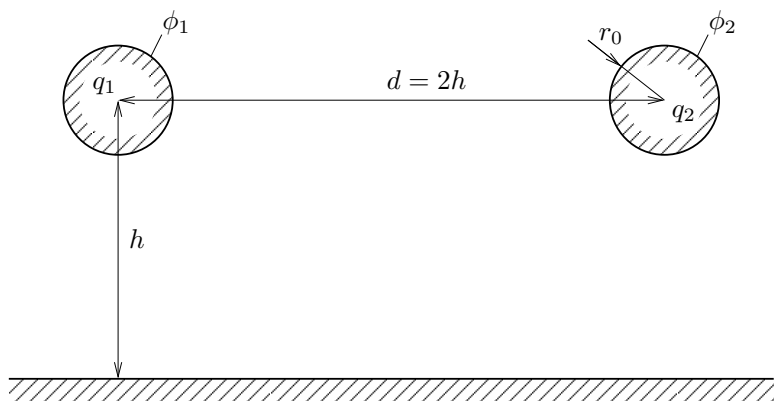


Név nagybetűvel:	Nagypéldák:	/10	/10
Neptun-kód:	Kispeéldák:		/10
Hallgató aláírása:	Σ :		/30
	IMSc pont:		/10

Az egyes feladatcsoportokat külön lapon, áttekinthetően dolgozza ki; a végeredményeket húzza alá. Minden esetben éljen a megengedhető „mérnöki” közelítésekkel.

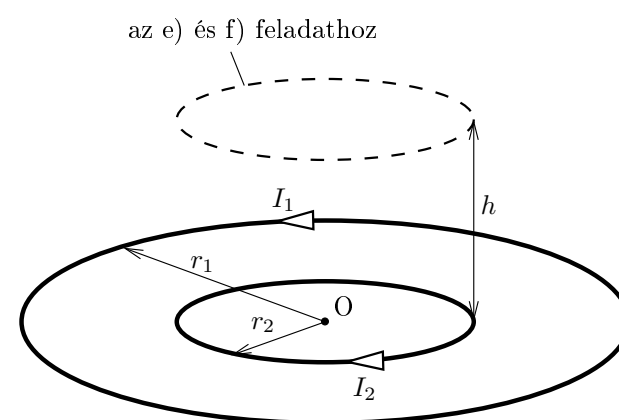
I. példa. A föld síkja felett $h = 5$ cm magasságban (a levegőben) két hosszú, párhuzamos, $r_0 = 10$ mm sugarú hengeres vezeték helyezkedik el egymástól $d = 2h$ távolságra (lásd az ábrán). A földet vezetőnek tekintjük, potenciálját 0-nak választjuk.

- Számítsa ki a vezetékek ϕ_1 és ϕ_2 potenciálját, ha azok hosszegységre eső töltése: $q_1 = 100$ pC/m és $q_2 = q_1$. (3 pont)
- Határozza meg a vezetékpár-föld elektródarendszer hosszegységre vonatkoztatott C'_{10} részkapacitását, az un. földkapacitást. Megjegyzés: az a) részfeladat eredménye felhasználható. (1 pont)
- Számítsa ki a vezetékek ϕ_1 és ϕ_2 potenciálját, ha azok hosszegységre eső töltése: $q_1 = 50$ pC/m és $q_2 = -q_1$. (3 pont)
- Határozza meg a vezetékpár-föld elektródarendszer hosszegységre vonatkoztatott C'_{12} részkapacitását, az un. főkapacitást. Megjegyzés: a b) és c) részfeladatok eredménye felhasználható. (1 pont)
- Az 1. vezetékét földeljük, a 2. számút pedig $\phi_2 = 2$ V potenciálra hozzuk. Mekkora töltés van a 2. vezeték $l = 30$ cm hosszúságú szakaszán? (2 pont)
- (nem kötelező IMSc feladat) Számítsa ki a vezetékpár C' hosszegységre eső kapacitását, ha a földet vezető anyag helyett $\epsilon_r = 2,5$ dielektromos állandójú szigetelő közegként modellezzük. (6 IMSc pont)



II. példa. Az ábra szerint közös síkban két vékony, kör alakú, koncentrikus vezető hurok helyezkedik el a levegőben; sugaraik $r_1 = 20$ cm és $r_2 = 1$ cm. (Figyelem, az ábra nem méretarányos!)

