2009.02.11. •1•

MÉRÉSELMÉLET

Dr. Péceli Gábor

Ráhangolódás

Olyan elvek és technikák gyűjteménye, ami a megismerést segíti.
→ fizikai, kémia, biológiai stb. környezet
→ de! a technikák nemcsak itt alkalmazhatók!

3 fontos terület:
- amire a megismerés irányul : A VALÓ VILÁG. "TÉR"
  - tájékozódás, ismeretszerzés itt
  - az ismeretek számunkra érdekesek, hasznosak
  - adott értelemben stabilitást mutatnak.
    ↳ ÁLLAPOT.
  - összefoglaló név
    ↳ RENDSZER → ezen belül dolgok állapota.

egymással kölcsönhatásban és kölcsönös összefüggésben lévő objektumok halmaza
↳ energiafolyamatok, intenzitások.

JEL
⇒ ez segít a jellemzésben, értelmezésben.

PARAMÉTER – intenzitásviszonyok, kölcsönhatások.
STRUKTÚRA – az objektumok egymáshoz rendeltsége

VALÓ VILÁG: állapot, paraméter, struktúra ⇒ jel és rendszer
jelelmélet, rendszerelmélet
↓
kölcsönhatásba lépünk a való világ egy szegmensével (érzékelők révén)

- MEGFIGYELÉS ⇝ ezeket szeretnénk gyűjteni, értékeket.
  → tér koncepció
  való világ tere és a megfigyelés tere
  → a való világ egy pontjának jellemzőit szeretnénk megismerni
  → egy pontból egy pontba történő leképezés

egy helyben marad, amit mérünk?
milyen a csatorna (jelátvitel)? van rajta zaj?
⇒ egy másik mérés egy másik pontot fog kijelölni
(másik mérés másik eredményt ad)
sok mérés ⇒ pont leképezése halmaz lesz (több pont)

– BECSLÉSEK ÉS DÖNTÉSEK

– szeretnénk a megfigyelésekből megbecsülni azt, amit megfigyeltünk

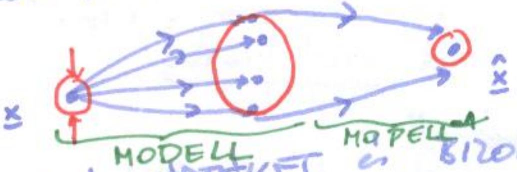
– hol van? mi a koordinátája?

→ megbecslünk egy $\hat{\underline{x}}$ vektort

⇝ vesszük a megfigyelt értékeket, és megpróbáljuk visszaforgatni

→ a becslésnek valamilyen bizonytalansága van

⇝ nem tökéletes a visszacsinálás



→ a mérés ÉRTÉKET és BIZONYTALANSÁGOT szül.

→ bizonytalanság nélkül nem mérés!

→ amikor egy érzékelőt elhelyezünk, bontjuk a [illegible] torzítjuk, amit figyelni akarunk!

kölcsönhatásba lépünk, befolyásolunk…

⇝ pl. ellenállásra áramot kényszerítünk, ami ennek hatására melegszik.

→ ismerni kell az egyes szakaszokat… hol mi történik?

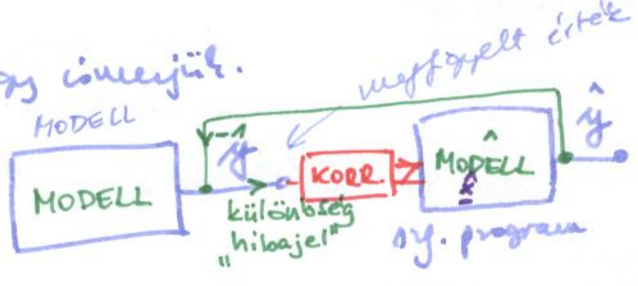
⇝ az ezzel kapcsolatos ismeretekből egy rendezett ismerethalmazt, MODELLt készítünk.

