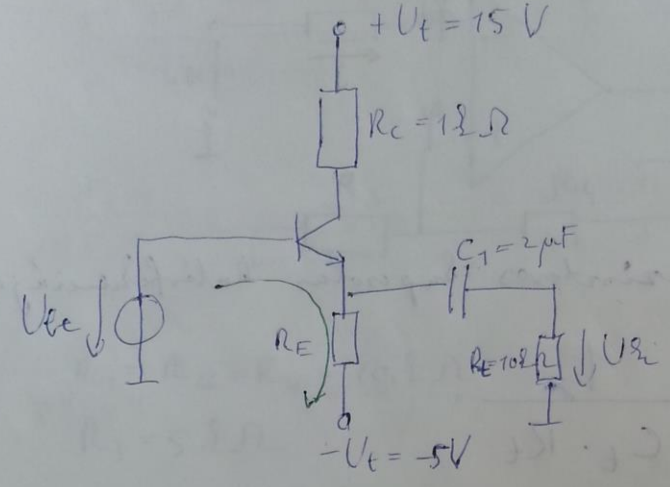
A: előjel nélküli

B: 2-es komplemens



ELEKTRONIKA

(1)



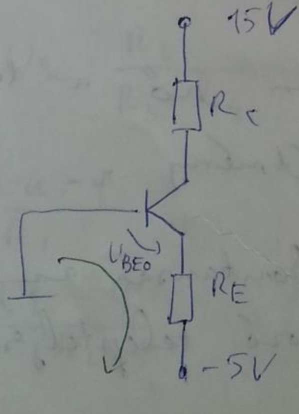
$\beta = B = 199$

$U_T = 26\,mV$

$U_{BE0} = 0{,}6\,V$

a/ $I_{E0} = 8{,}8\,mA$

$R_E = ?$



Hurokegyenlet

$$-5V + R_E \cdot I_{E0} + U_{BE0} = 0$$

$$0 - U_{BE0} - R_E \cdot I_{E0} = -5V$$

$$R_E = 0{,}5\,k\Omega$$

c)

$R_E = 4,4 \, k\Omega$

$I_{E0} = 1 mA$

$\omega_p = ?$

Tétel: tranzisztoros kapcsolás határfrekvenciája

$$\omega_p = \frac{1}{C_t \cdot R_t}$$

2

Tétel:

B osztályú erősítőnél

I_m-el arányosan nő a telepből

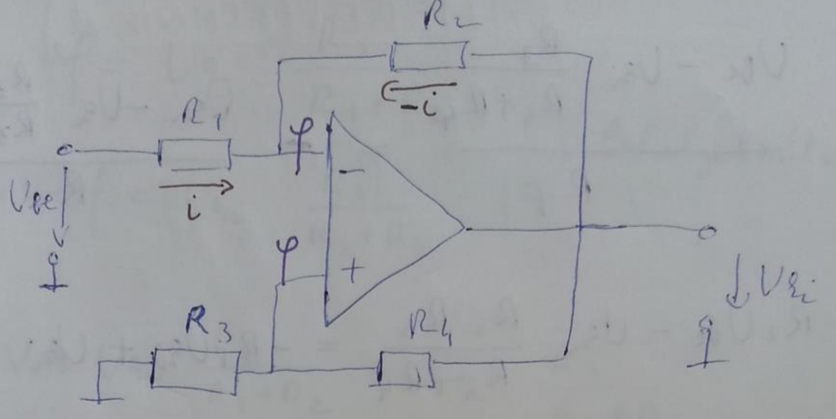
kivett teljesítmény.

A osztályúnál a konstansan az

I_{pp}-hez tartozó teleptejesítmény lesz

(fix érték)

(3)



$R_1 = R_2 = R_4 = 10\,k\Omega$

$R_3 = 5\,k\Omega$

a) ideális műveleti erősítő

$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = ?$$

$$\varphi = U_{ki} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

$$i = \frac{U_{be} - \varphi}{R_1}$$

$$-i = \frac{U_{ki} - \varphi}{R_2}$$

$$\frac{U_{be} - \varphi}{R_1} = -\frac{U_{ki} - \varphi}{R_2}$$

$$\frac{U_{be} - U_{ki}\dfrac{R_3}{R_3+R_4}}{R_1} = -\frac{U_{ki} - U_{ki}\dfrac{R_3}{R_3+R_4}}{R_2}$$

$$R_2 U_{be} - U_{ki}\frac{R_2 R_3}{R_3+R_4} = -R_1 U_{ki} + U_{ki}\frac{R_1 R_3}{R_3+R_4}$$

$$R_2 U_{be} = U_{ki}\left(\frac{R_2 R_3}{R_3+R_4} - R_1 + \frac{R_1 R_3}{R_3+R_4}\right)$$

