Valószínűségszámítás zárthelyi segédlet

Nem tankönyv, inkább csak a fontos fogalmak és képletek gyűjteménye

Tartalomjegyzék

Frissítve: 2021. április 10., 23:47

1. Kombinatorika

1.1. Alapok

	Ismétlés nélküli	**Ismétléses**
Permutáció	$P_n = n!$	$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$
Kombináció	$C_n^k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_n^{k,i} = \dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Variáció	$V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$V_n^{k,i} = n^k$

1.2. Fontos jellemzők

- Csak a kombinációnál nem számít a **sorrend**.
- Csak a permutációnál használunk fel **minden elemet**.
- Minél több **esetet zárunk ki**, annál nagyobb számmal kell osztani.

1.3. Tipikus feladatok

- **Ismétlés nélküli permutáció:** Hányféle sorrendben ülhet le egymás mellé n ember?
- **Ismétléses permutáció:** Hányféleképpen lehet sorba rakni n labda közül k_1, k_2, …, k_m egyformát?
- **Ismétlés nélküli kombináció:** Hány lottószelvényt vegyünk ahhoz, hogy biztosan legyen egy telitalálatunk?
- **Ismétléses kombináció:** A lottóhúzásnál minden alkalommal visszateszem a kihúzott golyót, így egy szám többször is szerepelhet.
- **Ismétlés nélküli variáció:** Egy n résztvevős futóversenyen hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón?
- **Ismétléses variáció:** Hányféleképpen lehet kiválasztani n különböző elemből k darabot?

2. Alapfogalmak és tételek

2.1. Eseménytér

Egy véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit tartalmazza. Az ezeket egyelemű halmazokként tartalmazó események az **elemi események**. Jele: $\boxed{\Omega}$

Az eseménytér összes részhalmazát hatványhalmazzal jelöljük: $\boxed{2^\Omega}$

2.2. Esemény

A kimenetelek egy $\mathcal{A}$ halmaza, egyben az eseménytér részhalmaza. Jele: $\boxed{\mathcal{A} \subset \Omega}$

Kétféle esemény mindig garantáltan eleme az eseménytérnek:

- **Biztos esemény:** $\boxed{\Omega}$
- **Lehetelten esemény:** $\boxed{\emptyset}$

2.3. Valószínűségi mérték és mező

Egy eseményhez valós számot rendelő P függvény a **valószínűségi mérték**:

$$\boxed{P : \mathcal{A} \mapsto [0,\, 1]}$$

Tulajdonságok:

- A biztos esemény valószínűsége **1**:

$$\boxed{P(\Omega) = 1}$$

- A lehetetlen esemény valószínűsége **0**:

$$\boxed{P(\emptyset) = 0}$$

- Az események páronként kizárják egymást, azaz **diszjunkt** események:

$$i \neq j : \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\mathcal{A}_i)}$$

Az $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

2.4. Klasszikus valószínűség

$$\boxed{P(\mathcal{A}) = \frac{|\mathcal{A}|}{|\Omega|}} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{valószínűségi } \textbf{mérték} = \frac{\textbf{kedvező} \text{ esetek száma}}{\textbf{összes} \text{ eset száma}}$$

2.5. Szitaformula

Más néven Poincaré-formula, egy véges halmazok elemszámainak meghatározásához használatos módszer. A formula 2 halmazra:

$$\boxed{|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|}$$

3 halmazra:

$$\boxed{|\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{C}| - |\mathcal{B} \cap \mathcal{C}| + |\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}|}$$

A formula lényege, hogy az önálló halmazok méretét összeadva kapunk **metszeteket**, melyeket ezután **ki kell vonni**, hogy az elemszám ne legyen a ténylegesnél nagyobb. 3 halmaz esetén már figyelni kell arra is, hogy a **kettős metszetek** kivonása után a **hármas metszetet** ismét hozzá kell adni, hogy teljes legyen az összeg.

2.6. Feltételes valószínűség

$\mathcal{A}$ esemény bekövetkezésének valószínűsége, feltéve, hogy $\mathcal{B}$ bekövetkezett és fordítva:

$$\boxed{P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{P(\mathcal{B})}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{P(\mathcal{B} \cap \mathcal{A})}{P(\mathcal{A})}}$$

Ahol $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}\mathcal{B})$, ebben a formában is mindig felírható az események együttes bekövetkezésének valószínűsége, valamint $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{B} \cap \mathcal{A})$.

