# Villamosmérnök A4

4. gyakorlat (2012. 10. 01.-02.)

**Várható érték, szórás, módusz**

1. A $p_k = \frac{k^2}{30}$, $(k = 1, 2, 3, 4)$ diszkrét eloszlásnak (itt $p_k = \mathbb{P}(X = k)$) mennyi a
   (a) várható értéke,
   (b) módusza,
   (c) második momentuma,
   (d) szórása?

   *Megoldás*: A feladat szövegéből az derül ki, hogy $p_1 = 1/30$, $p_2 = 4/30$, $p_3 = 9/30$ és $p_4 = 16/30$.

   (a) A várható értéket a $\sum_{k=1}^{4} kp_k$ képlettel számoljuk:
   $$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{30} + 2 \cdot \frac{4}{30} + 3 \cdot \frac{9}{30} + 4 \cdot \frac{16}{30} = \frac{10}{3}$$
   (b) A módusz 4, hiszen ez a legvalószínűbb érték.
   (c) $X^2$ várható értéke a $\sum_{k=1}^{4} k^2 p_k$ képlettel számolható. Azaz
   $$\mathbb{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{30} + 4 \cdot \frac{4}{30} + 9 \cdot \frac{9}{30} + 16 \cdot \frac{16}{30} = \frac{59}{5}$$
   (d) A szórásnégyzet
   $$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{59}{5} - \frac{100}{9} = \frac{31}{45},$$
   ebből a szórás $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 0.83$.

2. Tételezzük fel rendre az 1.750 Ft, 6.500 Ft, 725.000 Ft, 2.000.000.000 Ft fix nyereményeket az ötös lottón 2, 3, 4 illetve 5 találat esetére. 225 Ft-os ötös lottó árral számolva, egy szelvénnyel fogadva mennyi a nyereségünk várható értéke?

   *Megoldás*: Az, hogy hány találatunk van pontosan az ötös lottón, hipergeometriai eloszlású. Emlékeztetőül például $p_3 = \mathbb{P}(\text{pontosan 3 találatom van}) = \binom{5}{3}\binom{85}{2}/\binom{90}{5}$. Ekkor a nyeremény várható értéke:
   $$\sum_{k=2}^{5} kp_k = 97.12,$$
   ahol $k$ értéke most a nyeremények értékevel egyezik meg. Tehát mivel a szelvény ára 225 Ft, így a nyereségünk várható értéke $-127.88$ Ft.

3. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember születik pontban éjfélkor, mint az, hogy öt.
   (a) Mire tippelne, hány ember fog a jövő év folyamán éjfélkor születni?
   (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy senki sem születik éjfélkor egy év alatt?
   (c) Átlagosan hány ember születik éjfélkor egy év alatt?

   *Megoldás*: Legyen $X$ az a valószínűségi változó, ami megmondja, hogy az adott évben hány ember születik éjfélkor. Ekkor $X$ Poisson eloszlást követ valamilyen ismeretlen $\lambda$ paraméterrel. A feladat szövegéből tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X = 2) = 3 \cdot \mathbb{P}(X = 5)$. Felírva az eloszlásokat és megoldva a kapott egyenletet $\lambda = 2.7144$ adódik.

   (a) A móduszra érdemes tippelni. A módusz megkereséséhez vizsgáljuk a $p_{k+1}/p_k$ hányadost.
   $$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}}{\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}} = \frac{\lambda}{k+1}$$
   Ezen tört értéke nagyobb mint 1, ha $k = 1$, és kisebb mint 1, ha $k = 2$. Tehát a módusz 2.
   (b) $\mathbb{P}(\text{senki nem születik éjfélkor}) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda} = 0.0662$
   (c) Az átlag nem más, mint a várható érték, azaz $\lambda = 2.7144$.

4. Egy tankör 30 hallgatójának mindegyike egymástól teljesen függetlenül, 3/4 valószínűséggel jár Valószínűségszámítás órára.
   (a) Átlagosan hányan vannak jelen?
   (b) Melyik létszám a legvalószínűbb?
   (c) Mennyi a jelenlevők számának szórása?

*Megoldás*: Jelölje $X$ a Valószínűségszámítás órán részt vevők számát. Ekkor $X \sim BIN(n=30, p=3/4)$ eloszlást követ.

