Keresztfélév - 1. vizsga
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. a) Hogyan definiáltuk az előadáson egy valószínűségi változó szórásnégyzetét?

   b) Mit értünk az alatt, hogy egy valószínűségi változó örökifjú a pozitív egészek halmazán? Milyen eloszlású valószínűségi változók teljesítik a fenti tulajdonságot?

   Megoldás:

   a)

   (5 pont) Legyen X egy valószínűségi változó, melynek létezik a várható értéke. A

   $$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

   várható értéket az X szórásnégyzetének nevezzük,

   (0 pont) amennyiben ez létezik.

   Ha a megoldó nem az előadáson elhangzott fenti definíciót, hanem a $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ formulát adja meg (hibátlanul), akkor 3 pont jár.

   b)

   Az X valószínűségi változót *örökifjúnak* nevezzük az $\mathbb{N}^+$ halmazon, amennyiben

   (1 pont) $\text{ran}X = \mathbb{N}^+$, és

   (2 pont)

   $$\mathbb{P}(X > k + n \mid X > k) = \mathbb{P}(X > n).$$

   teljesül minden $k, n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

   (2 pont) Egy nem konstans X valószínűségi változó pontosan akkor örökifjú az $\mathbb{N}^+$ halmazon, ha $X \sim Geo(p)$ valamilyen $p \in (0;1)$ paraméterrel.

   (Ha következtetésnek csak az egyik iránya szerepel, akkor a 2 pontból 1 jár.)

2. Összekeverünk 4 kártyalapot, melyek közül pontosan az egyik piros, majd (lefordíva és) egymásra téve őket magunk elé helyezzük a lapokat. Ezek után elkezdünk dobálni egy szabályos érmét. Legfeljebb 4-szer dobunk, de amennyiben egy dobásnál írás az eredmény, megállunk. Végül annyi kártyát húzunk a megkevert lapokból (mindig a felsőt kihúzva), ahány fejet dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy 4 darab fejet dobtunk, ha tudjuk, hogy a húzott lapok között van piros?

Megoldás:

(1 pont) Legyen F_i az az esemény, hogy i darab fejet dobunk, pontosabban az első i dobás fej, és $i < 4$ esetén az $(i+1)$-edik írás $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$. Jelölje továbbá Pi azt az eseményt, hogy a húzott lapok között szerepel a piros. A keresett valószínűség $\mathbb{P}(F_4 \mid Pi)$.

(1 pont) Az F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 események teljes eseményrendszert alkotnak

(2 pont) ezért alkalmazható rájuk a Bayes-tétel:

$$\mathbb{P}(F_4 \mid Pi) = \frac{\mathbb{P}(Pi \mid F_4)\,\mathbb{P}(F_4)}{\sum_{i=0}^{4} \mathbb{P}(Pi \mid F_i)\,\mathbb{P}(F_i)}.$$

Ha a tétel nincs is nevesítve, akkor is hivatkozni kell rá, hogy ez a formula az előadás anyagának része. Az előadásra való hivatkozás nélkül a formulára nem jár pont. Ha valaki külön alkalmazza az egyerű Bayes-tételt, majd utána a teljes valószínűség tételét (mindkettőnél a tétel nevére vagy az előadásra hivatkozva), akkor is jár ez a két pont (egy-egy a két tétel alkalmazásáért). Hivatkozás nélkül ebben az esetben sem jár az adott pont. Kizárólag hibátlanul felírt formulá(k)ra adható pont.

(1 pont) Ha $i < 4$, akkor $\mathbb{P}(F_i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$, továbbá $\mathbb{P}(F_4) = \dfrac{1}{2^4}$.

(1 pont) Ha nem dobunk fejet, akkor persze nem húzhatunk pirosat, így $\mathbb{P}(Pi \mid F_0) = 0$. Ha 4 fejet dobunk, akkor biztosan kihúzzuk a piros lapot, azaz $\mathbb{P}(Pi \mid F_4) = 1$.

(1 pont) Továbbá $\mathbb{P}(Pi \mid F_1) = \dfrac{1}{4}$,

(2 pont) valamint (számításba véve, hogy hanyadikra húznuk pirosat)

$$\mathbb{P}(Pi \mid F_2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(Pi \mid F_3) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

A fenti valószínűségek úgy is megkaphatók, ha a húzás sorrendjét nem vesszük figyelembe, hanem (mivel a lapokat kezdetben megkeverjük) úgy tekintünk a húzásra, mint kettő ill. három lap kiválasztására a négyből:

$$\mathbb{P}(Pi \mid F_2) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(Pi \mid F_3) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

(1 pont) Behelyettesíve

$$\mathbb{P}(F_4 \mid Pi) = \frac{1 \cdot \frac{1}{2^4}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + 1 \cdot \frac{1}{2^4}} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{2^6}{4+4+3+4} = \frac{4}{15}.$$

Ha a megoldó nem írja le általános alakban a formulát, csak a behelyettesített értéket, akkor a formuláért járó 2 pontot is megkapja, amennyiben *hivatkozik a tételre*, és a behelyettesített értékek *midegyikének* jelentése *pontosan* tisztázott, valamint a helyettesítés *hibátlan*.

