ANAL(1)
AO KURZUS

1. gyakorlat (2001 szept. 10 - 14)

SZABÓ PÉTER

A derivált szemléletes jelentése: érintő egyenes meredeksége, sebesség stb.

$f: (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R}$; definíció és jelölések:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_a = Df(a)$$

A deriválási szabályokat alkalmazzuk (biz. nélkül) a táblázat segítségével. A táblázatból még ne használjuk az exp., a log., a hiperbolikus függvények és inverzeik deriváltját.

1. Írja fel az adott függvény adott pontbeli érintő egyenesének egyenletét az $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ egyenlet alapján!

   a, $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ b, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$

2. Példák $(f+g)'$, $(cf)'$, $(cf+bg)'$ alakú deriválások gyakorlására:

   $(-5x^3 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x^3})'$, $(x^4 + \sin x)'$, $(2\cos x)'$, $(3\sqrt{x} - \sin x)'$, $\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\sin a}$, $\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{tg} x}{a}$

3. $(f \cdot g)'$, $(\frac{1}{g})'$, $(\frac{f}{g})'$ alakú függvények deriválása:

   $\left[(x^2+3x)\cos x\right]'$, $\left[\frac{x^2-2x}{x^2-4}\right]'$

4. Összetett függvények deriválását speciális esetekkel kezdjük $\frac{d}{dx} f(ax+b)$, $\frac{d}{dx} f$ (POLINOM), $\frac{d}{dx} f$ (TRIGONOMETRIKUS FV.) például:

   $\frac{d}{dx} \operatorname{tg}(3x+5)$, $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2-2x+1}$, $\frac{d}{dx}\sin^2 3x$

5. A derivált <u>definíciója</u> alapján határozza meg $f(x) = x^2$ x_0 pontbeli deriváltját!

6. Mekkora szögben metszi egymást a $\sin x$ és a $\cos x$ grafikonja az $x_0 = \frac{\pi}{4}$ abszcisszájú pontban?

<u>HÁZI FELADAT</u>

1, A definíció alapján $(2x^2+5)' =$

2, Érintő egyenesek egyenletei $x_0 = 0$ ban $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$ függvények esetén

3, $\left[(x^2+2)\sin\sqrt{x+3}\right]' =$

4, $\left[\frac{4x+3}{\sqrt{x+5}}\right]' =$

5, $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{arctg} 2x\right) =$

6, $\frac{d}{dx} \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} =$

· ki kell osztani a derivált táblázatot

V_2 716

ANAL (1)
AO
KURZUS

2. gyakorlat (2001 szept. 17-21)

Szabó Péter

1, Magasabbrendű deriváltak $\frac{d^2}{dx^2}\sin(ax+b)=$,

$\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{ax+b}=$, $\frac{d^2}{dx^2}\frac{cx+d}{ex+f}=$

2., Összetett függvény deriválása.

TÉTEL (biz. nélkül) Ha g differenciálható $K_{a,\delta}$-ban és f diffható $K_{g(a),\delta}$-ban $\Rightarrow$ $f\circ g$ diffható a-ban és

$\frac{d}{dx} f\circ g \Big|_a = f'(g(a))\cdot g'(a)$; $a \xrightarrow{g} g(a) \xrightarrow{f} f(g(a)) = f\circ g(a)$, $a \xrightarrow{f\circ g} f(g(a))$

Pl $\frac{d}{dx}\operatorname{tg}\sqrt{x}=$, $\frac{d}{dx}\sin(3\arcsin x^2)=$, $\frac{d}{dx}\frac{\sqrt[3]{5x+2}}{\cos(x^2)}=$

$\frac{d}{dx}(2x+3)^5\cdot\sin\sqrt[3]{3x+2}=$, $(\operatorname{arctg}\sqrt{3x^2+2})^5=$

3., Implicit függvény deriválása mechanikusan

Pl. $(x-2)^5(y(x)+3)^3+x-2+y(x)=-4$ $x=1,\ y=-2$

a, Ellenőrizzük, hogy az adott koordináták kielégítik az egyenletet

$-1\cdot1-1-2=-4$ igen. Ezután mindkét oldalon

b, deriválunk x-szerint:

$5(x-2)^4(y(x)+3)^3+(x-2)^5\cdot3(y(x)+3)^2\cdot y'(x)+1+y'(x)=0$

$x=1,\ y=-2$:

$5\cdot1+(-1)\cdot3\,y'(1)+1+y'(1)=0$ innen: $y'(1)=3$

További példák:

$3x^2y(x)+4x+3y^3(x)+2=0$ $x=1$ $y=-1$, $y'(1)=?$

$x\sin y(x)+y(x)\cdot\sin x=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt2}+\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt3}{2}$ $x=\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{4}$, $y'(\frac{\pi}{3})=?$

$x\ln y(x)+y(x)\ln x=1$ $x=e$, $y=1$, $y'(e)=?$

$(x^2+y^2(x))^3-26x^2y^2(x)=-31$ $x=\sqrt2$, $y=\sqrt3$ $y'(\sqrt2)=?$

HÁZI FELADAT

1, $\frac{d}{dx}\arcsin\sqrt{x-x^2}=?$

2, $x\cos y^2(x)+\frac{2y(x)}{x+2}+y(x)=2x$ $P(0;0)$ pontbeli érintő egyenes egyenlete? (IMPLICIT)

3, Vannak-e az $y=2x^3+1$ görbének olyan érintői, amelyek párhuzamosak az $x-18y+1=0$ egyenessel?

4., Vannak-e az $y=\arctan\frac{1}{x+2}$ görbének olyan érintői, amelyek merőlegesek az $y+4x=0$ egyenesre

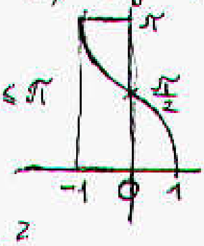
Szabó Péter

ANAL(1) 4. GYAKORLAT (OKT. 1, 2)

AO KURZUS

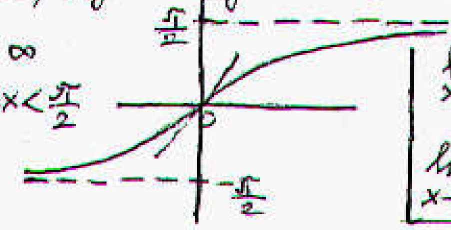
Vázoljuk fel az arccos, arctg grafikonjait, adjuk meg az értelmezési tartományt, érték készletét!