2.7. Szorzási szabály

Közvetlenül a feltételes valószínűségből következik, a nevezővel való szorzás után:

$$\boxed{P(\mathcal{A}\mathcal{B}) = P(\mathcal{A}|\mathcal{B})P(\mathcal{B})}$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i\right) = P(\mathcal{A}_1)P(\mathcal{A}_2|\mathcal{A}_1)P(\mathcal{A}_3|\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2) \dots P(\mathcal{A}_n|\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2 \cdot \dots \cdot \mathcal{A}_{n-1})$$

2.8. Teljes valószínűség tétele

$$\boxed{P(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} P(\mathcal{A}|\mathcal{B}_i)P(\mathcal{B}_i)}$$

Ahol $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ..., $\mathcal{B}_n$ teljes eseményrendszert alkotnak és nem lehetetlen események:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i = \Omega, \quad P(\mathcal{B}_i) \neq 0$$

2.9. Bayes-tétel

Ha ismert $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ eltérő események valószínűsége, melyek egyike sem 0, valamint ismert a $P(\mathcal{B}|\mathcal{A})$ feltételes valószínűség, akkor:

$$\boxed{P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{B}|\mathcal{A})P(\mathcal{A})}{P(\mathcal{B})}}$$

Teljes eseményrendszerekre:

$$\forall i \in [1,\, n] : \boxed{P(\mathcal{A}_i|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_i)P(\mathcal{A}_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_j)P(\mathcal{A}_j)}}$$

Bizonyítás: Közvetlenül levezethető a feltételes valószínűség definíciójából:

$$(1.) \qquad P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})}{P(\mathcal{B})}, \qquad P(\mathcal{B}) \neq 0$$

$$(2.) \qquad P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{P(\mathcal{B}\cap\mathcal{A})}{P(\mathcal{A})}, \qquad P(\mathcal{A}) \neq 0$$

Továbbá, az együttes valószínűség (metszet) kommutatív halmazművelet, ezért:

$$\boxed{P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}\cap\mathcal{A})}$$

Ebből következően ekvivalens összefüggéseket kapunk nevezőkkel való szorzás után:

$$\underbrace{P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = P(\mathcal{A}|\mathcal{B})P(\mathcal{B})}_{(1.)} = \underbrace{P(\mathcal{B}|\mathcal{A})P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}\cap\mathcal{A})}_{(2.)}$$

Az ekvivalenciát felhasználva megkapjuk a Bayes-tétel egyenletét:

$$\boxed{P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{B}|\mathcal{A})P(\mathcal{A})}{P(\mathcal{B})}}$$

2.10. Események függetlensége

Két esemény független, ha:

$$\boxed{P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = P(\mathcal{A})P(\mathcal{B})} \qquad \boxed{P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = P(\mathcal{A})} \qquad \boxed{P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})}$$

A **biztos** és a **lehetetlen események** minden más eseménytől függetlenek.

2.11. Eloszlásfüggvény

Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett X változó eloszlásfüggvénye:

$$\boxed{F_X(t) = P(X \leq t)}$$

Ebből következően a valószínűség komplementere:

$$\boxed{P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F_X(t)}$$

Amennyiben X értéke a és b közé esik, a valószínűség következőképp számítható:

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)}$$

Ha $t \in [a, b]$, akkor az eloszlásfüggvény az alábbi folytonos függvény:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t > b \\ P(X \leq t) & \text{ha } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{ha } t < a \end{cases}$$

2.12. Sűrűségfüggvény

Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f_X, ha X-nek az F_X-fel jelölt eloszlásfüggvénye előáll t-szerinti integrálként:

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{F'_X(t) = f_X(t)}$$

A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény alábbi leképezése:

$$f_X(t) = \begin{cases} F'_X(t) & \text{ha } F_X \text{ differenciálható } t\text{-ben} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A függvény alatti terület, azaz **integrálja** a teljes valós számsíkon **1**:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1}$$

X változó a és b érték közti valószínűsége **határozott integrállal** számítható:

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(t)\,\mathrm{d}t}$$

2.13. Várható érték

Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett X változó várható értéke:

$$E(X) = \int\limits_{\Omega} X \, \mathrm{d}P$$

Ha X **sűrűségfüggvénye** f_X, akkor a várható érték:

$$\boxed{E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) \, \mathrm{d}t}$$

Ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor a várható érték kifejezhető az egyes események valószínűségeinek értékeivel vett szorzatok összegével (skalárszorzat):

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)}$$

Diszkrét példa: Egy D6 dobókocka dobásainak várható értéke:

$$\boxed{E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = 3.5}$$

Összesen 6-féle kimenet lehetséges és mindegyik egyformán $\frac{1}{6}$ eséllyel következik be.