$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = \frac{R_2}{\dfrac{R_2 R_3}{R_3+R_4} - R_1 + \dfrac{R_1 R_3}{R_3+R_4}} = \underline{\underline{-3}}$$

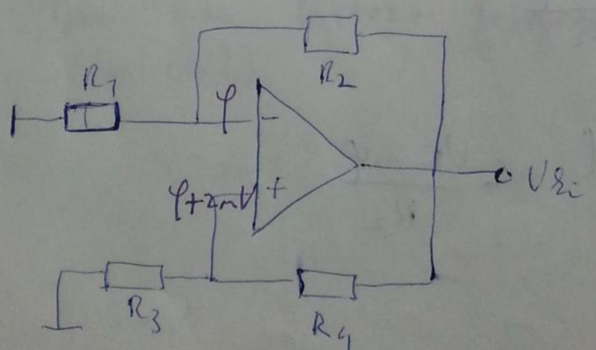
$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = \underline{\underline{-3}}$$

e)

$U_{offs,be} = 2\,mV$

$U_{offs,ki} = ?$

~~$U_{offs,ki} = U_{offs,be} \cdot A = 2\,mV \cdot (-3) =$~~



$$\varphi = U_{ki} \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

$$2mV + \varphi = U_{ki} \frac{R_3}{R_3+R_4}$$

behelyettesítve

$$2mV + U_{ki} \frac{R_1}{R_1+R_2} = U_{ki} \frac{R_3}{R_3+R_4}$$

$$2mV = U_{ki} \left(\frac{R_3}{R_3+R_4} - \frac{R_1}{R_1+R_2} \right)$$

$$2mV = U_{ki} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$2mV = -\frac{1}{6} U_{ki}$$

$$U_{ki} = -12\,mV$$

Tétel:

Erősítős kapcsolásnál offset feszültség mérésénél a bemenetet földeljük $U_{be} = 0$

$\boxed{\text{MÉRÉSTECHNIKA}}$

1

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$a = 3\,\text{cm}$

$b = 4\,\text{cm}$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = 1\%$$

$$\frac{\Delta c}{c} = ?$$

2/ $$c_a = \frac{1}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2a$$

$$c_b = \frac{1}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2b$$

3/

$$\left.\frac{\Delta c}{c}\right|_a = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}a \cdot a \cdot \frac{\Delta a}{a}}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^2 \frac{\Delta a}{a}}{(a^2+b^2)} =$$

$$= \frac{3^2 \cdot 2}{3^2+4^2} = 0{,}72\,\%$$

$$\left.\frac{\Delta C}{C}\right|_b = \frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2b \cdot b \cdot \frac{\Delta b}{b}}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^2 \cdot \frac{\Delta b}{b}}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{4^2 \cdot 2\,\%}{3^2+4^2} = 1{,}28\,\%$$

4/

$$\frac{\Delta C}{C} \underset{\text{legvalószínűbb}}{=\!=} \sqrt{1{,}28\%^2 + 0{,}72\%^2} \approx \underline{\underline{1{,}47\,\%}}$$

2

méréshatár: $X_{max} = 200\,mA$

$X = 125\,mA$

kijelzett érték: $125{,}0\,mA \longrightarrow N = 4$

mérési hiba = ?