⇝ ezután valósítsuk meg ennek az INVERZÉT.

⇝ sikerül vagy sem? visszafordítható? (pl. megfigyelh.-e)

—— o ——

Képzeljük el, hogy ismerjük.



működtethető modell
⇝ számítógépes program
↳ fizikai megvalósítás
(kópia)

$e = y - \hat{y}$ korrigáljuk, alakítjuk a programot
→ a hibát igyekszik csökkenteni (ideális esetben NULLA) } visszacsatolás.

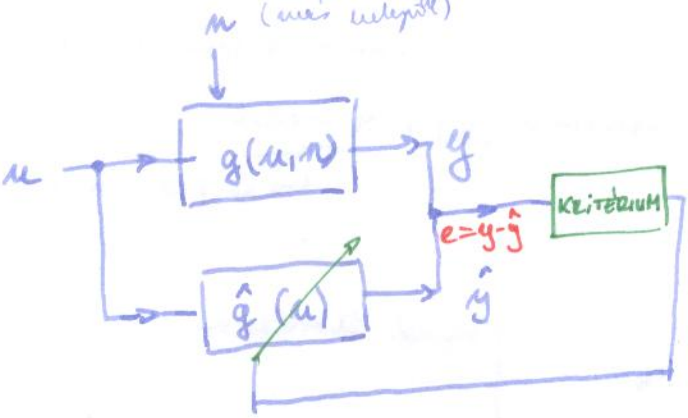
⟹ reális $\hat{\underline{x}}$ előállítás!

→ akkor nagy valószínűséggel, hogy ha a modell korrekt, az $\hat{\underline{x}}$ nem tér el $\underline{x}$-től.

→ a megismerési folyamatunk egy univerzális sémája.

paraméter: $\underline{a}$ $\overset{\text{par.}}{\underline{a}} \cdot \overset{\text{áp.}}{\underline{x}}$ -vel szembesülünk.

Regressziószámítás – függvények közelítésének problémája.



adott g, két független változóval
↓
van egy bemeneti változója, a másikat nem tudjuk megcsípni

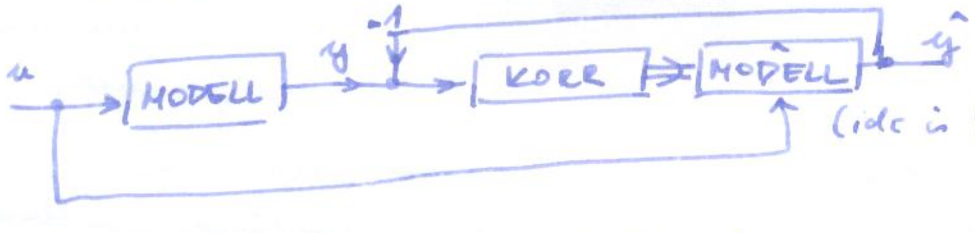
autonóm mechanizmus, ami perturbálja az eredményt.

Filozófiai kérdés: tudok-e bármit szeparálni?
→ nem választható le a környezetéből
→ a környezetből fakadó, nem kézbentartható hatás.

→ hozzuk g-t matematikailag kezelhető formára!
⇝ ismert struktúrájú, nem maradéktalanul rögzített paraméterű fgv. felállítása.

Korreláció helyett kritérium → ĝ szabadon hagyott paramétereit állítjuk úgy, hogy a hiba lehetőség szerint tűnjön el.
(kísérletileg hasonlít az előzőhöz)
↳ de! itt van „u" bemenet...

→ az előző modellt is perturbálhatják
→ ezután nincs értelme kül. a két gondolatmenet között.



(ide is be kell vezetni)

ŷ elképzelése lineáris függvényként (lineáris regresszió)

$\hat{y} = m \cdot u + b$ addig állítjuk, míg pontos nem lesz.