2.14. Szórásnégyzet

A szórásnégyzet, más néven variancia egy valószínűségi változó várható érték körüli szóródását jellemzi.

$$\boxed{D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)}$$

3. Nevezetes eloszlások

3.1. Geometriai

3.1.1. Jellemzők

Paraméterek	$p \in \mathbb{R} : 0 < p \leq 1$
Értékkészlet	$X \in \mathbb{N}$
Eloszlásfüggvény	$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
Várható érték	$E(X) = \frac{1}{p}$
Szórásnégyzet	$D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$

3.1.2. Miről ismerhető fel?

Az első sikeres kimenetelű vagy az első n sikertelen kísérlet valószínűségét keressük.

3.1.3. Halmozott valószínűségek

- X **kisebb**, mint k:

$$\boxed{P(X < k) = 1 - (1-p)^{k-1}}$$

- X **legfeljebb** k:

$$\boxed{P(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} P(X = i)} = P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$$

- X **nagyobb**, mint k:

$$\boxed{P(X > k) = (1-p)^k}$$

- X **legalább** k:

$$\boxed{P(X \geq k) = (1-p)^{k-1}}$$

3.1.4. Tipikus példafeladat

Egy szavazáson olyan embert keresünk, aki független jelöltre szavazott. Ha a megfelelő jelölt megtalálásának esélye 20%, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy...

a) Pontosan a harmadik megkérdezett ember szavazott független jelöltre?

$$p = 0.2, \qquad k = 3$$

$$P(X = 3) = 0.2(1 - 0.2)^{3-1} = 0.2 \cdot 0.8^2 = \boxed{0.128}$$

b) Legalább 5 embert kell megkérdezni, mire lesz egy független szavazó?

$$p = 0.2, \qquad k = 5$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = (1 - 0.2)^{5-1} = 0.8^4 = \boxed{0.4096}$$

c) Legfeljebb 4 embert kell megkérdezni, mire lesz egy független szavazó?

$$p = 0.2, \qquad k = 4$$

$$P(X \leq 4) = \sum_{i=1}^{4} P(X = i) = \sum_{i=1}^{4} 0.2(1 - 0.2)^{i-1}$$

$$P(X \leq 4) = 0.2 \cdot \cancel{0.8^0} + 0.2 \cdot 0.8^1 + 0.2 \cdot 0.8^2 + 0.2 \cdot 0.8^3 = \boxed{0.5904}$$

3.2. Binomiális

3.2.1. Jellemzők

Paraméterek	$n \in \mathbb{N}_0, \quad p \in \mathbb{R} : 0 \leq p \leq 1$
Értékkészlet	$X \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, n\}$
Eloszlásfüggvény	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Várható érték	$E(X) = np$
Szórásnégyzet	$D^2(X) = np(1-p)$

3.2.2. Miről ismerhető fel?

A kísérletek száma n, kimenetelük pedig két állapotú lehet: sikeres vagy sikertlen.

3.2.3. Halmozott valószínűségek

- X **kisebb**, mint k:

$$\boxed{P(X < k) = P(X \leq k-1)}$$

- X **legfeljebb** k:

$$\boxed{P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)} = P(X = 0) + \ldots + P(X = k)$$

- X **nagyobb**, mint k:

$$\boxed{P(X > k) = 1 - P(X \leq k)}$$

- X **legalább** k:

$$\boxed{P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} P(X = i)} = P(X = k) + \ldots + P(X = n)$$

3.2.4. Tipikus példafeladat

Fadarabokat válogatunk barkácsoláshoz, melyek 90%-a hibátlan, a maradék selejt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy...

a) A következő 4 fadarab között nincs selejt?

$$p = 0.9, \qquad n = 4$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy n esetből **mindegyik sikeres**, azaz $X = n$:

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} 0.9^4 (1 - 0.9)^{4-4} = \cancel{1} \cdot 0.6561 \cdot \cancel{0.1^0} = \boxed{0.6561}$$

b) A következő 3 fadarab mind selejt?

$$p = 0.9, \qquad n = 3$$

Ez az az eset, amikor **nincs sikeres kimenet**, azaz $X = 0$:

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} 0.9^0 (1 - 0.9)^{3-0} = \cancel{1 \cdot 1} \cdot 0.1^3 = \boxed{0.001}$$

c) A következő 5 fadarab közül pontosan 3 lesz hibátlan?

$$p = 0.9, \qquad n = 5$$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} 0.9^3 (1 - 0.9)^{5-3} = 10 \cdot 0.729 \cdot 0.1^2 = \boxed{0.0729}$$

3.3. Poisson

3.3.1. Jellemzők

Paraméterek	$\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0$
Értékkészlet	$X \in \mathbb{N}_0$
Eloszlásfüggvény	$P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
Várható érték	$E(X) = \lambda$
Szórásnégyzet	$D^2(X) = \lambda$

3.3.2. Miről ismerhető fel?

A kísérletek száma ismeretlen és eltart a végtelenbe.