Mivel most nem ismerjük h_1, h_2, h_3-at ezért a legkisebb ~~eltérés~~ mérhető feszültséglépcsőből kell kiszámolnunk a mérési hibára

Mivel tizedig jelez ki a műszer így a tévedése $\Delta X = 0{,}1\,mA$ lehet

A mért érték $X = 125\,mA$

innen a relatív ~~hiba~~ hiba:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0{,}1}{125} \cdot 100 = \underline{0{,}08\,\%}$$

(3)

$f_{szin} = 1\,kHz$

$\hat{U}_{szin} = 3V$ szinusz

$\sigma = 10mV$ fehér zaj

$\hat{U}_z = 20\,mV$

$f_z = 50\,Hz$

$SNR = ?$

Tétel:

Fehér zaj: egy effektív érték! Ezt nem kell $\sqrt{2}$-vel osztani

A fehér zaj teljesítménye: $P = \sigma^2$

$$SNR = 10\log\left(\frac{P_{jel}}{P_{zaj}}\right) = 10\log\left(\frac{P_{jel}}{P_{fehér\,zaj} + P_{zavarjel}}\right)$$

$$SNR = 10\log\left(\frac{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(10\cdot10^{-3}\right)^2 + \left(\frac{20\cdot10^{-3}}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) = \underline{41{,}77\,dB}$$

Tétel:

Csak teljesítményeket lehet összeadni.
Effektív értékeket először négyzetre kell emelni (teljesítmény képzés) majd összeadni

(4)

$t_m = 0{,}1\,s$ ⇝ Azt számoljuk meg hogy t_m idő alatt az f_x jelnek hány periódusa érkezett be

$f_0 = 5\,MHz$

$f_x = 200\,Hz$

$$\frac{1}{t_m} = f_m = 10\,Hz$$

$$\text{beérkezett periódusok (pontosság)} = \frac{f_x}{f_m} = \frac{200\,Hz}{10\,Hz} = 20\ \text{db}$$

$$\text{beérkezett periódusok relatív hibája} = \frac{\Delta\ \text{beérk. periódusok}}{\text{beérk. periódusok}} = \frac{1}{20} \cdot 100 = \underline{5\%}$$

5/

Tétel

Taylor-sorok:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$\sum x^n = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$\left(\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} \right)$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

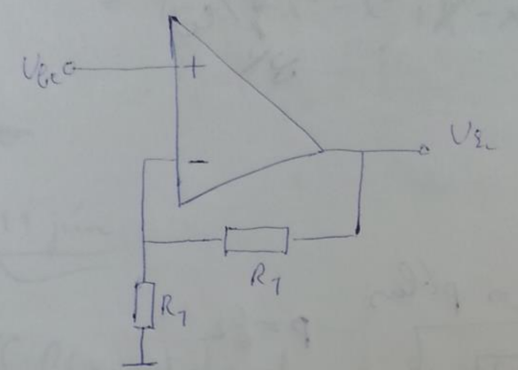
Tétel:

$$P_{3F} = 3 \cdot U_{eff_{1fázis}} \cdot I_1 \cos \varphi_1$$

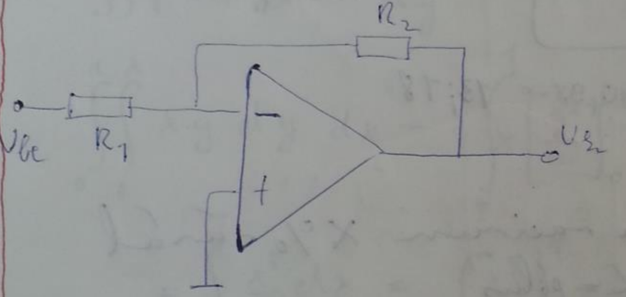
$$Q_{3F} = 3 \cdot U_{eff_{1fázis}} \cdot I_1 \sin \varphi_1$$

Tétel.

Műveleti erősítős alapkapcsolások



$$A = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$



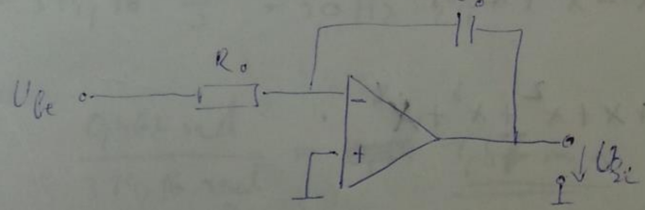
$$A = -\frac{R_2}{R_1}$$

Tétel

Vektoriális szorzat

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i(a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) - j(a_1 b_3 - b_1 a_3) + k(a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

Tétel



$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = -\frac{1}{R_0 C_0} \frac{U_{be}}{J} = -\frac{1}{R_0 C_0} \int_0^t u_{be}(t)\, dt$$

Tétel:

