Valószínűségszámítás 2. zárthelyi dolgozat
Műszaki informatikus BSc
2015. november 23.

1. Legyen $X \in U(0,1)$ és Y sűrűségfüggvénye $f_Y(t) = 2t, t \in (0,1), (f_Y(t) = 0, t \notin (0,1))$. Legyenek X és Y függetlenek. Számolja ki a $Z = X + Y$ konvolúciós sűrűségfüggvényt.

Megoldás: $f_x(t) = 1, t \in (0,1). f_z(t) = \int\limits_{\max\{0,t-1\}}^{\min\{1,t\}} 1 \cdot 2 \cdot (t-u)dt, t \in (0,2)$

$$f_z(t) = 2\int_0^t t - udu = 2\left[tu - \tfrac{u^2}{2}\right]_0^t = t^2, t \in (0,1)$$

$$f_z(t) = 2\int_{t-1}^1 t - udu = 2\left[tu - \tfrac{u^2}{2}\right]_{t-1}^1 = 2t - t^2, t \in (1,2)$$

2. Ötször feldobunk egy szabályos pénzérmét. Legyen $X = 1$, ha több fejet kaptunk, mint írást, és $X = 0$, ha az írásból kaptunk többet. Az Y valószínűségi változó a fejek számát vegye fel a dobássorozatban. Adja meg az együttes eloszlás táblázatát! Függetlenek-e X és Y? Mekkora a korrelációs együtthatójuk?
Megoldás: $\mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(X=0) = \frac{1}{2}, Y \in B(5, \frac{1}{2})$.

$\backslash\ Y$ $X\ \backslash$	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	0	0	0
1	0	0	0	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

X és Y nem függetlenek, mert pl. $\mathbf{P}(X=1, Y=0) = 0 \neq \mathbf{P}(X=1) \cdot \mathbf{P}(Y=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32}$
$\mathbf{E}(XY) = 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{55}{32}, \operatorname{cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \frac{55}{32} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{32}$
$\mathrm{R}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma X \cdot \sigma Y} = \frac{\frac{15}{32}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3}{8}\sqrt{5} = 0.83853$

3. Az X, Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 0,8(x^2 + xy + 2y^2) & \text{, ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a $\mathbf{P}(Y < X)$ valószínűséget és X várható értékét.

Megoldás: $\mathbf{P}(Y < X) = \iint\limits_{y<x, 0<x<1, 0<y<1} 0.8(x^2 + xy + 2y^2)dxdy = \int_0^1\int_0^x 0.8(x^2 + xy + 2y^2)dydx =$

$$\int_0^1 0.8\left(x^3 + \tfrac{x^3}{2} + \tfrac{2x^3}{3}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \tfrac{10.4 \cdot x^3}{6}dx = \tfrac{10.4}{24} = 0.43333$$

$$\mathbf{E}X = \int_0^1\int_0^1 0.8(x^3 + x^2y + 2xy^2)dydx = \int_0^1 0.8\left(x^3 + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{2x}{3}\right)dx = 0.8 \cdot \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}\right) = 0.6$$

4. Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 3$ paraméterrel, Y pedig normális eloszlású $m = -1$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Tudjuk, hogy X és Y függetlenek egymástól. Adja meg az együttes sűrűségfüggvényüket. Ha $V = 2X - 1$ és $W = 2 - 5Y$, akkor számolja ki a $\mathrm{R}(V,W)$ korrelációs együtthatót.
Megoldás: $f_{X,Y}(x,y) = 3e^{-3x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+1)^2}{8}}, x > 0$ és $y \in \mathbb{R}$. Mivel X és Y függetlenek voltak, így V és W is függetlenek lesznek, ezért $\mathrm{R}(V,W) = 0$.

5. Legyenek $X \in B(10, \frac{1}{3})$ (binomiális) és $Y \in Po(2)$ (Poisson) eloszlású független valószínűségi változók. Számolja ki az alábbi mennyiségeket:
a.) $\operatorname{cov}(X-Y, X+Y)$ b.) $\mathbf{E}(2X - 4Y)$ c.) $\sigma^2(2X - 4Y)$.
Megoldás: a.) $\operatorname{cov}(X-Y, X+Y) = \mathbf{E}X^2 - \mathbf{E}Y^2 - \left((\mathbf{E}X)^2 - (\mathbf{E}Y)^2\right) = \sigma^2 X - \sigma^2 Y = \frac{20}{9} - 2 = \frac{2}{9}$
b.) $\mathbf{E}(2X - 4Y) = 2\mathbf{E}X - 4\mathbf{E}Y = \frac{20}{3} - 8 = -\frac{4}{3}$
c.) $\sigma^2(2X - 4Y) = 4\sigma^2(X) + 16\sigma^2(Y) = \frac{80}{9} + 32 = \frac{368}{9} = 40.889$