3. Két dobókockával dobunk. Jelölje X a dobott számok maximumát, Y pedig a dobott számok minimumát. Adjuk meg az X és az Y együttes eloszlását.

Megoldás:

(1 pont) Mind az X, mind az Y értékkészlete az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz. (Ha ez nincs külön kiemelve, de pl. egy táblázatos megadás alapján egyértelműen kiderül, akkor is jár a pont.)

(2 pont) Mivel $Y \leq X$, így $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = 0$ minden $l > k$ esetén.

(3 pont) Ha $k = l$, akkor az $\{X = k, Y = k\}$ esemény éppen azt jelenti, hogy mind a minimum, mind a maximum ugyanaz a k szám. Azaz két darab azonos számot dobtunk, ennek a valószínűsége pedig $1/36$ minden $1 \leq k \leq 6$ esetén.

(2 pont) Ha $k > l$, akkor az $\{X = k, Y = l\}$ esemény azt jelenti, hogy az egyik szám értéke k, a másiké pedig l.

(2 pont) Ez a két kockát megkülönböztetve pontosan két kimenetel esetén fordul elő, ezért tehát $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = 2/36 = 1/18$.

A három különböző valószínűség számlásánál indoklás is szükséges, ennek hiányában (tehát ha csak az értéket közli a megoldó) mindegyik helyes értékért 1 pont adható.

Az együttes eloszlás táblázata:

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18
2	0	1/36	1/18	1/18	1/18	1/18
3	0	0	1/36	1/18	1/18	1/18
4	0	0	0	1/36	1/18	1/18
5	0	0	0	0	1/36	1/18
6	0	0	0	0	0	1/36

4. Legyen $X \sim B(10; 0{,}2)$ binomiális eloszlású valószínűségi változó, továbbá legyen $Y = 3X + 2$. Számoljuk ki az X és az Y korrelációját.

Megoldás:

(7 pont) Mivel az Y az X-nek lineáris transzformáltja (továbbá mindkét változó szórása pozitív, és véges), így az előadáson tanult tétel alapján $\operatorname{corr}(X, Y) = \pm 1$.

(3 pont) Itt az előjelet az X együtthatójának előjele határozza meg az Y-nak az X változóval történő előállításában. Ez az együttható itt 3, ami pozitív, tehát $\operatorname{corr}(X, Y) = 1$.

A korreláció a definíció alapján is kiszámítható, így egy **második megoldás** a következő:

(1 pont) $\operatorname{corr}(X, Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X)\,\mathbb{D}(Y)}$,

(1 pont) itt $\mathbb{D}(X) = \sqrt{10 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{1{,}6}$,

(2 pont) továbbá a szórásra tanult transzformációs formulák alapján

$$\mathbb{D}(Y) = \mathbb{D}(3X + 2) = \mathbb{D}(3X) = 3\,\mathbb{D}(X) = 3\sqrt{1{,}6}.$$

(2 pont) A kovariancia lineáris a második változóban, így

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(X, 3X + 2) = 3 \cdot \operatorname{cov}(X, X) + \operatorname{cov}(X, 2).$$

(1 pont) Konstans változóval vett kovariancia nulla: $\operatorname{cov}(X, 2) = 0$.

(2 pont) Továbbá $\operatorname{cov}(X, X) = \mathbb{D}^2(X) = 1{,}6$,

(1 pont) tehát $\operatorname{corr}(X, Y) = \dfrac{3 \cdot 1{,}6}{3 \cdot \sqrt{1{,}6} \cdot \sqrt{1{,}6}} = 1$.

5. Egy program egyenletesen véletlenszerűen generál egy egész számot az $[1; 5]$ zárt intervallumban (tehát az intervallumban minden egész szám $1/5$ valószínűséggel adódik kimenetként). Tegyük fel, hogy ezzel a programmal egymástól függetlenül 1000 értéket generálunk, végül pedig összeadjuk a kapott eredményeket. Mi az összeg várható értéke és szórása? Közelítőleg mi a valószínűsége, hogy az összeg nagyobb, mint 2900, de kisebb, mint 3100?

Megoldás:

(1 pont) Jelölje X_i az i-edik generált számot, ekkor $X_1, \dots, X_{1000}$, azonos eloszlású, együttesen független valószínűségi változók. A generált számok összege ekkor $\sum_{i=1}^{1000} X_i$.

(1 pont) Ennek várható értéke a várható érték linearitása és a változók azonos eloszlása miatt

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) = \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{E}(X_i) = 1000 \cdot \mathbb{E}(X_1).$$

(1 pont) Az X_1 értékkészlete $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, és mindegyik értéket $1/5$ valószínűséggel veszi fel, így

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3,$$

tehát az összeg várható értéke 3000.