(a) Az átlagosan jelen lévők számát a várható érték adja: $\mathbb{E}X = np = 22.5$.

(b) A legvalószínűbb létszám a módusz. Ennek megkereséséhez vizsgáljuk a $p_{k+1}/p_k$ hányadost.

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\binom{30}{k+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k-1}}{\binom{30}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}} = \frac{3(30-k)}{k+1}$$

Ezen tört értéke nagyobb mint 1, ha $k=22$, és kisebb mint 1, ha $k=23$. Tehát a módusz 23.

(c) $\mathbb{D}(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{30 \cdot 0.75 \cdot 0.25} = 2.3717$.

5. Legyen $X$ egy dobókockával dobott szám. Mennyi lesz $X$ várható értéke és szórása?

*Megoldás*: A feladat szövegéből az derül ki, hogy $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 1/6$. A várható értéket a $\sum_{k=1}^{6} kp_k$ képlettel számoljuk:

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5.$$

A szórás kiszámításához szükségünk van a második momentumra, ami a $\sum_{k=1}^{6} k^2 p_k$ képlettel kapható:

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Azaz $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2} = 1.705$ a kockadobás szórása.

6. András és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd András annyi forintot kap Bélától, amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla pedig annyit kap Andrástól, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?

*Megoldás*: Legyen $X$ a két kockán levő pontok különbségének négyzete. Ekkor $p_0 = 6/36$, $p_1 = 10/36$, $p_4 = 8/36$, $p_9 = 6/36$, $p_{16} = 4/36$, $p_{25} = 2/36$, így a várható érték:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 4 \cdot \frac{8}{36} + 9 \cdot \frac{6}{36} + 16 \cdot \frac{4}{36} + 25 \cdot \frac{2}{36} = \frac{35}{6}.$$

Hasonlóan legyen $Y$ a két kockán lévő pontok összege.Ekkor $p_2 = p_{12} = 1/36$, $p_3 = p_{11} = 2/36$, $p_4 = p_{10} = 3/36$, $p_5 = p_9 = 4/36$, $p_6 = p_8 = 5/36$, $p_7 = 6/36$, így a várható érték:

$$\mathbb{E}(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{42}{6}.$$

Tehát hosszú távon Béla jobban jár.

7. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzunk 3 golyót. Jelölje $X$ a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg $X$

(a) eloszlását,

(b) várható értékét,

(c) móduszát,

(d) szórását!

*Megoldás*:

(a) X eloszlása:

$$p_0 = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}, \quad p_1 = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}, \quad p_3 = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}$$

(b) A fentiek alapján a várható érték:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{6}{5}$$

(c) A módusz értéke 2.

(d) A szórás kiszámolásához szükségünk van a második momentumra:

$$\mathbb{E}(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{1}{30} = 2$$

Azaz $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2} = 0.74$ a szórás.

8. Két kockával dobva mennyi lesz a dobott számok

   (a) nagyobbikának illetve

   (b) kisebbikének várható értéke?

   *Megoldás*:

   (a) Legyen $X$ a dobott számok maximuma. Ekkor $p_1 = 1/36$, $p_2 = 3/36$, $p_3 = 5/36$, $p_4 = 7/36$, $p_5 = 9/36$, $p_6 = 11/36$, így a várható érték:

   $$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}.$$

   (b) Legyen $X$ a dobott számok minimuma. Ekkor $p_6 = 1/36$, $p_5 = 3/36$, $p_4 = 5/36$, $p_3 = 7/36$, $p_2 = 9/36$, $p_1 = 11/36$, így a várható érték:

   $$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{91}{36}.$$

9. Anna és Cili két kockával játszanak. Anna akkor fizet Cilinek, ha mindkét feldobott kockán páratlan szám szerepel. Cili akkor fizet Annának, ha pontosan egy kockával dobnak páros számot. Ha más eset fordul elő, egyikük sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék igazságos legyen?

   *Megoldás*: Anna $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ eséllyel fizet Cilinek, míg Cili $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ eséllyel fizet Annának. A játék tehát akkor lesz igazságos, ha Anna kétszer annyit fizet, mint Cili.(például Anna 2 petákot, Cili pedig 1 petákot.)

10. 20 ember között sorsolnak ki 9 külföldi nyaralást. A 20 személy között 12 családos.

