2. Vizsgazárthelyi 2008/09 tél A3

1. Oldja meg az $y' + x^4 y^2 = 0$, $y(0) = 5$ kezdeti érték problémát!

2. Legyen K a $z = h$ egyenletű síkban fekvő tetszőleges R sugarú körlap. Számítsa ki a $v(r) = r$, $r \in \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény felületmenti integrálját K-n!

3. Határozzuk meg a $v(x, y) = (x^3 + y^3, 3xy^2)$ vektorfüggvény potenciálját, ahol az létezik!

4. Legyen K az origóközéppontú $R = 3$ sugarú pozitívan irányított kör a komplex síkon. Mennyi az $\displaystyle\int_K \frac{1}{z(z^2 - 6z + 8)}\, dz$ integrál értéke?

5. Adja meg az $f(z) = \dfrac{1}{2 - z}$ függvény $z = 0$ és $z = 2$ körüli összes Laurent-sorát!

6.

(a) Legyen v tetszőleges mindenütt folytonosan deriválható vektor-vektor függvény. Melyik igaz, melyik nem?

(1) Ha v minden görbementi integrálja független az integrálási úttól, akkor v skalárpotenciálja mindenütt 0. h

(2) Ha v-nek van skalárpotenciálja, akkor v minden görbementi integrálja független az integrálási úttól.

(3) Ha van v-nek skalárpotenciálja, akkor rot v minden zárt görbementi integrálja 0. I

(4) Ha v görbementi integráljai függetlenek az integrálási úttól, akkor van olyan u skalárfüggvény, melynek gradiense v.

(b) Legyen f tetszőleges mindenütt reguláris komplex függvény, a a komplex sík tetszőleges pontja, L pedig olyan pozívan irányított egyszerű zárt görbe, mely a belsejében tartalmazza az a-t. Melyik igaz, melyik nem?

(1) $\displaystyle\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-a)^n}\, dz = f^{(n)}(a)$ minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén I

(2) $\displaystyle\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-a)^n}\, dz = 0$ minden $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$ esetén

(3) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(a)}{z-a}\, dz = f(a)$

(4) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(z)$