1. feladat (15 pont)

Adja meg a következő hatványsorok konvergenciatartományát!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{2^n\,\sqrt[3]{n}}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n\,\sqrt{n}}$.

a.) $\boxed{7}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{2^n\,\sqrt[3]{n}}}_{=a_n} (x-1)^n \qquad x_0 = 1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{\sqrt[n]{n}}} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \Longrightarrow R = 2 \quad 4$$

($\sqrt[n]{n} \to 1$)

$x=-1$: $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ div.
$(\alpha = \frac{1}{2} \not> 1)$

$x=3$: $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ konv. (Leibniz sor) K.T.: $(-1, 3]$

b.) $\boxed{8}$ $u := x^2$: $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{3^n\,\sqrt{n}}}_{:=\beta_n} u^n$; $u_0 = 0$

$$\sqrt[n]{|\beta_n|} = \frac{1}{3\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \longrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 3$$

$u=3$: $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ div. $(\alpha = \frac{1}{2} \not> 1)$

$u=-3$: $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konv. (Leibniz sor)

$\underbrace{-3 \le u = x^2}_{\forall\, x\text{-re teljesül}} < 3 \Longrightarrow |x| < \sqrt{3}$

K.T.: $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

2. feladat (12 pont)

Adja meg a következő függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát, és ezek konvergenciasugarát!

a) $f(x) = e^{3x+2}$; b) $g(x) = \dfrac{1}{4+6x^2}$.

a.) $\displaystyle e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$; $R = \infty$

$$f(x) = e^{3x+2} = e^2 e^{3x} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^2 \frac{3^n}{n!} x^n \quad 4$$

$R = \infty \quad 1$

an222α120412/1.

b.) $g(x) = \frac{1}{4+6x^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{-6x^2}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3x^2}{2}\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)^n x^{2n}$ 5

$|q| = \left|-\frac{3x^2}{2}\right| = \frac{3}{2}|x|^2 < 1 \Longrightarrow |x| < \sqrt{\frac{2}{3}} = R$ 2

3. feladat (11 pont)

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!
Írja fel a sor első négy nem nulla tagját elemi műveletekkel!
$f^{(12)}(0) = ?$

$f(x) = \left(1+(-5x^2)\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-5x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-5)^n\binom{-1/2}{n}x^{2n} =$ 3

$= 1 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + 5^2\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}x^4 - 5^3\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^6 + \dots$ 3

$|-5x^2| = 5|x|^2 < 1 \Longrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{5}} = R$ 2

$f^{(12)}(0) = 12!\,\underbrace{a_{12}}_{x^{12}\text{ együtthatója}} = 12!\,(-5)^6\binom{-1/2}{6}$ 3

4. feladat (12 pont)

Határozza meg az

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

integrál közelítő értékét az integrálandó függvényt az ötödrendű Taylor-polinomjával közelítve! Adjon felső becslést az elkövetett hibára!

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots, \quad u \in \mathbb{R}$ 2

$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$ 2 $\quad x \in \mathbb{R}$

$T_5(x) \longrightarrow$

$\int_0^1 e^{-x^2}dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \dots\Big|_0^1 =$

an222x120412/2.

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!\,5}}_{:=a} \underbrace{- \frac{1}{3!\,7}}_{:=b} + \dots \approx a \qquad 4$$

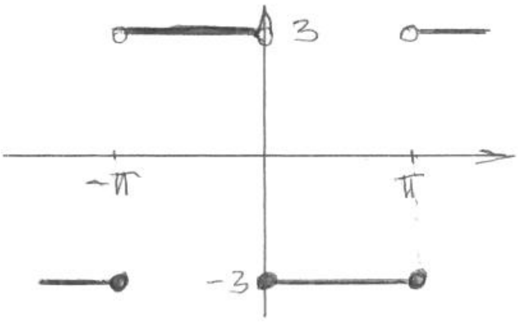
Leibniz sor, ezért $|H| \le |b| = \frac{1}{3!\,7}$ 3

1

5. feladat (13 pont) Határozza meg az alábbi függvény Fourier együtthatóit!
Írja fel a Fourier sor első négy nem nulla tagját!

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \in (-\pi, 0) \\ -3, & \text{ha } x \in [0, \pi] \end{cases} \qquad f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Legyen a sor összegfüggvénye ϕ ! $\quad \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?, \quad \phi(0) = ?$



$$f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \ne n\pi \\ 0, & \text{ha } x = n\pi \end{cases}$$

f és f^* Fourier sora azonos, de f^* páratlan, így
$a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ 2

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \sin kx}_{\text{páros}}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -3 \sin kx \, dx = \frac{-6}{\pi} \left. \frac{-\cos kx}{k} \right|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{6}{\pi k} (\cos k\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{12}{\pi} \frac{1}{k}, & \text{ha } k \text{ ptl.} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases} \qquad 5$$

$$\phi(x) = -\frac{12}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right) \qquad 3$$

$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \qquad 1$$

$$\phi(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{3-3}{2} = 0 \qquad 2$$

an2z2x120412/3.

