ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2011. máj. 30.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (19 pont)

a) $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{6n+4}\right)^n$, $\qquad b_n = \left(\dfrac{6n+1}{6n+4}\right)^{2n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$, $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ?$

b) Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, illetve a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor?

a.)

$\boxed{11}$

$$0 < a_n = \left(\frac{2n+1}{6n+4}\right)^n \le \left(\frac{2n+n}{6n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$0 \to 0, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$$

$$\xRightarrow[\text{rendőrelv}]{} \quad a_n \to 0 \qquad 6$$

$$b_n = \frac{\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{4}{6n}\right)^{2n}} = \frac{\left(1+\frac{1/3}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{4/3}{2n}\right)^{2n}} \to \frac{e^{1/3}}{e^{4/3}} = \frac{1}{e} \qquad 5$$

b.) $\sum\limits^{\infty} a_n$:

$\boxed{8}$

$0 < a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $\sum\limits^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konv. geom. sor $\left(0 < q = \frac{1}{2} < 1\right)$

$$\xRightarrow[\text{majoráns kr.}]{} \sum^{\infty} a_n \text{ konv.} \qquad 5$$

$\sum\limits^{\infty} b_n$: $\quad b_n \to \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \sum\limits^{\infty} b_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. 3

anl v110530/1.

2. feladat (21 pont)

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Definiálja az alábbi fogalmakat:

a1) f differenciálható x_0-ban. a2) f-nek lokális maximuma van x_0-ban.

b) Mit mondhatunk a differenciálható f függvény deriváltjáról, ha f-nek az x_0-ban lokális szélsőértéke van? Állítását bizonyítsa be!

c) Adjon két különböző elégséges feltételt a differenciálható f függvény lokális szélsőértékének létezésére!

d) Keresse meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait és lokális szélsőértékeit!

$$f(x) = e^{x^4 - 4x^3 + 12}$$

a.) $x_0 \in \text{int}\, D_f$

$\boxed{4}$

a1.) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ 2 $\left(= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$

a2.) D f-nek lokális maximuma (minimuma) van az értelmezési tartomány belső x_0 pontjában, ha $\exists\ K_{x_0,\delta} : f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$, ha $x \in K_{x_0,\delta}$. 2

b.)

$\boxed{6}$

T $\boxed{\text{Ha } f \text{ az } x_0 \text{ helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor } f'(x_0) = 0.\ (K_{x_0,\delta} \subset D_f)}$ 1

B Pl. lokális maximumra (4.19.a ábra):

$$\lim_{h \to 0-} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\frac{-}{-}} = \underbrace{f'_-(x_0) = f'(x_0)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \ge 0$$

$$\lim_{h \to 0+} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\frac{-}{+}} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \le 0$$

$\Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0$ (vízszintes érintő) 5

(A $\frac{-}{-}$ illetve a $\frac{-}{+}$ szimbólumokban a + és − jel a tört számlálójának és nevezőjének előjelére utal.)

c.)

$\boxed{4}$

T $K(x_0, \delta) \subset D_f$ (belső pont); $K(x_0, \delta) \subset D_{f'}$

Differenciálható függvény esetén *lokális szélsőérték* létezésének

(1. szükséges feltétele: $f'(x_0) = 0$)

2. elégséges feltétele:

a) $f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált x_0-ban (tehát f' lokálisan csökken vagy lokálisan nő x_0-ban)

b) Ha f kétszer differenciálható x_0-ban: $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$ $(f''(x_0) > 0$: lok. min.; $f''(x_0) < 0$: lok. max.)

an1v 110530/2.

d.) $\boxed{7}$

$f(x) = e^{x^4-4x^3+12}$

$f'(x) = e^{x^4-4x^3+12} \cdot (4x^3-12x^2) = \underbrace{e^{x^4-4x^3+12}}_{>0} \underbrace{4x^2}_{\geq 0}(x-3)$ (2) (2)

	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

(3)

f monoton csökken $(-\infty,3)$-on és monoton nő a $(3,\infty)$ intervallumon

3. feladat (5+6=11 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 3x^2}{\sin^2 6x} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\,e^x - e^{5x}}{5\,e^{5x} + 3\,e^{2x} + 3} = ?$

a.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 3x^2}{\sin^2 6x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+(3x^2)^2}\, 6x}{2\sin 6x \cdot \cos 6x \cdot 6} = \dfrac{1}{12}$

$\frac{0}{0}$, 1, 1, $\underset{\downarrow}{\cos 6x} \; 1$

b.) $\boxed{6}$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{e^{5x}}{e^{5x}}}_{=1} \dfrac{2e^{-4x}-1}{5+3e^{-3x}+3e^{-5x}} = \dfrac{0-1}{5+0+0} = -\dfrac{1}{5}$

4. feladat (8 pont)*

$x(t) = t^3 + 3t + 2 + \sin t\,, \qquad y(t) = (t-1)^2 + \cos 2t$

a) $\dot x(t) = ?\,, \quad \dot y(t) = ?$

b) Belátható, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a $t_0 = 0$ paraméterű x_0 pont egy környezetében meghatároz egy $y = f(x)$ függvényt!

$f'(x_0) = ?\,, \quad x_0 = x(t_0)$

Van-e lokális szélsőértéke f-nek x_0-ban?

a.) $\boxed{4}$

$\dot x(t) = 3t^2 + 3 + \cos t$ (2)

$\dot y(t) = 2(t-1) - 2\sin 2t$ (2)

b.) $\boxed{4}$

$x_0 = x(0) = 2$

$f'(2) = \dfrac{\dot y(0)}{\dot x(0)} = -\dfrac{2}{4}$ (3)

Mivel $f'(2) \neq 0 \Longrightarrow$ f-nek nincs lokális szélsőértéke $x_0 = 2$-ben, mert nem teljesül a szükséges feltétel. (1)

anl0 110530/3.