$|x| \le 1, \quad 0 \le \arccos \le \pi$



$-\infty < x < \infty$

$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$



$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}}$$

1, $\frac{d}{dx}\left(\arccos \sqrt[3]{x}\right)^4 = ?$

2, Határozza meg $y = 3\pi - 2\arcsin(3-2x)$ inverzfüggvényét és annak értelmezési tartományát, érték készletét!

$y = 3\pi - 2\arcsin(3-2x)$, $R_{f^{-1}} = D_f = [-1;1]$ mert $1 \le 3-2x \le 1$ ből következik.

$\arcsin(3-2x) = \frac{3\pi - y}{2}$ $\quad D_{f^{-1}} = R_f = [2\pi; 4\pi]$

$3-2x = \sin\frac{3\pi-y}{2}$

$x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi-y}{2}$, átjelölve: $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi-x}{2} = f^{-1}(x)$ $\quad D_{f^{-1}}: [2\pi; 4\pi]$

3, Határérték feladatok $\quad R_{f^{-1}}: [-1, 1]$

$\lim_{x\to3^+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-3} = \left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\lim_{x\to3^-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-3} = \left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-3} = (\operatorname{arctg} 0 = 0)$

$\lim_{x\to3} \operatorname{arctg}\frac{x^2-3x}{3x-9} = \left(\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}\right)$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x+3} = \left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{x+3} = \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

4, Határérték tételek alkalmazása: $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1}$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 3x}{3x-\sin 2x} = \lim_{x\to0}\frac{2-\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{3-\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2} = -1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x+1)} = \lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg} x}{2x} = \lim_{\substack{u\to0\\ \operatorname{arctg} x = u}}\frac{u}{2\operatorname{tg} u} = \lim_{u\to0}\frac{u\cos u}{2\sin u} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{\substack{u\to0\\ \frac{\pi}{2}-x=u}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{u} = \lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u} = 1$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\arcsin(x-1)}{\operatorname{tg}(x-1)} = \lim_{\substack{u\to0\\ x-1=u}}\frac{\arcsin u}{\sin u}\cdot\cos u = \lim_{u\to0}\underbrace{\frac{\arcsin u}{u}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{u}{\sin u}}_{1}\cdot\underbrace{\cos u}_{1} = 1$$

(arc sin $u = v$ helyettesítéssel)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x = \lim_{\substack{u\to0\\ \frac{\pi}{2}-x=u}}\frac{u\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)} = \lim_{u\to0}\frac{u\cos u}{\sin u} = 1$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}} = \lim_{x\to\pi}\frac{\pi^2\sin x}{\pi^2-x^2} = \lim_{x\to\pi}\frac{\pi^2\sin x}{(\pi-x)(\pi+x)} = \lim_{\substack{u\to0\\ \pi-x=u}}\frac{\pi^2\overbrace{\sin(\pi-u)}^{\sin u}}{u(2\pi-u)} = \lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}\cdot\frac{\pi^2}{2\pi-u} = \frac{\pi}{2}$$

5, Monoton növekedés, fogyás vizsgálata

Mely **nyílt** intervallumokon nő, illetve csökken $y = \operatorname{arctg} x^2$

$y' = \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x$ $\quad y' > 0 \Rightarrow$ y szig. mon. nő ha $x > 0$

$y' < 0 \Rightarrow$ y szig. mon. csökken, ha $x < 0$

További példák:

$y = x^2 - \ln x^2 \quad x \neq 0 \quad y' = 2x - \frac{2x}{x^2} = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x} = \frac{2}{x}(x^2-1)$

$y' > 0$ ha $\underbrace{x>0 \text{ és } |x|>1}_{x>1}$, vagy $\underbrace{x<0 \text{ és } |x|<1}_{-1<x<0}$ ezeken a nyílt

intervallumokon monoton nő.

$y' < 0$ ha $\underbrace{x>0 \text{ és } |x|<1}_{0<x<1}$, vagy $\underbrace{x<0 \text{ és } |x|>1}_{x<-1}$ ezeken a nyílt

intervallumokon monoton csökken.

$y = \frac{1}{3x^2-1} \quad x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

monoton nő $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ és $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ intervallumokon

monoton csökken $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ intervallumokon

HÁZI FELADAT

1, a, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \arcsin \frac{x^2+x}{x^2+2} = ?$ $\quad$ b, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \arccos \frac{x}{x^2+2x} = ?$

2, $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

a, Tegye folytonossá az f és g függvényeket az $x=0$ helyen az $f(0), g(0)$ függvényértékek alkalmas megválasztásával!

b, $f'(0) = ?$ $g'(0) = ?$ (Ha léteznek)

3, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-(\cos x)\sqrt{\cos 2x}}{x^2} =$

4, $y = \frac{x^2}{1-2x^3}$ Monotonitási intervallumai?

Szabó Péter

ANAL (1)
AO KURZUS

5. GYAKORLAT ORT. 15-i gyakorlat (8-an dékáni szünet) Ez az anyag már nincs a ZH-ban

$y=f(x)^{g(x)}$ (ahol $f(x)>0$) alakú kifejezések deriválása. Kétféleképpen is eljárhatunk

a, $y=f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$; $y'=e^{g(x)\ln f(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)\right]=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right]$

b, $y(x)=f(x)^{g(x)}$ logaritmálva: $\ln y(x)=g(x)\ln f(x)$, mindkét oldalat deriválva:

$$\frac{1}{y(x)}\cdot y'(x)=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)\Rightarrow y'(x)=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

(Nem a képletet, hanem az eljárást kell megjegyezni.)

$y=(\operatorname{arctg}3x)^{x^2}$ $(x>0)$ $\quad y'=(\operatorname{arctg}3x)^{x^2}\left[2x\ln\operatorname{arctg}3x+x^2\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg}3x}\cdot\frac{3}{1+9x^2}\right]$

További példák: $y(x)=(1+2x^4)^{\sin 3x}$, $\quad y(x)=x^{x\cdot\sin x}$ $(x>0)$

$y(x)=(\cos\pi x)^{\frac{1}{1+x}}$ $\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$, $\quad y(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad y'(x)=?$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$ határérték-tételek alkalmazása:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\underbrace{e^{-x}}_{\downarrow 1}\underbrace{\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{\downarrow 1}=1=\operatorname{sh}'(0)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2x}=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}_{\downarrow 1}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{\sin^2x}}_{\downarrow 1}\cdot\underbrace{(1+\cos x)}_{\downarrow 2}=2$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a}=\lim_{\substack{u\to0\\ x-a=u}}\frac{\ln\frac{u+a}{a}}{u}=\lim_{u\to0}\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{u}{a}\right)}{\frac{u}{a}}}_{\downarrow 1}\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

($a>0$ rögzített)

(L'Hospital szabály alkalmazásával is számítsuk ki egyet-kettőt.)

