Laplace transzformáció

$f(t)$ $(0, \infty)$ minden részintervallumán integrálható és ha $t<0$ $f(t) = 0$

<u>Definíció</u> : $f(t)$ Laplace transzformáltja $L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty f(t).e^{-ptt}dt$ (p komplex)

Konvergencia : Ha $|f(t| \leq k\,e^{ct}$ akkor $F(p)$ a $\mathrm{Re}\,p > c$ félsíkon abszolút konvergens

Műveleti szabályok :

1. A transzformáció homogén és lineáris.
2. $F'(p) = -L\{t.f(t)\}$
3. $F^{(n)}(p) = (-1)^n L\{t^n f(t)\}$
4. $L\{f'(t)\} = p\,L\{f(t)\} - f(0)$
5. Legyen $g(t) = \int_0^t f(t)dt$, $L\{g(t)\} = \frac{1}{p}L\{f(t)\}$

Elemi függvények transzformáltjai:

$$L\{1\} = \frac{1}{p}, \qquad L\{t\} = \frac{1}{p^2}, \qquad L\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad L\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a},$$

$$L\{\cos at\} = \frac{p}{p^2+a^2}, \qquad L\{\sin at\} = \frac{a}{p^2+a^2}$$

Eltolási tételek :

1. $L\{e^{at}f(t)\} = F(p-a)$ 2. $L\{f(t-a)\} = e^{-ap}L\{f(t)\}$

Alkalmazás differenciálegyenlet megoldására:

1. Oldjuk meg a következő kezdetiérték feladatot : $y'' - y = t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Transzformálva az egyenlet mindkét oldalát , $L\{y\} = Y$ jelöléssel a következő

egyenlet adódik : $p^2 Y - p - 1 - Y = \frac{1}{p^2}$ ebből $Y = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2(p^2-1)}$ résztörtekre

bontással a következő egyenletet kapjuk $Y = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p^2}$

Y (p) Laplace transzformáltja az $y(t) = \frac{3}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} - t$

Ha nincs kezdeti feltétel y(0) és y'(0) szerepel a megoldásban.

2. Oldja meg a következő kezdetiérték feladatot: $y'' - 2y' + y = e^t + t$, $y(0) = 1$,

$y'(0) = 0$

3. Oldja meg a differenciálegyenlet rendszert: $x'(t) + y(t) = 0$ $x(0) = 2, y(0) = 0$
$y'(t) + x(t) = 0$