Matematika A1 4. vizsga

2022. január 20.

1. (a) Bizonyítsuk a $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ azonosságot!
   (b) Milyen t esetén lesz az $A(1,-3,6)$, $B(1,-2,4)$, $C(-1,2,0)$ és $D(0,3,t)$ csúcsú tetraéder térfogata 4 egység?

Megoldás. *a*) Teljes indukcióval bizonyítunk. **(1 pont)**
I. $n = 1$ esetén: $1 \cdot 2 = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$ **(2 pont)**
II. Ha $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ **(2 pont)**, akkor

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \qquad \textbf{(2 pont)} \\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) = \qquad \textbf{(2 pont)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \qquad \textbf{(1 pont)} \end{aligned}$$

b) A tetraéder térfogata megegyezik az $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatának hatodával (**1 pont**). A térfogat a vektorok vegyesszorzatának abszolútértéke (**2 pont**):

$$|\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -6 \\ -1 & 6 & t-6 \end{vmatrix} = |8 + 2t| = 24 \qquad \textbf{(2+2+1 pont)}$$

egyenlet megoldásai $t = 8$ **(1 pont)** és $t = -16$ **(1 pont)**

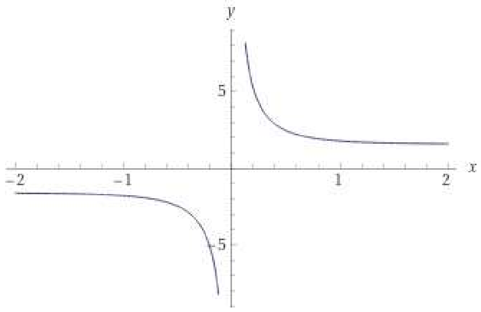
2. (10+10 pont)
   (a) Határozzuk meg az $z^2 + (4-2i)z + 3 + 5i = 0$ egyenlet gyökeit.
   (b) Adjuk meg az $a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{5^n} + 3^n}$ sorozat határértékét!

Megoldás. *a*) Másodfokú egyenletmegoldó képlettel:
$z_{1,2} = \dfrac{-4 + 2i + \sqrt{(4-2i)^2 - 4(3+5i)}}{2} = \dfrac{-4 + 2i + \sqrt{-36i}}{2}$ **(2+2 pont)**
Itt $-36i = 36\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ **(2 pont)**,
tehát $\sqrt{-36i} = \pm 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \mp 3\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i$ (**3 pont**), vagyis a megoldások: $z_1 = -2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$ és $z_2 = -2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$ **(1 pont)**
b) $3 = \sqrt[n]{3^n} \le a_n \le \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{2} \to 3$, (**1+1+3+1+2 pont**) tehát a rendőrelv alapján a sorozat határértéke 1 (**2 pont**).

3. (20 pont) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot, és ábrázoljuk az $\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$ függvényt.

Megoldás. I. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (**1 pont**)
II. $f(x) < 0$, ha $x < 0$ és $f(x) > 0$, ha $x > 0$, így a függvény nem metszi a tengelyeket (**1 pont**)
III. A függvény nem periodikus, de $f(-x) = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x = -f(x)$, így a függvény páratlan (**2 pont**)
IV. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x) = \pm\infty$ (**2 pont**).
V. Monotonitás: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{-1}{x^2(1+x^2)}$ (**3 pont**) negatív (**1 pont**), tehát f monoton csökken a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ intervallumokon.(**2 pont**).
VI. konvexitásvizsgálat: $f''(x) = \frac{2x(x^2+1)+2x^3}{x^4(1+x^2)^2} = \frac{2x(2x^2+1)}{x^4(1+x^2)^2}$ (**3 pont**). $f''(x) > 0$, ha $(-\infty, 0)$, tehát itt a függvény konvex, és $f''(x) < 0$, ha $(0, \infty)$, tehát itt a függvény konkáv. (**2 pont**).
VII. Aszimptoták: $x = 0$, $y = \pm\frac{\pi}{2}$ (**1 pont**)

VIII.



(**1 pont**)

IX. $R_f = \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right)$ (**1 pont**)

4. (20 pont) Megfelelő helyettesítéssel integráljuk a $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ függvényt!

Megoldás. A $t = \sqrt{x}$ helyettesítést alkalmazva $x = t^2 = \varphi(t)$, és $\varphi'(t) = 2t$ (**4 pont**)
$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t\, dt = 2 \int 1 - \frac{1}{t^2+1}\, dt =$ (**4+4 pont**)
$= 2t - 2\operatorname{arctg} t + c = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + c$ (**4+4 pont**)

5. (20 pont) Határozzuk meg a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ és $x + y = 1$ görbék által bezárt korlátos térrész területét!

Megoldás. A két görbe metszéspontjai: $1 - x = (1 - \sqrt{x})^2$, megoldásai 0 és 1 (**5 pont**), így a terület a különbség integrálja a metszéspontok között (**5 pont**), vagyis:

$$\int_0^1 1 - x - (1 - \sqrt{x})^2\, dx = \int_0^1 -2x + 2\sqrt{x}\, dx = \left[-x^2 + \frac{4}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \textbf{(3+4+3 pont)}$$

IMSC. (8 pont) Számítsuk ki az $y = b\sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$ görbeív x tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest felszínét!