További L'Hospital szabállyal megoldható feladatok:

$$\lim_{x\to2}(x-2)\operatorname{ctg}\pi x=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\operatorname{tg}\pi x}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{\pi}{\cos^2\pi x}}=\frac{1}{\pi}$$

($0\cdot\infty$ alakú)

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}\right)}=-\frac{2}{\pi}\ ;\quad \lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\underset{L'H}{=}$$

($\frac{0}{0}$ alakú) $\qquad$ ($\infty-\infty$ alakú)

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2},$$

Ha a változó a kitevőben van, akkor a deriválásnál használt (l. fent) exponenciális alakba írhatjuk:

$$\lim_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+0}e^{\boxed{\frac{1}{\ln x}\ln\operatorname{ctg}x}\to-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$ (az exp. fv folytonossága miatt)

a kitevő határértékét kiszámítjuk:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\ln x}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\left(-\frac{1}{\sin^2x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\underbrace{\frac{-x}{\sin x}}_{\downarrow 1}\underbrace{\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}}_{\downarrow 1}=-1$$

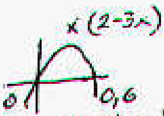
(x-szel osztható a számláló és a nevező)

Függvényvizsgálat.

1, $f(x)=x^2e^{-3x}$ $D_f: -\infty<x<+\infty$, $f(0)=0$

$f'(x)=e^{-3x}(2x-3x^2)$, $f'(x)=0$, ha $x(2-3x)=0$ $x_1=0$, $x_2=0{,}6$

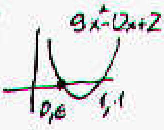
LOK MIN, LOK MAX az előjelváltás miatt.



$f''(x)=e^{-3x}(9x^2-12x+2)$, $f''(x)=0$ ha $9x^2-12x+2=0$

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{3}$ $x_1\approx 0{,}2$ $x_2\approx 1{,}1$

INFLEXIÓ az előjelváltás miatt



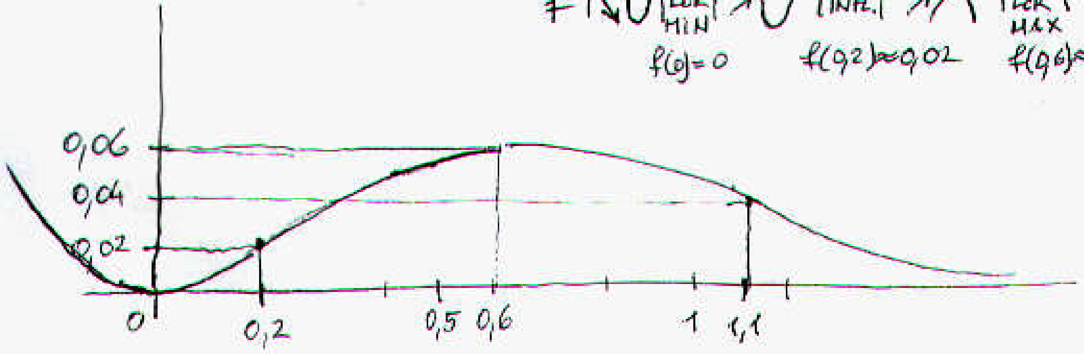
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{3x}} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{3e^{3x}} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{9e^{3x}}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2 \nearrow +\infty}{e^{3x} \searrow +0}=+\infty$

TÁBLÁZAT

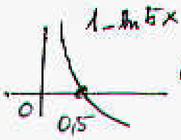
	$(-\infty;0)$	0	$(0;0{,}2)$	0,2	$(0{,}2;0{,}6)$	0,6	$(0{,}6;1{,}1)$	1,1	$(1{,}1;\infty)$
f'	−	0	+	+	+	0	−	−	−
f''	+	+	+	0	−	−	−	0	+
f	↘ ∪	LOK MIN	↗ ∪	INFL.	↗ ∩	LOK MAX	↘ ∩	INFL	↘ ∪

$f(0)=0$ $f(0{,}2)\approx 0{,}02$ $f(0{,}6)\approx 0{,}06$ $f(1{,}1)\approx 0{,}04$



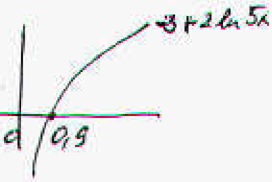
2, $f(x)=\frac{\ln 5x}{x}$ D_f: $x>0$ $f(0{,}2)=0$

$f'(x)=\frac{1-\ln 5x}{x^2}$ $f'(x)=0$ ha $x=\frac{e}{5}\approx 0{,}5$ LOK MAX előjelváltás.



$f''(x)=\frac{-3+2\ln 5x}{x^3}$ $f''(x)=0$ ha $-3+2\ln 5x=0$

$x=\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}\approx 0{,}9$ INFL. mert előjelt vált.

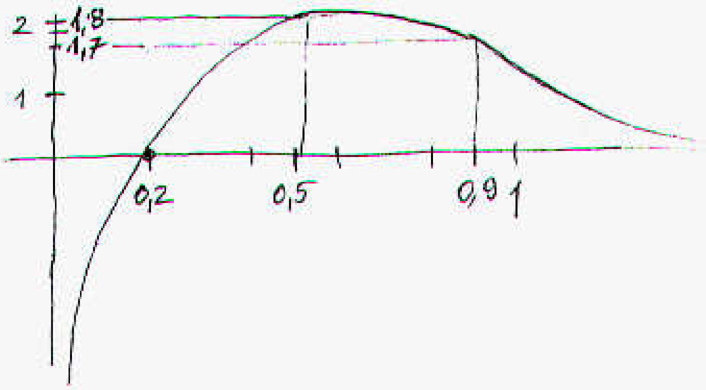


$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln 5x \nearrow -\infty}{x \searrow +0}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln 5x}{x} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5\cdot\frac{1}{5x}}{1}=0$

TÁBLÁZAT

	$(0;0{,}5)$	0,5	$(0{,}5;0{,}9)$	0,9	$(0{,}9;\infty)$
f'	+	0	−	−	−
f''	−	−	−	0	+
f	↗ ∩	LOK MAX	↘ ∩	INFL	↘ ∪