    (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 9 nyertes között 7 családos?

    (b) Mi a kisorsolt családosok számának legvalószínűbb értéke?

    *Megoldás*: Legyen $X$ a nyertes családosok száma. Ekkor $X$ hipergeometriai eloszlást követ.

    (a) $\mathbb{P}(7 \text{ nyertes családos van}) = \mathbb{P}(X = 7) = \frac{\binom{12}{7}\binom{8}{2}}{\binom{20}{9}}$

    (b) A legvalószínűbb létszám a módusz. Ennek megkereséséhez vizsgáljuk a $p_{k+1}/p_k$ hányadost.

    $$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\frac{\binom{12}{k+1}\binom{8}{9-k-1}}{\binom{20}{9}}}{\frac{\binom{12}{8}\binom{8}{9-k}}{\binom{20}{9}}} = \frac{(12-k)(9-k)}{k(k+1)}$$

    Ezen tört értéke nagyobb mint 1, ha $k = 4$, és kisebb mint 1, ha $k = 5$. Tehát a módusz 5.

11. Egy cukorkaboltban 10 perc alatt átlagosan 4 ember vásárol.

    (a) Várhatóan hányan vásárolnak egy óra alatt?

    (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy fél óra alatt legalább ketten vásárolnak?

    *Megoldás*:

    (a) Ha 10 perc alatt átlagosan 4 ember vásárol, akkor 60 perc alatt átlagosan $6 \cdot 4 = 24$ ember vásárol. A vásárlók átlagos száma, pedig nem más, mint a vásárlók várható száma.

    (b) A fél óra alatt vásárlók $X$ száma Poisson eloszlást követ $\lambda = 3 \cdot 4 = 12$ paraméterrel. Tehát a keresett valószínűség:

    $$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathrm{e}^{-12} - \mathrm{e}^{-12} \cdot 12.$$

12. Két kockát $n$-szer dobunk fel. Tudjuk, hogy a dupla hatos dobások számának legvalószínűbb értéke 2 (ez az érték egyértelmű). Mit állíthatunk $n$ értékéről?

    *Megoldás*: A dupla hatosok $X$ száma binomiális eloszlást követ $n$ és $p = 1/36$ paraméterekkel. Binomiális eloszlás esetén a módusz nem más, mint $[(n+1)p]$. Így

    $$2 \leq (n+1)\frac{1}{36} < 3,$$

    tehát $71 \leq n < 107$. Hogyha $n = 71$, akkor a módusz nem egyértelmű, két módusz van, az 1 és a 2 ugyanolyan valószínű.

13. Egy iskolai kirándulás során négy busz szállítja a diákokat. A négy buszban 40, 33, 25 illetve 50 diák utazik. Véletlenszerűen kiválasztunk egy diákot, és legyen $X$ az ő buszában utazó összes tanuló száma. A négy buszsofőr közül egyet szintén véletlenszerűen kiválasztunk, és legyen $Y$ az ő buszán utazó tanulók száma.

    (a) Mit gondolunk, $\mathbb{E}(X)$ vagy $\mathbb{E}(Y)$ lesz nagyobb? Miért?

(b) Számoljuk ki $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét!

(c) Számoljuk ki $X$ és $Y$ szórását!

*Megoldás*:

(a) Nagyobb eséllyel választunk egy diákot egy tömöttebb buszról, míg a sofőr választásakot minden busz egyenló valószínű. Ezért $X$ várhatóan nagyobb lesz $Y$-nál

(b) A feladat szövege alapján a következő várható értékeket kapjuk:

$$\mathbb{E}(X) = 40 \cdot \frac{40}{148} + 33 \cdot \frac{33}{148} + 25 \cdot \frac{25}{148} + 50 \cdot \frac{50}{148} = 39.28,$$

$$\mathbb{E}(Y) = 40 \cdot \frac{1}{4} + 33 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} + 50 \cdot \frac{1}{4} = 37.$$

(c) A szóráshoz meg kell határoznunk a második momentumokat:

$$\mathbb{E}(X^2) = 40^2 \cdot \frac{40}{148} + 33^2 \cdot \frac{33}{148} + 25^2 \cdot \frac{25}{148} + 50^2 \cdot \frac{50}{148} = 1625.4,$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = 40^2 \cdot \frac{1}{4} + 33^2 \cdot \frac{1}{4} + 25^2 \cdot \frac{1}{4} + 50^2 \cdot \frac{1}{4} = 1453.5.$$

Ezalapján a szórások:

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2} = 9.06,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \sqrt{\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2} = 9.19.$$

14. Egy forgalmas útszakaszon, ahol egyébként is szoktak radarozni, fogyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tudjuk, valószínűbb az, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Adjon minél élesebb alsó becslést annak a valószínűségére, hogy pontosan 3 autó lépi át a megengedett sebességhatárt!