(1 pont) A szórásnégyzethez először számoljuk ki az $\mathbb{E}(X_1^2)$ várható értéket a transzformált várható értékére vonatkozó formula segítségével:

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} = \frac{1+4+9+16+25}{5} = \frac{55}{5} = 11.$$

(1 pont) Tehát $\mathbb{D}^2(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = 11 - 9 = 2$.

(1 pont) Mivel az $X_1, \dots, X_{1000}$ változók együttesen (és így páronként is) függetlenek, így

$$\mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) = \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{D}^2(X_i) = 1000 \cdot \mathbb{D}^2(X_1) = 2000,$$

(1 pont) így az összeg szórása $\sqrt{2000} \approx 44{,}7214$.

(0 pont) Keressük a $\mathbb{P}\left(2900 < \sum_{i=1}^{1000} X_i < 3100\right)$ valószínűséget.

(1 pont) Az összeget sztenderdizálva ez éppen

$$\mathbb{P}\left(\frac{2900 - \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)}{\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)} < \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)}{\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)} < \frac{3100 - \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)}{\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{-100}{\sqrt{2000}} < \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 3000}{\sqrt{2000}} < \frac{100}{\sqrt{2000}}\right) \approx \mathbb{P}\left(-2{,}24 < \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 3000}{\sqrt{2000}} < 2{,}24\right).$$

(1 pont) Ez a centrális határeloszlás tétele szerint közelítőleg $\Phi(2{,}24) - \Phi(-2{,}24)$, ahol Φ a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

(1 pont) A Φ függvényre tanult transzformációs formulát felhasználva a fenti kifejezés értéke éppen $2 \cdot \Phi(2{,}24) - 1 \approx 2 \cdot 0{,}9875 - 1 = 0{,}975$.

6. Az 5. feladatban szereplő program segítségével generálunk egy 15 elemű mintát, és a következőt kapjuk:

$$2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 5,\ 5,\ 2,\ 3,\ 5,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2.$$

Számoljuk ki erre a mintára a mintaátlagot és a korrigált tapasztalati szórást. Adjuk meg a tapasztalati eloszlásfüggvényt is.

Megoldás:

(1 pont) A mintaátlag

$$\overline{x} = \frac{2+2+3+4+1+2+5+5+2+3+5+4+3+5+2}{15} = \frac{48}{15} = 3{,}2.$$

(1 pont) A korrigált tapasztalati szórásnégyzet $s^{*\,2} = \frac{n}{n-1}s^2$, ahol s^2 a tapasztalati szórásnégyzet, n pedig a minta elemszáma (jelen esetben 15), a tapasztalati szóránégyzet pedig az $s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ képlettel számolható,

(1 pont) ahol

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= \frac{2^2+2^2+3^2+4^2+1^2+2^2+5^2+5^2+2^2+3^2+5^2+4^2+3^2+5^2+2^2}{15} \\ &= \frac{4+4+9+16+1+4+25+25+4+9+25+16+9+25+4}{15} = \frac{180}{15} = 12,\end{aligned}$$

(1 pont) így tehát

$$s^{*\,2} = \frac{15}{14} \cdot (12 - 3{,}2^2) = \frac{15}{14} \cdot 1{,}76 \approx 1{,}8857.$$

(1 pont) A korrigált tapasztalati szórás tehát $s^* = \sqrt{s^{*\,2}} \approx \sqrt{1{,}8857} \approx 1{,}3732$.

Ha az általános képletek nem szerepelnek, de a hibátlan helyettesítés igen, akkor a képletekért járó pont is megadandó. Ha a megoldó számológép segítségével számolja az átlagot és a korrigált tapasztalati szórást közvetlenül a mintából (tehát a fenti helyettesítéseket nem végzi el), a korrigált tapasztalati szórás és szórásnégyzet, valamint a tapasztalati szórásnégyzet képletének (vagy egy összevont képletnek), illetve az $\overline{x^2}$ értelmezésének szerepelnie kell az előző 4 pontért. Ezek bármelyikének hiányáért egyenként 1 pont levonás jár a fenti 4-ből (vagyis például egy puszta eredményközlés esetén mindössze az átlagért jár pont).

(1 pont) A rendezett minta

$$1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,$$

(4 pont) tehát a tapasztalati eloszlásfüggvény

$$F^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 1, \\ \frac{1}{15}, & \text{ha } 1 < t \le 2, \\ \frac{2}{5}, & \text{ha } 2 < t \le 3, \\ \frac{3}{5}, & \text{ha } 3 < t \le 4, \\ \frac{11}{15}, & \text{ha } 4 < t \le 5, \\ 1, & \text{ha } 5 < t. \end{cases}$$

(A rendezett mintának nem kell feltételnül szerepelni, az érte kapható 1 pont egy hibátlanul megadott eloszlásfüggvény esetén is jár.)