$f(0{,}5)\approx 1{,}8$ $f(0{,}9)\approx 1{,}7$



HÁZI FELADAT

1, $y(x)=(\ln x)^x$ $(x>1)$: $y'(x)=?$

2, $y(x)=(\sin^2 x)^{\sqrt{x+1}}$ $(x\neq k\pi)$ $y'(x)=?$

3, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=?$

4, $f(x)=3e^{-2x^2}$ fv. vizsgálat

5, $f(x)=x\ln|x|$ —"—

ANAL(1) AD KURZUS

6. GYAKORLAT okt. 20.

Szabó Péter

1, $a_n = \frac{n^3-n+1}{n^3+2}$ a, $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$ b, $N(\varepsilon) = ?$

HF. $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^3}} = 1$, $\left|\frac{n^3-n+1}{n^3+2}-1\right| < \varepsilon$, $\frac{|-n-1|}{n^3+2} = \frac{n+1}{n^3+2} < \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} < n$

HF. 2, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n^2-7n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2-7n+1} \quad /:n}{\cancel{n^2}-(\cancel{n^2}-7n+1) /:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{1-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}}}{7-\frac{1}{n}} = \frac{2}{7}$

TÉTELEK: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} p^n = 0$ $(|p|<1)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$ $q>1$ $k>0$ rögzített.

3, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}+(2n+1)! \quad /:(2n+1)!}{3\cdot 2^{2n+1}+n^2\cdot(2n-1)! /:(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}+1}{3\cdot\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{n^2}{2n(2n+1)}} = 4$ $\quad \frac{n^2}{2n(2n+1)} \to \frac{1}{4}$

4, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n!+3n \quad /:n^n}{3n!+5n^n+\pi^n /:n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\frac{n!}{n^n}+\frac{3}{n^{n-1}}}{3\cdot\frac{n!}{n^n}+5+\frac{\pi^n}{n^n}} = 0$ $\quad \left(\frac{\pi^n}{n^n} = \frac{\pi^n}{n!}\cdot\frac{n!}{n^n} \to 0\right)$

5, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot 2^n+3^n+2\cdot 4^n \quad /:4^n}{2^{2n}-3n^2 \quad /:4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{2^n}+\left(\frac{3}{4}\right)^n+2}{1-\frac{3n^2}{4^n}} = 2$

TÉTELEK: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$ $(p>0)$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ $(x\in\mathbb{R})$

6, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{100n^5+n^{\frac{3}{2}}} = 1$, mert: $100n^5 < 100n^5+n^{\frac{3}{2}} < 101n^5$

$\underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{100}}\cdot\underset{\downarrow 1}{(\sqrt[n]{n})^5} < \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{100n^5+n^{\frac{3}{2}}}} < \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{101}}\cdot\underset{\downarrow 1}{(\sqrt[n]{n})^5}$ (Rendőr elv.)

HF. 7, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+1}{n}} = 2$, mert: $\sqrt[n]{\frac{2^n+1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{2^n(1+\frac{1}{2^n})}{n}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}} \to 2$; $1 < 1+\frac{1}{2^n} < 2$; $\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}} < \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{2}}$

8, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}} = \frac{3}{4}$, mert: $\sqrt[n]{\frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right)}} = \frac{3}{4}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}} \to \frac{3}{4}$; $\frac{1}{2} < \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1} < 2$

$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}}} < \sqrt[n]{2}$

9, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+8}{2n+5}\right)^{4n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left(1+\frac{8}{2n}\right)^{2n+4}\right]^2}{\left[\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n+4}\right]^2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\left(1+\frac{8}{2n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{8}{2n}\right)^4}{\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{5}{2n}\right)^4}\right]^2 = \left(\frac{e^8}{e^5}\right)^2 = e^6$

10 a, Igazoljuk, hogy $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (L'Hosp.-szabállyal). $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \to e^1$; $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1+x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$

b, $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{\sqrt{n}} = \infty$, mert: $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \to e$

$x_n = \sqrt{n} \to \infty$ az átviteli elv. alapján az a, pont szerint

$2 < \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$ $(n > N)$ $(2<e<3$ miatt$)$

$\underset{\downarrow \infty}{2^{\sqrt{n}}} < \left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{\sqrt{n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow \frac{1}{e}}\right)\right]^{2n}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow 1}=0$ mert: $0<\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{2}$; $n>N$ $\left(\frac{1}{3}<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}\right)$

$0<\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{2n}<\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}_{\downarrow 0}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^3}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\underbrace{\left(1-\frac{2}{n^3}\right)^{n^3}}_{\searrow \frac{1}{e^2}}}=1$ mert: $\underbrace{\sqrt[n^2]{\frac{1}{9}}}_{\downarrow 1}<\sqrt[n^2]{\left(1-\frac{2}{n^3}\right)^{n^3}}<\underbrace{\sqrt[n^2]{\frac{1}{4}}}_{\downarrow 1}$; $n>N$ $\left(\frac{1}{9}<\frac{1}{e^2}<\frac{1}{4}\right)$

// $\left(1+\frac{x}{n^3}\right)^{n^3}$ részsorozata $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$-nek ; $\sqrt[n^2]{p}$ részsorozata $\sqrt[n]{p}$-nek //

REKURZÍV SOROZAT

11.) $a_1=6$, $a_n=5-\frac{6}{a_{n-1}}$ $n\geq 2$; Igazoljuk, hogy monoton csökkenő, alulról korlátos és így konvergens. Határértéke: 3.

A lehetséges határértékek: $A=5-\frac{6}{A} \Rightarrow A^2-5A+6=(A-3)(A-2)=0$ $A_1=3$, $A_2=2$

Alsó korlát: 3 (Teljes indukcióval) $3<a_1$, $3<a_n \Rightarrow 3<a_{n+1}$ mert: ha

$0<3<a_n \Rightarrow \frac{1}{3}>\frac{1}{a_n} \Rightarrow -\frac{6}{3}<-\frac{6}{a_n} \Rightarrow 5-2<5-\frac{6}{a_n} \Rightarrow 3<5-\frac{6}{a_n}=a_{n+1}$

Monoton csökkenő: (telj. ind.) $a_2=5$ $a_2<a_1$, ha $0<a_n<a_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{a_n}>\frac{1}{a_{n-1}} \Rightarrow$
$-\frac{6}{a_n}<-\frac{6}{a_{n-1}} \Rightarrow 5-\frac{6}{a_n}<5-\frac{6}{a_{n-1}} \Rightarrow a_{n+1}<a_n$

12.) $a_n=\frac{10}{n}+\sin\frac{n\pi}{4}$ $(n=1,2,3,\dots)$
a, torlódási pontok?
b, $\limsup a_n=?$ $\liminf a_n=?$
c, $\sup\{a_n\}=?$ $\inf\{a_n\}=?$

a, Torlódási pontok: $-1,-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},1$
b, $\limsup a_n=1$ $\liminf a_n=-1$
c, $\sup\{a_n\}=10+\sin\frac{\pi}{4}=10+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\inf\{a_n\}=-1$