3.3.3. Halmozott valószínűségek

- X **kisebb**, mint k:

$$\boxed{P(X < k) = \sum_{i=0}^{k-1} P(X = i)} = P(X = 0) + \ldots + P(X = k - 1)$$

- X **legfeljebb** k:

$$\boxed{P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)} = P(X = 0) + \ldots + P(X = k)$$

- X **nagyobb**, mint k:

$$\boxed{P(X > k) = 1 - P(X \leq k)}$$

- X **legalább** k:

$$\boxed{P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)}$$

3.3.4. Tipikus példafeladat

Egy telefonközpontba egy óra alatt átlagosan 4 hívás fut be. Mekkora a valószínűsége annak, hogy...

a) Nem fut be egy hívás sem egy óra alatt?

$$n \to \infty, \qquad \lambda = 4, \qquad k = 0, \qquad t = 1$$

Mivel a feladat egységi időre kérdez, azaz $t = 1$, a valószínűséget nem kell skálázni.

$$P(X = 0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = e^{-4} = \boxed{0.0183}$$

b) A következő 3 óra mindegyikében pontosan 2 hívás fut be?

$$n \to \infty, \qquad \lambda = 4, \qquad k = 2, \qquad t = 3$$

Az időegység 1 óra, a kérdés értelmében **3 óra együttes valószínűsége** kell. A valószínűségek azonosak, köztük **logikai ÉS** kapcsolat van, tehát az órányi valószínűségek **szorzatát** keressük, ami jelen esetben **hatványozott** lesz:

$$\left[P(X = 2)\right]^3 = \left(\frac{4^2 e^{-4}}{2!}\right)^3 = (8e^{-4})^3 = \boxed{0.0032}$$

3.4. Hipergeometrikus

3.4.1. Jellemzők

Paraméterek	$N \in \mathbb{N}_0, \quad K, n \in \mathbb{N}_0 : n \leq K \leq N$
Eloszlásfüggvény	$P(X=k) = \dfrac{\dbinom{K}{k}\dbinom{N-K}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$
Várható érték	$E(X) = \dfrac{nK}{N}$

3.4.2. Miről ismerhető fel?

A kísérletek száma n, mintavétel alapján egy esemény pontos valószínűségét keressük.

3.4.3. Tipikus példafeladat

Egy dobozban 3 piros és 2 fehér golyó van. Mi a valószínűsége annak, hogy 2 kihúzott golyóból pontosan 1 fehér?

$$N = 5, \qquad n = 2, \qquad K = 2, \qquad k = 1$$

A paraméterek a következők: 3 piros és 2 fehér golyó van, tehát összesen 5. Ebből 2 kihúzott golyót vizsgálunk, aminek fehérnek kell lennie. Fehér golyó összesen 2 van, amiből 1 kell.

$$P(X=1) = \frac{\dbinom{2}{1}\dbinom{5-2}{2-1}}{\dbinom{5}{2}} = \frac{\dbinom{2}{1}\dbinom{3}{1}}{\dbinom{5}{2}} = \frac{2 \cdot 3}{10} = \boxed{0.6}$$

3.5. Egyenletes

Paraméterek	$a,\, b \in \mathbb{R} : a < b$
Értékkészlet	$X \in [a,\, b]$
Eloszlásfüggvény	$P(X = t) = \dfrac{t-a}{b-a}$
Sűrűségfüggvény	$f_x(t) = \dfrac{1}{b-a}$
Várható érték	$E(X) = \frac{1}{2}(a+b)$
Szórásnégyzet	$D^2(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$

3.6. Exponenciális

Paraméterek	$\lambda \in \mathbb{R} : 0 < \lambda < \infty$
Értékkészlet	$X \in \mathbb{R} : X > 0$
Eloszlásfüggvény	$P(X = t) = 1 - e^{-\lambda t}$
Sűrűségfüggvény	$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
Várható érték	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
Szórásnégyzet	$D^2(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

3.7. Normális

Paraméterek	$\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 \in \mathbb{R} : 0 < \sigma^2 < \infty$
Értékkészlet	$X \in \mathbb{R}$
Eloszlásfüggvény	$P(X = t) = \Phi\left(\dfrac{t-\mu}{\sigma}\right)$
Sűrűségfüggvény	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Várható érték	$E(X) = \mu$
Szórásnégyzet	$D^2(X) = \sigma^2$