- Mekkora a mágneses térerősség a hurkok közös középpontjában („O” pont), ha a hurkok árama $I_1 = 20$ mA és $I_2 = 0$ mA? (3 pont)
- Határozza meg a két hurok L_{21} kölcsönös indukciós együtthatóját. (Megjegyzések: Itt felhasználható az a) feladatrés eredménye. A nagyobbik hurok mágneses tere közelítőleg homogénnek vehető a kisebbik hurok belsejében.) (2 pont)
- Számítsa ki az 1. hurok ψ_1 mágneses fluxusát, ha $I_1 = 0$ A és $I_2 = -1,5$ A. (1 pont)
- Adja meg a 2. hurokban folyó áram amplitúdóját, ha az 1. hurok áramának időfüggvénye $i_1(t) = 1$ A $\cdot \cos(314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t)$. A 2. hurok zárt, ellenállása az adott frekvencián $R_2 = 1,4$ m Ω , önindukciós együtthatója pedig $L_2 = 41,8$ pH. (3 pont)
- Ön szerint nő, csökken vagy változatlan marad a hurokpár L_{21} paraméterének abszolút értéke, ha a 2. hurkot a tengelye mentén mozgatva $h = r_1$ magasságba emeljük? (Az ábrán szaggatott vonallal jelölve.) Válaszát nem kell indokolnia. (1 pont)
- (nem kötelező IMSc feladat) Határozza meg az L_{21} kölcsönös indukciós együtthatót az e) pontban leírt elrendezésre. (4 IMSc pont)



Kis példák Kérjük, külön lapon dolgozza ki. Az eredményeket paraméteres alakban kell megadni, és nem kell rávezetni a feladatlagra.

1. Egy R sugarú hengeres vezetőben I áram folyik homogén eloszlásban. Adja meg a mágneses indukció nagyságát a vezeték tengelyétől $R/2$ távolságban. (2 pont)
2. Két elektróda közötti térrészt homogén, nem ideális szigetelőanyag tölt ki, amelynek permittivitása ϵ , fajlagos vezetőképessége σ . A két elektróda között mérhető szivárgási ellenállás R . Adja meg az elektródapár kapacitását. (2 pont)
3. Mágneses anyag egy adott pontjában a mágneses térerősség abszolút értéke H , a mágnesezettség abszolút értéke M . Fejezze ki az indukcióvektor abszolút értékét. (2 pont)
4. Szabad térben Q töltésű tömegpont halad $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ sebességgel; utóbbi a derékszögű koordináta-rendszerbeli felbontást jelenti. A homogén mágneses mező indukció vektora ugyanitt $\mathbf{B} = (0, B_y, 0)$. Adja meg az elektromos térerősség vektorát, ha a tömegpontra ható erők eredője zérus. (2 pont)
5. Elektrosztatikus térben a skalárpotenciál kifejezése egy koherens egységrendszerben $\phi(x, y, z) = \phi(x) = 5 \cos(\pi x)$. Fejezze ki az elektromos térerősség vektorát mint a hely függvényét. (2 pont)

Elemi töltés- és árameloszlások keltette mezők vákuumban:

- Ponttöltés: $\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$, $E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$
- Végtelen egyenes vonaltöltés: $\phi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r}$, $E_r(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$
- Végtelen egyenes vonaláram: $B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$

A Biot-Savart-törvény: $H(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$

Fizikai állandók: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$

I. példa. A föld síkja felett $h = 5$ cm magasságban (a levegőben) két hosszú, párhuzamos, $r_0 = 10$ mm sugarú hengeres vezeték helyezkedik el egymástól $d = 2h$ távolságra (lásd az ábrán). A földet vezetőnek tekintjük, potenciálját 0-nak választjuk.

- a) Számítsa ki a vezetékek ϕ_1 és ϕ_2 potenciálját, ha azok hosszegységre eső töltése:
 $q_1 = 100$ pC/m és $q_2 = q_1$. (3 pont)

Megoldás tükrözéssel és kis sugarú közelítéssel (1 p)

$$\phi_1 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{h}{r_0} - \ln \frac{h}{2h} + \ln \frac{h}{2h} - \ln \frac{h}{2\sqrt{2}h} \right) = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2\sqrt{2}h}{r_0} = 4,76 \text{ V} \quad (1 \text{ p})$$

Szimmetria miatt $\phi_2 = \phi_1$ (1 p)