6. feladat (17 pont) Legyen

$$f(x,y) = \frac{\cos(x-y)}{x^2-y^2} \qquad \text{és} \qquad P_0 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)!$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?$

b) Hol létezik gradiens? (Indoklás!) $\quad \operatorname{grad} f(P_0) = ?$

c) Adja meg $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0}$ értékét, ha $\underline{e} \parallel (-6, 8)$!

d) $\max \left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$

a) $\boxed{6}$ Ha $y \neq \pm x$:

$$f_x' = \frac{(-\sin(x-y))(x^2-y^2) - \cos(x-y)\cdot 2x}{(x^2-y^2)^2} \quad 3$$

$$f_y' = \frac{(-\sin(x-y))(-1)(x^2-y^2) - (\cos(x-y))(-2y)}{(x^2-y^2)^2} \quad 3$$

b) $\boxed{4}$ Ha $y \neq \pm x$, f_x' és f_y' $\exists$ és folytonos $\Rightarrow \exists \operatorname{grad} f$ 2

$$\operatorname{grad} f(P_0) = f_x'(P_0)\underline{i} + f_y'(P_0)\underline{j} = -\frac{4}{\pi^2}\underline{i} + \frac{4}{\pi^2}\underline{j}$$

c) $\boxed{5}$ $\underline{v} = -6\underline{i} + 8\underline{j}\,;\ |\underline{v}| = \sqrt{36+100} = 10 \Rightarrow \underline{e} = -\frac{6}{10}\underline{i} + \frac{8}{10}\underline{j}$ 1

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot\underline{e} \ (2) = \left(-\frac{4}{\pi^2}\underline{i} + \frac{4}{\pi^2}\underline{j}\right)\left(-\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}\right) =$$

$$= \frac{12}{\pi^2\cdot 5} + \frac{16}{\pi^2\cdot 5} \quad \left(= \frac{28}{\pi^2\cdot 5}\right) \quad 2$$

d) $\boxed{2}$ $\max \left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)| = \sqrt{\dfrac{16}{\pi^4} + \dfrac{16}{\pi^4}} = \sqrt{2}\,\dfrac{4}{\pi^2}$

7. feladat (20 pont) Legyen

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ -1, & \text{ha } (x,y)=(0,0)!\end{cases}$$

a) Létezik-e határértéke f-nek az origóban?

b) $f'_x(x,y)=?$, ha $(x,y)\neq(0,0)$.

c) $f'_x(0,0)=?$, $\quad f'_y(0,0)=?$

d) Totálisan differenciálható-e f az origóban?

a.) $\boxed{5}$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2}=2\\ &\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{-y^2}{y^2}=-1\end{aligned}\right\}\neq\Rightarrow\nexists \text{ a határérték az origóban}$$

b.) $\boxed{3}$ Ha $(x,y)\neq(0,0)$:

$$f'_x=\frac{4x(x^2+y^2)-(2x^2-y^2)\cdot2x}{(x^2+y^2)^2}$$

c.) $\boxed{10}$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\ (2)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{2h^2-0}{h^2-0}+1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3}{h}=\nexists\quad(\pm\infty)\quad (3)$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}\ (2)=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0-k^2}{0+k^2}+1}{k}=$$

$$=\lim_{k\to0}\underbrace{\frac{0}{k}}_{\equiv0}=0\quad (3)$$

d.) $\boxed{2}$ f nem totálisan deriválható az origóban, mert f nem folytonos az origóban ($\nexists$ a határérték az origóban.)

Vagy: $f'_x(0,0)\ \nexists \Rightarrow f$ nem totálisan deriválható az origóban.

Pótfeladatok (csak 40 pontig javítjuk ki):

8. feladat (8 pont)

Írja fel az

$$f(x,y) = e^x + x^2y^3 - y^4$$

függvény grafikonját a $(0,1)$ pontban érintő sík egyenletét!

$f'_x = e^x + 2xy^3$

$f'_y = 3x^2y^2 - 4y^3$ (4)

Az érintősík egyenlete:

$f'_x(0,1)(x-0) + f'_y(0,1)(y-1) - (z - f(0,1)) = 0$ (2)

$f'_x(0,1) = 1$, $f'_y(0,1) = -4$, $f(0,1) = 0$

Behelyettesítve: $x - 4(y-1) - z = 0$ (2)

9. feladat (12 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-8}$, $x_0 = 5$ b) $g(x) = \operatorname{ch} 3x^2$, $x_0 = 0$

a.) $f(x) = \dfrac{1}{x-8} = \dfrac{1}{(x-5)-3} = -\dfrac{1}{3} \dfrac{1}{1 - \frac{x-5}{3}} =$

$= -\dfrac{1}{3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x-5}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} -\dfrac{1}{3^{n+1}} (x-5)^n$ (5)

K. T.: $\left|\dfrac{x-5}{3}\right| = \dfrac{|x-5|}{3} < 1 \Rightarrow |x-5| < 3$, tehát $x \in (2,8)$ (2)

b.) $\operatorname{ch} u = 1 + \dfrac{u^2}{2!} + \dfrac{u^4}{4!} + \dfrac{u^6}{6!} + \dots$; $u \in \mathbb{R}$

$\operatorname{ch} 3x^2 = 1 + \dfrac{3^2x^4}{2!} + \dfrac{3^4x^8}{4!} + \dfrac{3^6x^{12}}{6!} + \dots$ (4)

K. T.: $(-\infty, \infty)$ (1)

an2z2x120412/6.