Felsőbb matematika vizsga – 2015-01-13

Név ______________________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Mondja ki a Collatz-Wielandt formulát! *(1 pont)*

2. Adja meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzének sajátértékeit! *(1 pont)*

3. Adja meg a képterét, magterét, illetve ezek dimenzióját az alábbi lineáris leképezésnek! *(3 pont)*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; f(a,b,c) = (a,b,0).$$

4. Írja fel a tér $\mathbf{e} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ vektor körüli 45 fokos forgatásának standard bázisbeli mátrixát! (A mátrixműveleteket nem kell elvégezni!) *(2 pont)*

5. Egészítse ki az alábbi mátrixot úgy, hogy önadjungált legyen! *(1 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 3i & 4 & * \\ 1+2i & 4-i & 5 \end{bmatrix}$$

6. Írja fel a csupa egyesből álló 2015×2015-ös mátrix Jordan-féle normálalakját, és konstruálja meg egy Jordan-bázisát! *(2 pont)*

7. Írjon fel olyan 2×2-es (komplex) mátrixot, amelyre $\mathrm{rang}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \neq \mathrm{rang}(\mathbf{A})$! *(2 pont)*

8. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es valós mátrix. Tudjuk, hogy a nulla nincs benne a Gersgorin-körök úniójában. Hány megoldása van az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek, ahol $\mathbf{b}$ tetszőleges nemnulla vektor? (Tömör indoklást kérünk) *(2 pont)*

9. Mondja ki a Moore–Penrose-tételt! *(2 pont)*

10. Igazolja, hogy egy $n \times n$-es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha létezik n független sajátvektora! *(4 pont)*

11. Mondja ki és bizonyítsa be a Gram-Schmidt ortogonalizációról szóló tételt! *(5 pont)*