13.) Konv-e? a, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{n}}$ b, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Egyik sem, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4^{n-1}+5^{2n+1}}{100^n}=?$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{3}{4}\cdot 4^n+25^n\cdot 5}{100^n}=\frac{3}{4}\sum\limits_{1}^{\infty}\left(\frac{4}{100}\right)^n+5\sum\limits_{1}^{\infty}\left(\frac{25}{100}\right)^n=\frac{3}{4}\frac{0,04}{1-\frac{4}{100}}+5\frac{0,25}{1-\frac{25}{100}}=$

$a_1+a_1q+a_1q^2+\dots=\frac{a_1}{1-q}$ ha $|q|<1$ | $=\frac{3}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{100-4}+5\frac{25}{100-25}=\frac{3}{96}+\frac{125}{75}=\frac{163}{96}\approx 1,7$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=?$ $\sum\limits_{1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}-\frac{\frac{1}{2}}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{k\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{2k-1}}-\cancel{\frac{1}{2k+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2k+1}}-\frac{1}{2k+3}\right)\right]=$
$=\frac{1}{2}\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2k+3}\right)=\frac{1}{6}$

HÁZI FELADAT:

1, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n+5\cdot n^{100}}{11\cdot 2^n+10n^{100}}=\left(\frac{3}{11}\right)$

2, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot n!+4n^n+2^n}{3^n+(n-1)!+n^n}=(4)$

3, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=(1)$

4, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3-n}{2n^2+10}}=(1)$

5, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n-1}=(e^2)$

6, $a_1=8$; $a_{n+1}=7-\frac{6}{a_n}$ $n\geq 1$;
a, Igazolja, hogy konv. b, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=?$
($a_n \searrow$ alulról korl. $A=6$)

7, $a_n=\begin{cases}\frac{2n+1}{3n} & \text{ha } n=3k \\ \frac{1}{n^2} & \text{ha } n=3k+1 \\ \sqrt[n]{2} & \text{ha } n=3k+2\end{cases}$ $(k=1,2,3,\dots)$

Torlódási pontok, $\limsup a_n$, $\liminf a_n$, $\sup\{a_n\}$, $\inf\{a_n\}$?

(Torl. pontok: $0,\frac{2}{3},1$; $\sup\{a_n\}=\sqrt[5]{2}$, $\inf\{a_n\}=0$)

ANAL (1)

AO KURZUS

7. GYAKORLAT

SOROK KONVERGENCIÁJA Okt. 29. Szabó Péter

Elégséges feltételek

I. Pozitív tagú sorok

a, majoráns, minoráns kritérium $\boxed{\sum\limits_{\alpha>1} \frac{1}{n^\alpha}, \sum\limits_{0<q<1} q^n \text{ konv. majoránsok}, \sum\limits_{0<\alpha\le 1} \frac{1}{n^\alpha}, \sum\limits_{q>1} q^n \text{ div. minoránsok.}}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{5n+1}}_{a_n}$ div., mert $a_n \geq \frac{1}{5n+5} = \frac{1}{5(n+1)} > 0$ és $\sum \frac{1}{n+1}$ div.

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n^2+n-\sqrt{n}}{2n^3-n^2+n-\sqrt{2}}$ div., mert $a_n \geq \frac{n^2}{2n^3+n} \geq \frac{n^2}{3n^3} = \frac{1}{3n} > 0$ és $\sum \frac{1}{n}$ div.

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n+2^n}$ konv., mert $0 < a_n < \frac{2\cdot 3^n}{5^n} = 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$ és $\sum\left(\frac{3}{5}\right)^n$ konv.

b, Hányados és gyökkritérium

Felhasználható határértéktételek:

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \ (x\in\mathbb{R} \text{ rögzített}); \ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p} = 1 \ (p>0 \text{ rögzített}); \ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1}$

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n^4\cdot 3^n}{e^{2n+1}}$ konv., mert $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^4 3^{n+1}}{e^{2n+3}}\cdot\frac{e^{2n+1}}{n^4\cdot 3^n} = \frac{3}{e^2}\Big(\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1}\Big)^4 \to \frac{3}{e^2} < 1$

$\sum\limits_{1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$ konv., mert $\sqrt[n]{a_n} = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \to e^{-2} < 1$

$\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+1}}{n^3}$ div., mert $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3} \to e > 1.$ ($\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} \to 1$, $\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \to 1$)

$1 < 1+\frac{1}{n} < 2$

$\underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{1}} < \underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}} < \underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{2}}$

II. Váltakozó előjelű sorok

$\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$ Konv. Leibniz típ. sor $f(x) = \frac{1}{x-\ln x} \searrow$ mert $f'(x) < 0$ $(x>1)$

$\sum\limits_{2}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2-2}$ konv. Leibniz típ. sor $|a_{n+1}| < |a_n| \Leftrightarrow 0 < n^2+3n+3$ $(D<0)$; vagy $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$ és $f' < 0$

$\sum\limits_{1}^{\infty}\left(-1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ div. mert $a_n \not\to 0$

Hibabecslés

Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora hibával közelíti meg az első öt tag összege a sorösszeget!

$\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ konv., mert $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot n! = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$

$S_5 = 1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{5!}$; $H_5 = \frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\dots = \frac{1}{6!}\left[1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{7\cdot 8\cdot 9}+\dots\right] < \frac{1}{6!}\left[1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\dots\right] =$

$$= \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{7}{6\cdot 6!} \approx 1{,}62\cdot 10^{-3}$$

$\sum_1^\infty \frac{1}{n^n}$ konv., mert $\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{n}\to 0<1$

$S_5=1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{5^5}$; $H_5=\frac{1}{6^6}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{8^8}+\frac{1}{9^9}+\dots<\frac{1}{6^6}+\frac{1}{6^7}+\frac{1}{6^8}+\dots=\frac{1}{6^6}\left[1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\dots\right]=$

$$=\frac{1}{6^6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{6^6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{6^5 5}\approx 2{,}57\cdot 10^{-5}$$

$\sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{n\cdot \ln n}$ Konv., mert Leibniz típusú

az első öt tag összege: $\frac{1}{2\ln 2}-+\dots+\frac{1}{6\cdot\ln 6}$. $|H|<|a_7|=\left|-\frac{1}{7\ln 7}\right|\approx 0{,}0734$

<u>Divergens, feltételesen v. abszolut konvergens?</u>

$\sum_1^\infty (-1)^{2n+1}\frac{n^n}{n!\cdot 2^n}$ (neg. tagok) Div., mert $|a_{n+1}|>|a_n|$ $(n>N)$ miatt $a_n \not\to 0$; $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{e}{2}>1$

$\sum_2^\infty (-1)^n\frac{1}{\ln n}$ felt. konv. mert Leibniz típusú konv. sor, de $\sum\frac{1}{\ln n}$ div. mert $0<\ln n<n \Rightarrow \frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ $(n>1)$ és $\sum\frac{1}{n}$ div.