- b) Határozza meg a vezetékpár-föld elektródarendszer hosszegységre vonatkoztatott C'_{10} részkapacitását, az un. földkapacitást. Megjegyzés: az a) részfeladat eredménye felhasználható. (1 pont)

$$q_1 = C'_{10}\phi_1 + C'_{12}(\phi_1 - \phi_2) \rightarrow q_1^{(a)} = C'_{10}\phi_1^{(a)} \rightarrow C'_{10} = \frac{q_1^{(a)}}{\phi_1^{(a)}} = 21,0 \text{ pF/m} \quad (1 \text{ p})$$

- c) Számítsa ki a vezetékek ϕ_1 és ϕ_2 potenciálját, ha azok hosszegységre eső töltése:
 $q_1 = 50$ pC/m és $q_2 = -q_1$. (3 pont)

Megoldás tükrözéssel és kis sugarú közelítéssel (1 p)

$$\phi_1 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{h}{r_0} - \ln \frac{h}{2h} - \ln \frac{h}{2h} + \ln \frac{h}{2\sqrt{2}h} \right) = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2}h}{r_0} = 1,76 \text{ V} \quad (1 \text{ p})$$

Szimmetria miatt $\phi_2 = -\phi_1$ (1 p)

- d) Határozza meg a vezetékpár-föld elektródarendszer hosszegységre vonatkoztatott C'_{12} részkapacitását, az un. főkapacitást. Megjegyzés: a b) és c) részfeladatok eredménye felhasználható. (1 pont)

$$q_1^{(c)} = C'_{10}\phi_1^{(c)} + C'_{12}2\phi_1^{(c)} \rightarrow C'_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^{(c)}}{\phi_1^{(c)}} - C'_{10} \right) = 3,7 \text{ pF/m} \quad (1 \text{ p})$$

- e) Az 1. vezetékot földeljük, a 2. számút pedig $\phi_2 = 2$ V potenciálra hozzuk. Mekkora töltés van a 2. vezeték $l = 30$ cm hosszúságú szakaszán? (2 pont)

$$q_2 = C'_{20}\phi_2 + C'_{12}(\phi_2 - 0), \text{ és a szimmetria miatt } C'_{20} = C'_{10} \quad (1 \text{ p})$$

$$Q = l(C'_{10} + C'_{12})\phi_2 = 14,8 \text{ pC} \quad (1 \text{ p})$$

- f) (nem kötelező IMSc feladat) Számítsa ki a vezetékpár C' hosszegységre eső kapacitását, ha a földet vezető anyag helyett $\epsilon_r = 2,5$ dielektromos állandójú szigetelő közegként modellezzük. (6 IMSc pont)

A példatár 2.28 példája alapján a tükröltések szorzója $\alpha = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} = -0,43$ (2 p)

$$\text{Innen } \phi_1 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{h}{r_0} + \alpha \ln \frac{h}{2h} - \ln \frac{h}{2h} - \alpha \ln \frac{h}{2\sqrt{2}h} \right) \quad (2 \text{ p})$$

$$C' = \frac{q_1}{2\phi_1} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h(\sqrt{2})^\alpha}{r_0}} = 12,9 \text{ pF/m} \quad (2 \text{ p})$$

II. példa. Az ábra szerint közös síkban két vékony, kör alakú, koncentrikus vezető hurok helyezkedik el a levegőben; sugaraik $r_1 = 20$ cm és $r_2 = 1$ cm. (Figyelem, az ábra nem méretarányos!)

- a) Mekkora a mágneses térerősség a hurok közös középpontjában („O” pont), ha a hurok árama $I_1 = 20$ mA és $I_2 = 0$ mA? (3 pont)

$$\text{A Biot-Savart-törvényt az 1. hurokra felírva: } H = \frac{I_1}{4\pi} \oint_{(1)} \frac{dl}{r_1^2} \quad (2 \text{ p})$$

$$\text{amelyből } H = \frac{I_1}{4\pi r_1^2} \cdot 2r_1\pi = \frac{I_1}{2r_1} = 50 \text{ mA/m} \quad (1 \text{ p})$$

- b) Határozza meg a két hurok L_{21} kölcsönös indukciós együtthatóját. (Megjegyzések: Itt felhasználható az a) feladatrész eredménye. A nagyobbik hurok mágneses tere közelítőleg homogénnek vehető a kisebbik hurok belsejében.) (2 pont)

$$\text{A mágneses indukció közelítőleg homogén a 2. hurokban, és rá merőleges,} \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{ezért az irányítást is figyelembe véve } L_{21} = \frac{\psi_2}{I_1} \approx \frac{-\mu_0 H^{(a)} r_2^2 \pi}{I_1^{(a)}} = -0,99 \text{ nH} \quad (1 \text{ p})$$

