ANALÍZIS 1. **II. PÓTZÁRTHELYI** **2015.december 3.**
Mérnök informatikus szak β-variáns Munkaidő: 50 perc

---

1. feladat (10 pont)
Számolja ki az

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x^2+1)}{x^2}$$

függvény határértékeit az értelmezési tartomány végpontjaiban. Hol és milyen típusú szakadása van a függvénynek?

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vagyis a kérdéses határértékek a függvény paritása miatt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)) \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{ch}(x^2+1)}{x^2} \overset{\mathbf{2p}}{=}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x\operatorname{sh}(x^2+1)}{2x} \lim_{x\to\infty} \operatorname{sh}(x^2+1) \overset{\mathbf{1p}}{=} \infty,$$

és

$$\lim_{x\to0-} f(x) \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \frac{\operatorname{ch}(x^2+1)}{x^2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \infty.$$

Így a függvénynek a 0-ban másodfajú szakadása van (**1p**), mindenhol máshol folytonos függvények kompozíciója, illetve hányadosa, tehát folytonos (**2p**).

---

2. feladat (10 pont)
Adja meg az

$$f(x) = \begin{cases} 5x - x^2 \sin\frac{2}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény $x_0 = 0$, illetve $x_0 = \frac{1}{\pi}$ pontbeli érintőegyenesének egyenletét.

$f(\frac{1}{\pi}) \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{5}{\pi}$. Ha $x \neq 0$, akkor

$$f'(x) \overset{\mathbf{3p}}{=} 5 - 2x\sin\frac{2}{x} - x^2\cos\frac{2}{x} \cdot \frac{-2}{x^2},$$

vagyis $f'(\frac{1}{\pi}) \overset{\mathbf{1p}}{=} 7$, így az érintőegyenes egyenlete: $y - \frac{5}{\pi} = 7(x - \frac{1}{\pi})$ (**1p**).

$$f'(0) \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{h\to0} \frac{5h - h^2\sin\frac{2}{h}}{h} \overset{\mathbf{2p}}{=} 5 - \lim_{h\to0} h\sin\frac{1}{h} = 5,$$

tehát a 0 pontbeli érintő egyenlete: $y = 5x$. (**1p**)

3. feladat (5+5 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(2x)}{e^{4x}-3}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{x(\cos(5x)+2)}\right).$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(2x)}{e^{4x}-3}\overset{\mathbf{1p}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}}{e^{4x}-3}\overset{\mathbf{2p}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{2e^{4x}}\cdot\frac{1-e^{-4x}}{1-3e^{-4x}}\overset{\mathbf{2p}}{=}0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{x(\cos(5x)+2)}\right)\overset{\mathbf{1p}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(5x)+2-3}{3x(\cos(5x)+2)}\overset{\mathbf{2p}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-5\sin(5x)}{3(\cos(5x)+2)-15x\sin(5x)}\overset{\mathbf{2p}}{=}0.$$

---

4. feladat (10 pont)
Hol konvex, illetve konkáv az $\ln\frac{1+x}{1-x}$ függvény?

$x\in D_f$, ha $1-x>0$ és $1+x>0$ vagyis $D_f=(-1,1)$. (**2p**) Ekkor

$$f'(x)\overset{\mathbf{3p}}{=}\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{2}{1-x^2},$$

és

$$f''(x)\overset{\mathbf{2p}}{=}\frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

Itt $f''(x)>0$, ha $x>0$, és $f''(x)<0$, ha $x<0$, vagyis f a $(-1,0]$ intervallumon konkáv, a $[0,1)$ intervallumon konvex, a 0-ban inflexiós pontja van (**3p**).

---

5. feladat (10 pont)
Adja meg az $f(x)=3\operatorname{arctg}(2x-5)$ függvény értelmezési tartományát valamint értékkészletét. Igazolja, hogy a függvény a teljes értelmezési tartományán invertálható, és adja meg inverzét, annak értelmezési tartományát valamint értékkészletét.

$D_f \overset{\mathbf{1p}}{=} \mathbb{R}$, $R_f \overset{\mathbf{1p}}{=} \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

$$f'(x)) \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{3\cdot 2}{1+(2x-5)^2}) \overset{\mathbf{1p}}{>} 0,$$

tehát f invertálható (**1p**),

$$f^{-1}(x)) \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{3}+5\right),$$

$R_{f^{-1}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \mathbb{R}$, $D_{f^{-1}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.