$\sum_1^\infty \frac{(-2)^n}{3^n+n+1}=\sum_1^\infty(-1)^n\frac{2^n}{3^n+n+1}$ absz. konv., mert $|a_n|<\left(\frac{2}{3}\right)^n$ és $\sum\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konv.

<u>Konvergensek-e az alábbi sorok?</u> CSAK A VDT II.-ben lesz. Esetleg HF.-nak adható

a, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{2^4}+-\dots$ (konv., mert $\sum_1^\infty\frac{1}{n!}-\sum_1^\infty\frac{1}{2^n}$ (Konv. sorok különbsége))

b, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6}+-\dots$ (divergens, részletösszegei $-\infty$ hez tartanak)

c, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}+\frac{1}{16}-\frac{1}{81}+-\dots$ Nem Leibniz típusú, $|a_n|$ nem mon. csökkenő (Konv., nem Leibniz típusú $|a_n|$ nem mon csökkenő.) $\sum_1^\infty\frac{1}{2^n}-\sum_1^\infty\frac{1}{3^n}$

d, $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{7}+\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}-\frac{1}{9}+-\dots$ (div., részletösszegei $-\infty$-hez tartanak. Nem Leibniz típusú $|a_n|$ nem mon csökkenő)

e, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{25}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{125}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}-\frac{1}{625}++-\dots$ (konv.)

<u>HÁZI FELADAT</u>

1, $\sum_{n=1}^\infty\frac{n^2}{2^n}$ konv.-e? $\left(\sqrt[n]{a_n}=\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2}\to\frac{1}{2}\right)$

2, $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4+4^n}$ Igazolja, hogy konvergens és becsülje meg S_{10} hibáját! $\left(0<a_n<\left(\frac{1}{4}\right)^n,\ H<\sum_{11}^\infty\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{11}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3\cdot 4^{11}}\right)$

3, $\sum_{n=1}^\infty\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$ konv.-e? $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{e}\right)$

4, $\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos n\pi}{n}$ konv. illetve absz. konv.-e? $\left(\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n}\right.$ feltételesen konv.$\left.\right)$

5, $\sum_{n=1}^\infty\frac{n^2+n-\sqrt{n}}{3n^4+n-2}$ konv-e? (Majorálható hiperharmonikus sorral)

A második zh anyaga: 1, L'Hospital szabály 2, Nevezetes határértékek, 3, $f(x)^{g(x)}$ deriváltja és lémeze, 4, Függvényvizsgálat, 5, Lokális tulajdonságok implicit, paraméteres és polár alakban is, 6., Sorozatok és sorok, 7, Kevés határozatlan integrál.

ANAL(1)
AO KURZUS

8. GYAKORLAT (nov. 5., 6.)

Szabó Péter

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

BEVEZETŐ PÉLDÁK

1, $\int \frac{1}{(7x+5)^2}\,dx = \int (7x+5)^{-2}\,dx = -\frac{1}{7(7x+5)} + C \qquad I: (-\infty,-\frac{5}{7}), (-\frac{5}{7},\infty)$

2, $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+5)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + C \qquad I: (-\infty,\infty)$

3, $\int x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (-2x)e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C,\ I:(-\infty,\infty);$ $\int e^{-x^2}\,dx$ Bár létezik, elemi függvényekkel nem fejezhető ki.

4, $\int \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2}\int \frac{\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}} + C,\ I: (0,\infty)$

5, $\int (e^x + e^{-2x})^2\,dx = \int (e^{2x} + 2e^{-x} + e^{-4x})\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-4x} + C \qquad I: (-\infty,\infty)$

6, $\int (3x-4)^5\,dx = \frac{(3x-4)^6}{6\cdot 3} + C \qquad I: (-\infty,\infty)$

7, a, $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$; b, $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x}\,dx = \ln|\operatorname{tg} x| + C,\ I: \left((2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\ k\in\mathbb{Z}$

8, $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}\,dx = 2\sqrt{\operatorname{arctg} x} + C \qquad I: (0,\infty)$

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

TELJES NÉGYZETTÉ KIEGÉSZÍTÉS

1, $\int \frac{4}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{4}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{4}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = 2\cdot\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C,\ I:(-\infty,\infty)$

A nevező diszkriminánsa: $D = 4-12<0$

2, $\int \frac{1}{\sqrt{1+4x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{5-(x-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}\cdot\cancel{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}} + C,\ I: |x-2|<\sqrt{5}$

3, $\int \frac{x+4}{x^2+6x+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+6)+2}{x^2+6x+10}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,dx + \int \frac{2}{(x+3)^2+1}\,dx\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+10) + \operatorname{arctg}(x+3) + C$

$D = 36-40<0 \Rightarrow x^2+6x+10>0\quad x\in\mathbb{R} \qquad I: (-\infty,\infty)$

RÉSZTÖRTEKRE BONTÁS

1, $\int \frac{x+6}{x^2+6x+8}\,dx = \int \left(\frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+2}\right)dx = \int \left(-\frac{1}{x+4} + \frac{2}{x+2}\right)dx = -\ln|x+4| + 2\ln|x+2| + C = \ln\frac{(x+2)^2}{|x+4|} + C$

$D = 36-32>0 \quad x^2+6x+8 = (x+4)(x+2)$

$$\begin{cases} A(x+2)+B(x+4) = x+6 \\ x=-2 \quad 0 + 2B = 4 \Rightarrow B=2 \\ x=-4 \quad -2A + 0 = 2 \Rightarrow A=-1 \end{cases}$$

$I: (-\infty,-4), (-4,-2), (-2,\infty).$

2, $\int \frac{2x^2-7x+3}{(x^2-1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \ln|x-1| + 2\ln|x+1| - \ln|x-2| + C =$

$-1,\ 1,\ 2$ a nevező egyszeres gyökei

$= \ln\frac{|x-1|(x+1)^2}{|x-2|} + C$

$I: (-\infty,-1), (-1,1), (1,2), (2,\infty)$

$$\begin{cases} A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x^2-1) = 2x^2-7x+3 \\ x=1 \quad -2A + 0 + 0 = -2 \Rightarrow A=1 \\ x=-1 \quad 0 + 6B + 0 = 12 \Rightarrow B=2 \\ x=2 \quad 0 + 0 + 3C = -3 \Rightarrow C=-1 \end{cases}$$