5. feladat (8 pont)*

Az integrálközelítő összeg segítségével bizonyítsa be, hogy $\int_2^6 f(x)\, dx$ nem létezik, ha

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -2\,, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

$\sigma_f = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ alapján:

Ha ξ_k-kat racionális pontot választunk

$\sigma_f = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b-a = (6-2) = 4 \to 4$

Ha ξ_k-kat irracionális pontot választunk:

$\sigma_f = \sum_{k=1}^{n} -2\, \Delta x_k = -2 \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = -2(\underbrace{b-a}_{=4}) = -8 \to -8$

Tehát $\lim_{n\to\infty} \sigma_f$ értéke függ a reprezentáns pontoktól $\Rightarrow \int_2^6 f(x)\,dx \not\exists$.

6. feladat (7+3=10 pont)*

a) $\int (2x+7)\, e^{-3x}\, dx = ?$ b) $\int 12x\, e^{-3x^2}\, dx = ?$

a.) $\int (2x+7)\, e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}(2x+7)e^{-3x} + \frac{2}{3}\int e^{-3x} dx =$ (3)

$\boxed{7}$ $u = 2x+7$ $v' = e^{-3x}$ (2)

$u' = 2$ $v = \frac{e^{-3x}}{-3}$

$= -\frac{1}{3}(2x+7)e^{-3x} + \frac{2}{3}\frac{e^{-3x}}{-3} + C$ (2)

b.) $-2\int \underbrace{-6x\, e^{-3x^2}}_{f'e^f} dx = -2\, e^{-3x^2} + C$

$\boxed{3}$

anlv 110530/4.

7. feladat (8+5=13 pont)*

a) $\int \frac{1}{x^2-5x}\,dx = ?$ b) $\int_6^\infty \frac{1}{x^2-5x}\,dx = ?$

a.) $\frac{1}{x^2-5x} = \frac{1}{x(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5}$ 2

$\boxed{8}$

$x=0: \quad 1 = -5A \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$

$x=5: \quad 1 = 5B \Rightarrow B = \frac{1}{5}$

$I_a = \frac{1}{5}\int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5}\right)dx = \frac{1}{5}\left(-\ln|x| + \ln|x-5|\right) + C$ 3 3

b.) $\int_6^\infty \frac{1}{x^2-5x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_6^\omega \frac{1}{x^2-5x}\,dx \overset{a)}{=} \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{5}\underbrace{\left(-\ln x + \ln(x-5)\right)}_{=\ln\frac{x-5}{x} = \ln\left(1-\frac{5}{x}\right)}\Big|_6^\omega =$

$\boxed{5}$

$= \frac{1}{5}\lim_{\omega\to\infty}\left(\ln\underbrace{\left(1-\frac{5}{\omega}\right)}_{\to 1} - \underbrace{\ln\left(1-\frac{5}{6}\right)}_{\ln\frac{1}{6}}\right) = \frac{1}{5}\ln 6$

0

8. feladat (10 pont)

$\int \frac{-1}{\sqrt[3]{x^2}+2}\,dx = ?$ $\sqrt[3]{x} = t$ helyettesítéssel oldja meg!

$x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2\,dt$ 2

$\int \frac{1}{t^2+2}\,3t^2\,dt = 3\int \frac{(t^2+2)-2}{t^2+2}\,dt = 3\int\left(1 - \frac{2}{t^2+2}\right)dt =$ 2

$= 3t - \frac{6}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt = 3t - 3\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C$ 5

$I = 3\cdot\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2}} + C$ 1

anlv-110530/5.

A *-gal jelölt feladatokból legalább 13 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (4+6=10 pont)

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsh} 5x^2}{\arcsin 3x^2} = ?$ b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n^5+n^2}} = ?$

a.) $\boxed{4}$ $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsh} 5x^2}{\arcsin 3x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+(5x^2)^2}} \cdot 10x}{\frac{1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}} \cdot 6x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

$\frac{0}{0}$ $= \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

b.) $\boxed{6}$ $\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^5} = \sqrt[n]{\frac{2}{n^5+n^5}} \le \underbrace{\sqrt[n]{\frac{2}{n^5+n^2}}}_{:=b_n} \le \sqrt[n]{\frac{2}{1+1}} = 1$

$\sqrt[n]{n} \to 1$, $\to 1$ $\qquad 1 \to 1$

$\Longrightarrow$ rendőrelv

10. feladat (10 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2+8}{(x-1)^2}$$

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = ?$, $\lim_{x\to 1} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?$, ha $x \neq 1$

a) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2+8}{(x-1)^2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ (3)

$\underbrace{\frac{x^2}{x^2}}_{=1} \frac{1+\frac{8}{x^2}}{(1-\frac{1}{x})^2} \to 1$, $\frac{8}{x^2} \to 0$, $\frac{1}{x} \to 0$

$\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2+8}{(x-1)^2} \right) = \frac{\pi}{2}$ (3)

$x^2+8 \to 9$, $(x-1)^2 \to +0$, $\to +\infty$

Ha $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+8}{(x-1)^2}\right)^2} \underbrace{\left(\frac{x^2+8}{(x-1)^2}\right)'}_{\frac{2x(x-1)^2 - (x^2+8)\,2(x-1)}{(x-1)^4}}$$ (4)

an1v 110530/6