*Megoldás*: A sebességkorlátozást megszegők $X$ száma, a nagy forgalom és a gyakori radarozás miatt Poisson-eloszlást követ. Tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X = 0) < \mathbb{P}(X > 0)$. Falírva a fenti eloszlásokat kapjuk, hogy $\mathrm{e}^{-\lambda} < 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$, azaz $\ln 2 < \lambda$. Így

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} > \frac{(\ln 2)^3}{3!} = 0.03.$$

15. Statisztikák alapján sok évre visszamenőleg vizsgálták, hogy július hónapban mi volt a balatoni vitorlásbalesetek leggyakoribb száma. Ilyen számnak a 3 adódott. Becsülje meg, hogy legalább hány év statisztikáját kellene végigböngészni ahhoz, hogy a statisztikában találjunk olyan júliust, amikor egyáltalán nem volt a Balatonon vitorlásbaleset.

*Megoldás*: A júliusi vitorlásbalesetek száma $\lambda$ paraméterű Poisson eloszlást követ. A módusz 3-nak vehető, így $[\lambda] = 3$, tehát $3 \leq \lambda \leq 4$. Annak a valószínűsége, hogy júliusban nem történik vitorlásbaleset: $\mathbb{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$. Az $\mathrm{e}^{-\lambda}$ valószínűségű esemény átlagosan $\mathrm{e}^{\lambda}$ független megfigyelés alatt következik be. Mivel $3 \leq \lambda$, így $\mathrm{e}^3 \leq \mathrm{e}^{\lambda}$, tehát az átnézendő évek száma átlagosan $\lceil \mathrm{e}^3 \rceil = 20$.

16. Egy kisvállalkozó 3 autót tart fenn bérbeadásra. Minden egyes autóra a napi kiadása 600 tallér, függetlenül attól, hogy az autót bérbe veszik-e avagy sem. Egy-egy autó napi bérleti díja 7000 tallér. Nagy a kereslet az autóbérlésre, és ez a vállakozás szinte még ismeretlen. Ha naponta átlagosan ketten kívánnak autót bérelni, akkor mennyi az üzlet átlagos napi nyeresége?

*Megoldás*: A kereslet Poisson eloszlásúnek tekinthető, mivel nagy a kereslet és a vállalkozás még kevéssé ismert. Ha $X$ jelenti a napi nyereséget, akkor

$$\mathbb{E}(X) = p(21000 - 1800) + p_2(14000 - 1800) + p_1(7000 - 1800) + p_0(-1800) = 10673,88,$$

ahol $p = 1 - p_0 - p_1 - p_2$ és $p_k = \mathrm{e}^{-2}\frac{2^k}{k!}, k = 0, 1, 2$.

17. Határozza meg az ötös lottón kihúzott számok nagyság szerinti második legnagyobbikának móduszát!

*Megoldás*: Jelölje $X$ a kihúzott második legnagyobb számot. Ekkor $X$ eloszlása a következő:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \frac{(90-k)\binom{k-1}{3}}{\binom{90}{5}}, \quad k = 4, 5, \ldots, 89$$

Szokás szerint a módusz meghatározásához a $p_{k+1}/p_k$ hányadost kell vizsgálnunk.

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\frac{(90-k-1)\binom{k}{3}}{\binom{90}{5}}}{\frac{(90-k)\binom{k-1}{3}}{\binom{90}{5}}} = \frac{(90-k-1)k}{(90-k)(k-3)}$$

Ezen tört értéke nagyobb mint 1, ha $k = 67$, és kisebb mint 1, ha $k = 68$. Tehát a módusz 68.

18. Mosóporvásárlásnál hatféle matricát kell összegyűjteni a minden dobozban megtalálható matricákból ahhoz, hogy ingyen kapjunk egy doboz mosóport. Átlagosan hány doboz mosóport kell ehhez vásárolni?