3, $\int \frac{x^2+7x-4}{(x-1)^2(x+3)}\,dx = \int \left(\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}\right)dx = \int \left(-\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right)dx =$

$x=1$ a nevező kétszeres gyöke

$= -\frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| - \ln|x+3| + C =$

$= -\frac{1}{x-1} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x+3|} + C$

$I: (-\infty,-3), (-3,1), (1,\infty)$

$$\begin{cases} A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2 = x^2+7x-4 \\ x=-3 \quad 0 + 0 + 16C = -16 \Rightarrow C=-1 \\ x=1 \quad 4A + 0 + 0 = 4 \Rightarrow A=1 \\ x=0 \quad 3A - 3B + C = -4 \Rightarrow B=2 \end{cases}$$

4, $\int \frac{4x-1}{(x^2+4)(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x+1}\right)dx = \int \left(\frac{x+3}{x^2+4} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+4} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$

x^2+4-nek nincs valós gyöke

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{3}{4}\cdot 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \ln|x+1| + C$

$= \ln\frac{\sqrt{x^2+4}}{|x+1|} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$

$$\begin{cases} (Ax+B)(x+1) + C(x^2+4) = 4x-1 \\ \underbrace{(A+C)}_{=0}x^2 + \underbrace{(A+B)}_{=4}x + \underbrace{B+4C}_{=-1} = 4x-1 \\ A=1,\ B=3,\ C=-1 \text{ adódik} \end{cases}$$

$I: (-\infty,-1), (-1,\infty)$

5, $\int \frac{x^3-4x^2+3x+4}{x^2-2x-3}\,dx = \int\left(x-2+\frac{2x-2}{(x+1)(x-3)}\right)dx = \int\left(x-2+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}\right)dx =$

Nem valódi törtfv., $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$= \frac{x^2}{2}-2x+\ln|x+1|+\ln|x-3|+C$

$= \frac{x^2}{2}-2x+\ln|(x+1)(x-3)|+C$

$I: (-\infty,-1), (-1,3), (3,\infty)$

POLINOM OSZTÁS:

$x^3-4x^2+3x+4 : x^2-2x-3 = x-2$

$\underline{-x^3 \mp 2x^2 \mp 3x}$

$-2x^2+6x+4$

$\underline{\mp 2x^2 \pm 4x \pm 6}$

$2x-2$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

1, $\int \underbrace{(3x^2+1)}_{v'}\underbrace{\ln x}_{u}\,dx = (x^3+x)\ln x - \int(x^2+1)\,dx = (x^3+x)\ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$, $I: (0,\infty)$

$v = x^3+x \quad u' = \frac{1}{x}$

2, $\int \underbrace{x^3}_{v'}\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\,dx = \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4}\int\frac{x^4}{1+x^2}\,dx = \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x\right) + C$

$v = \frac{x^4}{4} \quad u' = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2} = x^2-1+\frac{1}{1+x^2}$ $\qquad I: (-\infty,\infty)$

3, $\int \arcsin x\,dx = \int \underbrace{1}_{v'}\cdot\underbrace{\arcsin x}_{u}\,dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

$v = x \quad u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad I: (-1,1)$

4, $\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\sin(3x+2)}_{v'}\,dx = -\frac{1}{3}x\cos(3x+2) + \frac{1}{3}\int\cos(3x+2)\,dx = -\frac{1}{3}x\cos(3x+2) + \frac{1}{9}\sin(3x+2) + C$

$u' = 1 \quad v = -\frac{\cos(3x+2)}{3}$ $\qquad I: (-\infty,\infty)$

5, $I(x) = \int \underbrace{e^{3x}}_{u}\underbrace{\sin 2x}_{v'}\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx \;\Big/\cdot\frac{2}{3}$ fordított szerepo\-sztásban is:

$u' = 3e^{3x} \quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$I(x) = \int \underbrace{e^{3x}}_{v'}\underbrace{\sin 2x}_{u}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 2x - \frac{2}{3}\int e^{3x}\cos 2x\,dx \;\Big/\cdot\frac{3}{2}$

$v = \frac{1}{3}e^{3x} \quad u' = 2\cos 2x$

$\underbrace{\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)}_{\frac{13}{6}}I(x) = -\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x;\quad I(x) = e^{3x}\left(-\frac{2}{13}\cos 2x + \frac{3}{13}\sin 2x\right) + C$

$I: (-\infty,\infty)$

6, $\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^{5x}}_{v'}\,dx = \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5}\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{5x}}_{v'}\,dx = \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5}\left\{\frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\underbrace{\int e^{5x}\,dx}_{\frac{1}{5}e^{5x}}\right\} =$

$u' = 2x \quad v = \frac{1}{5}e^{5x}$ $\qquad u' = 1 \quad v = \frac{1}{5}e^{5x}$

$= \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{25}xe^{5x} + \frac{2}{125}e^{5x} + C = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}\right) + C$

$I: (-\infty,\infty)$

HÁZI FELADAT:

1, $\int \frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}\,dx =$

2, $\int \frac{3x^2-3x+2}{(x-1)^2(x+1)}\,dx =$

3, $\int \frac{2x^2+x+1}{(x^2+1)x}\,dx =$

4, $\int \frac{x+3}{x^2+4x+7}\,dx =$

5, $\int \frac{x^3+4x^2+x-6}{(x-1)(x+2)}\,dx =$

6, $\int (x+1)\ln 2x\,dx =$

7, $\int (2x-x^2)\operatorname{sh} x\,dx =$

8, $\int x\cos^2 x\,dx =$

9, $\int \arccos x\,dx =$

ANAL (1)
AO KURZUS

9. GYAKORLAT (NOV. 12.–13.)
HATÁROZATLAN INTEGRÁL (FOLYTATÁS)

Szabó Péter

$\int R(e^x)dx$ alakú integrálok

1, $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}dt = \int\left(-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{t}\right)dt = -\ln|1+t| + \ln|t| + c = -\ln(1+e^x)+x+c$

$\boxed{e^x = t} \Leftrightarrow x = \ln t$
helyettesítés $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$

2., $\int\frac{1}{\text{sh}x}dx = \int\frac{2}{e^x - e^{-x}}dx = \int\frac{2}{t-\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}dt = 2\int\frac{t}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t}dt = 2\int\frac{1}{(t-1)(t+1)}dt =$
az előző helyettesítéssel

$= \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \ln|t-1| - \ln|t+1| + c = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+c$

$\int R(\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ alakú integrálok
Teljes négyzetté kiegészítéssel az alábbi 3 eset valamelyikére vezethetők vissza:

a, $\sqrt{1-(\dots)^2}$ esetén $(\dots) := \sin t \quad t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ vagy $(\dots) := \cos t \quad t\in[0,\pi]$

b, $\sqrt{(\dots)^2+1}$ " $(\dots) := \text{sh}\, t \quad t\in\mathbb{R}$

c, $\sqrt{(\dots)^2-1}$ " $(\dots) := \text{ch}\, t \quad t>0$

használjuk a következő azonosságokat!