- c) Számítsa ki az 1. hurok ψ_1 mágneses fluxusát, ha $I_1 = 0$ A és $I_2 = -1,5$ A. (1 pont)

$$\psi_1 = L_{12}I_2 = L_{21}I_2 = 1,5 \text{ nWb} \quad (1 \text{ p})$$

- d) Adja meg a 2. hurokban folyó áram amplitúdóját, ha az 1. hurok áramának időfüggvénye $i_1(t) = 1 \text{ A} \cdot \cos(314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t)$. A 2. hurok zárt, ellenállása az adott frekvencián $R_2 = 1,4$ m Ω , önindukciós együtthatója pedig $L_2 = 41,8$ pH. (3 pont)

$$\text{A 2. hurokra felírható feszültségtörvény: } j\omega L_{21}I_1 = (R_2 + j\omega L_2)I_2 \quad (2 \text{ p})$$

$$\text{innen } |I_2| = \frac{\omega |L_{21}|}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} |I_1| \approx \frac{\omega |L_{21}|}{R_2} |I_1| = 0,221 \text{ mA} \quad (1 \text{ p})$$

- e) Ön szerint nő, csökken vagy változatlan marad a hurokpár L_{21} paraméterének abszolút értéke, ha a 2. hurokot a tengelye mentén mozgatva $h = r_1$ magasságba emeljük? (Az ábrán szaggatott vonallal jelölve.) Válaszát nem kell indokolnia. (1 pont)

$$\text{Nyilvánvalóan csökken.} \quad (1 \text{ p})$$

- f) (nem kötelező IMSc feladat) Határozza meg az L_{21} kölcsönös indukciós együtthatót az e) pontban leírt elrendezésre. (4 IMSc pont)

$$\text{A példatár 4.4 feladata alapján } H = \frac{I_1}{4\sqrt{2}r_1} \quad (2 \text{ p})$$

$$\text{amellyel } L_{21} \approx \frac{-\mu_0 H r_2^2 \pi}{I_1} = -\frac{\mu_0 r_2^2 \pi}{4\sqrt{2}r_1} = -0,35 \text{ nH} \quad (2 \text{ p})$$

Kispéldák Kérjük, külön lapon dolgozza ki. Az eredményeket paraméteres alakban kell megadni, és nem kell rávezetni a feladatlapra.

1. Egy R sugarú hengeres vezetőben I áram folyik homogén eloszlásban. Adja meg a mágneses indukció nagyságát a vezeték tengelyétől $R/2$ távolságban. (2 pont)

$$\text{A gerjesztési törvény: } 2 \cdot \frac{R}{2} \pi H = \frac{(R/2)^2 \pi}{R^2 \pi} I \quad (1 \text{ p})$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{4R\pi} \quad (1 \text{ p})$$

2. Két elektróda közötti térrészt homogén, nem ideális szigetelőanyag tölt ki, amelynek permittivitása ϵ , fajlagos vezetőképessége σ . A két elektróda között mérhető szivárgási ellenállás R . Adja meg az elektródapár kapacitását. (2 pont)

$$C = \frac{\epsilon}{\sigma} G = \frac{\epsilon}{\sigma R} \quad (2 \text{ p})$$

3. Mágneses anyag egy adott pontjában a mágneses térerősség abszolút értéke H , a mágnesezettség abszolút értéke M . Fejezze ki az indukcióvektor abszolút értékét. (2 pont)

$$\text{Nem lehetséges: kevés az adat.} \quad (2 \text{ p})$$

4. Szabad térben Q töltésű tömegpont halad $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ sebességgel; utóbbi a derékszögű koordináta-rendszerbeli felbontást jelenti. A homogén mágneses mező indukció vektora ugyanitt $\mathbf{B} = (0, B_y, 0)$. Adja meg az elektromos térerősség vektorát, ha a tömegpontra ható erők eredője zérus. (2 pont)

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \quad (1 \text{ p})$$

$$\mathbf{E} = (0, 0, -v_x B_y) \quad (1 \text{ p})$$

5. Elektrosztatikus térben a skalárpotenciál kifejezése egy koherens egységrendszerben $\phi(x, y, z) = \phi(x) = 5 \cos(\pi x)$. Fejezze ki az elektromos térerősség vektorát mint a hely függvényét. (2 pont)

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi \quad (1 \text{ p})$$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} = \hat{\mathbf{e}}_x 5\pi \sin(\pi x) \quad (1 \text{ p})$$