*Megoldás*: Jelölje rendre $X_1, X_2, \ldots, X_6$ azon mosóporvásárlások számait, melyek ahhoz szükségesek, hogy egy-egy matrica megtalálása után újfajta matricát találjunk. $X_1 = 1$. $X_2$ geometriai eloszlású $\frac{5}{6}$ paraméterrel, ezért várható értéke $\frac{6}{5}$.$X_3$ is geometriai eloszlású $\frac{4}{6}$ paraméterrel, ezért várható értéke $\frac{6}{4}$. $X_4$ is geometriai eloszlású $\frac{3}{6}$ paraméterrel, ezért várható értéke $\frac{6}{3}$. $X_5$ is geometriai eloszlású $\frac{2}{6}$ paraméterrel, ezért várható értéke $\frac{6}{2}$. $X_6$ geometriai eloszlású $\frac{1}{6}$ paraméterrel, ezért várható értéke 6. Használva a várható érték linearitását kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_6) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{E}(X_i) = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + 6 = 14,7.$$

19. Egy tanteremben 10 darab kétüléses pad található. 10 fiút és 10 lányt ültetnek le véletlenszerűen. Hány olyan pad lesz átlagosan, amelyben fiú és lány is ül?

*Megoldás*: Tekintsünk egy tetszőleges padot. Annak a valószínűsége, hogy a padon "vegyes pár" foglal helyet 1/2. Legyen $X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ annak az eseménynek a Bernoulli változója, hogy az $i$-dik padnál "vegyes pár" ül. Ekkor $\mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Így használva a várható érték linearitását kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{E}(X_i) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

20. (Tétduplázásos rulettstratégia) $2^N - 1$ zseton tőkével kezdjük a játékot és addig játszunk, amíg nem nyerünk vagy el nem fogy a tőkénk. Először felteszünk 1 zsetont a pirosra. Ha nyerünk, akkor abbahagyjuk a játékot, ha veszítünk, akkor tovább játszunk és feteszünk 2 zsetont a pirosra. Ha nyerünk, abbahagyjuk a játékot, ha veszítünk, akkor felteszünk 4 zsetont a pirosra. Ha nyerünk leállunk, ha veszítünk, akkor felteszünk 8 zsetont a pirsora stb. Számolja ki a nyereségünk (veszteségünk) várható értékét!

*Megoldás*: Úgy veszíthetünk, hogy rendre az első $N$ tétet elveszítjük. Ennek valószínűsége $p^N$, ahol $p = 19/37$. Ekkor veszteségünk összege $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{N-1} = 2^N - 1$. Ha nyerünk, akkor a nettó nyereségünk biztos, hogy 1 zseton. Ez megtörténhet rendre az első, második, ... , az $N$-dik tét után. Tehát a nyerés valószínűsége

$$(1-p) + p(1-p) + p^2(1-p) + \cdots + p^{N-1}(1-p) = 1 - p^N.$$

Ezért nyereségünk várható értéke:

$$-p^N(2^N - 1) + (1 - p^N) \cdot 1 = 1 - (2p)^N.$$

Ez az érték negatív, hiszen $\frac{19}{37} > \frac{1}{2}$.

21. (Minimális kockázat rulettstratégia) A játékhoz összesen 1 zsetonra van szükségünk. Feltesszük például a pirosra az 1 zsetonunkat. Ha veszítünk, akkor abbahagyjuk a játékot, ha nyerünk, akkor felteszünk 2 zsetont. Ha veszítünk, akkor abbahagyjuk a játékot, ha nyerünk, akkor felteszünk a pirosra 3 zsetont stb. Addig játszunk, amíg a fekete vagy a 0 ki nem jön. Írja fel a nyeresés (veszteség) várható értékét szumma alakban!

*Megoldás*: Legyen $N$ az, hogy hányszor nyerünk, mielőtt veszítünk. Ekkor a nyereségünk $1 + 2 + 3 + \cdots + N - (N+1) = \frac{(N+1)(N-2)}{2}$. Annak valószínűsége, hogy pont $N$-szer nyerünk, $p^N(1-p)$, ahol $p = \frac{18}{37}$. Ezzel tehát a várható nyereségünk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{2} p^n (1-p).$$