$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \qquad \text{ch}^2 t = \frac{\text{ch}2t+1}{2} \qquad \text{ch}^2t - \text{sh}^2 t = 1$

$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \qquad \text{sh}^2 t = \frac{\text{ch}2t-1}{2} \qquad \text{ch}^2 t + \text{sh}^2 t = \text{ch}2t$

$\text{sh}2t = 2\,\text{sh}t\cdot\text{ch}t$

1, $\int\sqrt{1-x^2}dx = \int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\, dt = \int\underbrace{|\cos t|}_{=\cos t,\text{ mert } t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\cdot\cos t\, dt = \int\cos^2 t\, dt = \int\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$

$\boxed{x=\sin t} \Leftrightarrow t = \arcsin x$

$\frac{dx}{dt} = \cos t \quad t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
$dx = \cos t\, dt$

$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\underbrace{\sin 2t}_{2\sin t\cos t} + c = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + c =$
$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c$

2., $\int\sqrt{x^2-1}\,dx = \int\sqrt{\text{ch}^2t-1}\cdot\text{sh}t\,dt = \int\underbrace{|\text{sh}t|}_{=\text{sh}t \text{ mert } t>0}\cdot\text{sh}t\,dt = \int\text{sh}^2t\,dt = \int\frac{\text{ch}2t-1}{2}dt =$

$\boxed{x=\text{ch}t} \Leftrightarrow t = \text{arch}\,x$
$t>0$
$\frac{dx}{dt} = \text{sh}t \quad dx = \text{sh}t\,dt$

$= \frac{\text{sh}2t}{4} - \frac{1}{2}t + c = \frac{2\,\text{sh}t\,\text{ch}t}{4} - \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{2}\text{ch}t\sqrt{\text{ch}^2t-1} - \frac{1}{2}t + c =$
$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\text{arch}\,x + c$

3, $\int\sqrt{x^2+6x+10}\,dx = \int\sqrt{(x+3)^2+1}\,dx = \int\underbrace{\sqrt{\text{sh}^2t+1}}_{\text{ch}t}\,\text{ch}t\,dt = \int\text{ch}^2t\,dt = \int\frac{\text{ch}2t+1}{2}dt =$

$\boxed{x+3=\text{sh}t} \Leftrightarrow t = \text{arsh}(x+3)$
$x = -3+\text{sh}t \quad t\in\mathbb{R}$
$dx = \text{ch}t\,dt$

$= \frac{1}{4}\underbrace{\text{sh}2t}_{2\text{sh}t\,\text{ch}t} + \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{2}\text{sh}t\sqrt{1+\text{sh}^2t} + \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{2}(x+3)\sqrt{(x+3)^2+1} + \frac{1}{2}\text{arsh}(x+3)+c =$
$= \frac{1}{2}(x+3)\sqrt{x^2+6x+10} + \frac{1}{2}\text{arsh}(x+3)+c$

Adott helyettesítés végrehajtása

1, $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,dx = \int \frac{t^2}{t^3+1}\cdot 4t^3\,dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,dt = 4\int\left(t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$

Alkalmazza az $\boxed{x^{\frac{1}{4}}=t}$ helyettesítést!

$x=t^4 \quad (x>0)$

$dx = 4t^3\,dt$

$= 4\int\left(t^2-\frac{1}{3}\frac{3t^2}{t^3+1}\right)dt = 4\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}\ln|t^3+1|\right)+c = 4\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{1}{3}\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)+c$

2, $\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int \sin t\cdot 2t\,dt = 2\int \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{\sin t}_{v'}\,dt = 2\left(-t\cos t + \underbrace{\int \cos t\,dt}_{\sin t}\right) =$

Alkalmazza a $\boxed{\sqrt{x}=t}$ helyettesítést! $u'=1 \quad v=-\cos t$

$(x>0) \quad x=t^2$

$dx = 2t\,dt$

$= -2t\cos t + 2\sin t + c = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c$

3, $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1}{(1+tg^2u)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{1}}{\cos^2 u}\,du = \int \frac{1}{1+tg^2u}\,du = \int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2u)\,du =$

Alkalmazza az $\boxed{x = tg\,u}$ helyettesítést! $u = \operatorname{arctg} x$

$dx = \frac{1}{\cos^2 u}\,du \qquad 1+tg^2u = \frac{\cos^2u+\sin^2u}{\cos^2u} = \frac{1}{\cos^2 u}$ felhasználásával.

$= \frac{1}{2}\left(u + \frac{\sin 2u}{2}\right)+c = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\,\underbrace{\frac{2tg\,u}{1+tg^2u}}_{=\sin 2u} + c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+c$

4, $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{2x+1}} = \frac{3}{2}\int\frac{t^2}{1+t}\,dt = \frac{3}{2}\int\frac{(t^2-1)+1}{t+1}\,dt = \frac{3}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+c =$

Alkalmazza a $\boxed{\sqrt[3]{2x+1}=t}$ helyettesítést! $2x+1=t^3 \quad x=\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2} \quad dx=\frac{3}{2}t^2\,dt$

$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{2x+1}+1\right|+c$

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ alakú integrálok

$\boxed{t = tg\frac{x}{2}}$ helyettesítési $\Rightarrow$ $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,,\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$

$\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\,dx =$

$= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{2}{2t+1-t^2+1+t^2}\,dt = \int\frac{1}{t+1}\,dt = \ln|t+1|+c =$

$= \ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right|+c$

HÁZI FELADAT

1, $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$

2, $\int \sqrt{x^2+2x}\,dx$

3, $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

4, $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ $\boxed{x^{\frac{1}{3}}=t}$ helyettesítéssel

5, $\int \frac{dx}{\sin^2 x + tg^2 x}$ $\boxed{tg\,x = u}$ helyettesítéssel

6, $\int \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}\,dx$ $\boxed{tg\frac{x}{2}=t}$ helyettesítéssel