Villamosmérnök A2 (2019 tavasz) — 1. pót ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Számítsa ki $A^{-1}B^{-1}$-et ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$!

Megoldásvázlat. $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} = I^{-1} = I$, ahol I a 3×3-as egységmátrix.

2. Adja meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát az a és b paraméterek függvényében!

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + 6y + 15z &= 3 \\ 3x + 4y + az &= b \end{aligned}$$

Megoldásvázlat. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 15 & 3 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \underset{S_2-2S_1}{\overset{S_3-3S1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 9 & -1 \\ 0 & -2 & a-9 & b-6 \end{array}\right) \underset{S_2/2}{\overset{S_1-S_2,S_3+S_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 9/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & a & b-7 \end{array}\right),$$

tehát 0 megoldás van, ha $a = 0$, $b \neq 7$, 1 megoldás van, ha $a \neq 0$, és végtelen sok, ha $a = 0$, $b = 7$.

3. Legyen $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ független vektorrendszer egy V vektortérben, $v_1 = e_1 + e_2 + 2e_3$, $v_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $v_3 = 3e_1 + 2e_2 - e_3$ és $v_4 = 3e_1 + 5e_2 + 2e_3$. (a) Hány dimenziós a $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ által kifeszített W altér? (b) Fejezzük ki $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ elemeit W egy bázisában!

Megoldásvázlat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{S_3-2S_1}{\overset{S_2-S_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix} \underset{S_3-S_2}{\overset{S_1+2S_2/3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/3 & 13/3 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{-S_3/6}{\overset{-S_2/3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/3 & 13/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{S_2-S_3/3}{\overset{S_1-7S_3/3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

azaz $\{v_1, v_2, v_3\}$ független és $v_4 = 2v_1 - v_2 + v_3$: így $\{v_1, v_2, v_3\}$ generátorrendszere, következésképp bázisa is W-nek, és ezért $\dim(W) = 3$.

4. Legyen $\underline{\underline{b}}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a b vektor egy $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ bázisbeli felírása, $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 + 2e_3$, $f_3 = 2e_1 + 2e_3$. Mutassuk meg, hogy $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ is bázis, és adjuk meg $\underline{\underline{b}}_f$-et, azaz b felírását az f bázisban.

Megoldásvázlat. Az f-ről e-re való áttérés mátrixa $\underline{\underline{I}}_{fe} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, az e-ről f-re való áttérésé $\underline{\underline{I}}_{fe}^{-1}$ (és ez pontosan akkor létezik, ha $\underline{\underline{I}}_{fe}$ oszlopai függetlenek, azaz, 3-dimenziós térről lévén szó, ha f bázis).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{S_3-S_1}{\overset{S_2-S_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{S_3-2S_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{S_3/4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right) \underset{S_2+2S_3}{\overset{S_1-2S_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right),$$

azaz $\underline{\underline{I}}_{fe}$ invertálható (tehát f bázis), és $\underline{\underline{I}}_{ef} = \underline{\underline{I}}_{fe}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ miatt

$$\underline{\underline{b}}_f = \underline{\underline{I}}_{ef}\underline{\underline{b}}_e = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Legyen A az $y = x$-síkra való tükrözés $\mathbb{R}^3$-ben. Adja meg A mátrixát $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisában, A sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket!

Megoldásvázlat. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; az $y = x$ sík (azaz az $i + j$ és k által generált altér) az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér, mert ennek elemeire $Av = v$; az $x = -y$ egyenes az xy-síkon (az $i - j$ által generált altér) pedig az -1 sajátértékhez tartozó sajátaltér, mert ennek elemeire $Av = -v$. És más sajátérték nincs, mert egyetlen más vektor képe sem annak valamilyen skalárszorosa.

Vagy számolással: A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda^2)(\lambda - 1)$$

gyökei $\lambda = \pm 1$. Az 1-hoz tartozó sajátaltér a $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai, azaz $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, a -1-hez tartozó sajátaltér pedig az $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai, azaz $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. (a) Mit jelent az, hogy a $\{v_1, \dots, v_n\}$ vektorhalmaz lineárisan független?
(b) Igazak-e az alábbi állítások?
(b1) Invertálható mátrixok összege is invertálható.
(b2) Négyzetes mátrixok determinánsa nem változik, ha két sorát felcseréljük.
(b3) Ha egy lineáris transzformációnak 0 nem sajátértéke, akkor invertálható.
(b4) Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, és $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, akkor $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(A))$ (azaz ha a magtér triviális, akkor a képtér dimenziója $= \dim(V)$).

Megoldásvázlat. (a) Azt, hogy $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$-ból $c_1 = \ldots = c_n = 0$ következik.
(b1)Nem, tetszőleges invertálható A mátrixra $-A$ is invertálható, de az összegük a 0-mátrix, ami nem.
(b2) Nem, tetszőleges nem-0 determinánsú mátrix ellenpélda, mert a sorcserétől a determináns a -1-szeresére változik.
(b3) Igen, mert akkor a magtere $\{0\}$, tehát izomorfizmus.
(b4) Igen, mert akkor izomorfizmus (vagy a dimenzió-tétel miatt, mert $\dim(V) = \dim(\{0\}) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

IMSc-feladat. Igaz-e, hogy ha az A invertálható lineáris transzformációnak v sajátvektora λ sajátértékkel, akkor A^{-1}-nek is, $1/\lambda$ sajátértékkel.

Megoldásvázlat. Igen. A invertálhatósága miatt $\lambda \neq 0$ (különben $0 \neq v \in \mathrm{Ker}\, A$), és $\lambda A^{-1}(v) = A^{-1}(\lambda v) = A^{-1}(Av) = v$ miatt $A^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} v$.