$r_d = \frac{U_T}{I_{E0}}$

pólus → $\omega_p = \frac{\alpha}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2}$

(8)

$X(j\omega) = \frac{5}{j\omega+2}$ → pólus

$\boxed{\omega_p = \frac{\alpha}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ $p = -2$

$= 13{,}33 \cdot 0{,}98 = 13{,}18$

határfrekvencia a maximum X %-ánál

$\varepsilon = \frac{\%}{100}$ $\alpha =$ pólus

Taylor-sor

$\frac{1}{1+x^2} = 1+(-x^2)+(-x^2)^3+(-x^2)^4+(-x^2)^5+\dots$

$1+\cancel{x^2}+x^4-x^6+x^8-x^{10}$

$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cancel{x^4}$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+(-x^2)^4+(-x^2)^5 =$$

$$= 1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}$$

~~200~~

2011 jún

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^1\int_0^x xy\,dy\,dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^1 x\left(\frac{x^2}{2}-0\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

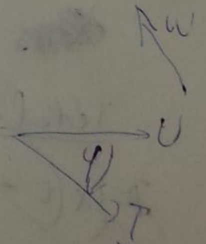
$\boxed{\text{JELEK}}$

2

$\varphi = 26{,}5° \longrightarrow 0{,}462$ rad

$\omega = 314{,}16 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 50\,\text{Hz}\cdot 2\pi$

$$\frac{0{,}462\ \text{rad}}{314{,}16\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = \cancel{0{,}14}\ \underline{1{,}47\ \text{ms}}$$



④ c : $\arctan\left(\frac{0,5}{2}\right)$

⑤

$$I_{eff} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = 3,32$$

$$I_{eff}^2 R = P = 22\,W$$

⑥

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 - 1}{(j\omega)^2 + 7j\omega + 10}\Bigg|_{\omega = 2\frac{\text{rad}}{s}} = \frac{-4-1}{-4+j14+10} =$$

$$= \left|\frac{-5}{6+j14}\right| = 0,3283$$

$20\log(x)$

$\underline{\underline{-9,67\ dB}}$

⑦

$$x(t) = 2\left[\varepsilon(t+3) - \varepsilon(t-3)\right]$$

$\downarrow \mathcal{F}$

Tétel:

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = X(j\omega)\,e^{-j\omega t_0}$$

$$X(j\omega) = \int_{-3}^{3} 2\, e^{-j\omega t}\, dt = 2 \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-3}^{3} =$$

$$= 2\, \frac{e^{-j\omega 3} - e^{+j\omega 3}}{-j\omega} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{-4 \cdot 3 \sin(3\omega)}{4 \cdot 3} =$$

$$= 12\, \frac{\sin(3\omega)}{3\omega}$$

$$\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin x$$

(8)

$$x(t) = 3\, e^{-0{,}4 t} = \cancel{\quad}$$

$$e^{-\sigma t} \rightsquigarrow \text{pólus}$$

$$\omega_p = \frac{\alpha}{\xi} \sqrt{1 - \xi^2} = \underline{\underline{3{,}98\ \frac{\text{rad}}{s}}}$$

(12)

$$3 \cos\left(\sqrt{2}\, \frac{\pi}{3}\, t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sqrt{2}\, \frac{\cancel{\pi}}{3}\, t_1 + \cancel{\frac{\pi}{2}} + 2\cancel{\pi}\, \xi = \sqrt{2}\, \frac{\cancel{\pi}}{3}\, t_2 + \cancel{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\, t_1 + 2\xi = \frac{\sqrt{2}}{3}\, t_2$$

$$2\xi = \frac{\sqrt{2}}{3} (t_2 - t_1)$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{6} (t_2 - t_1)$$

KÖV LAPON

11

$$2\delta(t) + 8\varepsilon(t)e^{+4t} \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} \cancel{2 + \frac{8}{s+4} = \frac{2s+8+8}{s+4}}$$

$$\frac{2s}{s-4} \qquad 2 + \frac{8}{s-4} = \frac{2s-8+8}{s-4} =$$

$$= \frac{2s}{s-4}$$

2010 június

Tétel:

$$\lambda = -\frac{1}{\tau}$$

$$\tau = \left\{\frac{1}{\lambda}\right\} \mathrm{Re}$$

egység $\tau = \frac{1}{3}$