→ legjobb illesztés az m, b páros... → lehet négyzetes kritérium esetén

Technikai részletek

PÉCELI GÁBOR   peceli@mit.bme.hu   I épület 4. emelet (MIT)

BMEVIMIM108   3/0/0/f   félévközi jegy, 4 kredit

↳ 4 számonkérés kell minimum

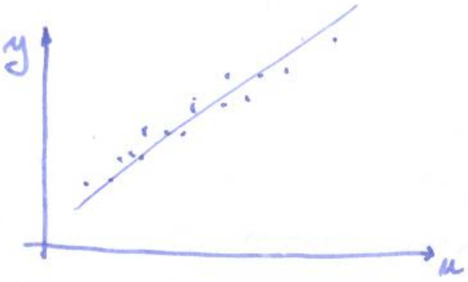
- ZH1   III. 25.
- ZH2   V. 13.
- HF1   II. 25 → III. 18.
- HF2   IV. 08 – IV. 29.

} mind szerdai napok.

pótlás: V. 20., szerda.

---

folytatás. (regressziószámítás)



→ a pontok ingadoznak: a függvénynek van nem kézbentartható bemenete (zaj)

→ a zaj nem biztos, hogy létezik; lehet rendszeren belüli zavaró hatás is

→ a valószínűségszámítás apparátusát vesszük igénybe.

E[u] → u várható értéke.

E[y] → „y" —„— —„—

a jelenségek megragadásának egy másik szintje

→ mi az, ami a bizonytalanságban megragadható?

Képzeljünk el egy valódi rendszert. → modell megadása.

modell → nemlinearitás (amit tapasztalunk, szintfüggő; nem konstans)
↳ egyelőre félretesszük

→ lineáris → vegyünk ilyen példát.

diszkrét állapotváltozós forma:

$\underline{x}(n)$ n indexű vizsgálati időpont, az ehhez tartozó adatsor

$\underline{x}(n+1)$ a következő adatsor.

$$\underline{x}(n+1) = A\,\underline{x}(n)$$

$$\underset{N}{[\ ]} = \underset{N\times N}{[\ \ ]}\ \underset{N}{[\ ]}$$

A: állapotátmeneti mátrix

egy autonóm rendszert írtunk fel.

→ van belül valamilyen energiája, ezek változnak (A) ha van perturbáció? → u

$$\underline{x}(n+1) = \boxed{A}\,\underline{x}(n)\left(+ B\,\underline{u}(n)\right)$$

→ ezt most figyelmen kívül hagyjuk.

$$N\updownarrow\left[\xleftrightarrow{M}\right]\left[\;\right]_M$$

↓

az érzékelő előállítja az y jelet

$$y(n) = \boxed{C}\cdot\underline{x}(n)$$

$$\left[\;\right]_N \left[\;\right]_N$$

y legyen skalár ⇒ skalársorozat.

ismert $\begin{cases} A: \text{mechanizmus, ahogy a fiz. törv. vált. az állapotot} \\ C: \end{cases}$

→ saját szg. program elkészítése:

$$\hat{x}(n+1) = A\cdot\hat{x}(n)$$

→ elvárjuk, hogy jól közelítse majd az x-et.

$$\hat{y}(n) = C\cdot\hat{x}(n)$$

de! a korrekciós modellt piszkáljuk, perturbáljuk! (mintha u lenne)

$$\hat{x}(n+1) = A\cdot\hat{x}(n) + \underset{[\;]_N}{G}\left[y(n) - \hat{y}(n)\right]$$

G: egy skalár értéket különféle súlyokkal az áp. változókhoz csatol.

hogyan közelítünk?

$$\boxed{x(n+1) - \hat{x}(n+1)} = A\left(x(n) - \hat{x}(n)\right) - GC\left(x(n) - \hat{x}(n)\right) =$$

$$= \boxed{[A - GC]}\left[\boxed{x(n) - \hat{x}(n)}\right]$$

ez olyan, mint az eredeti alaprendszer:

n. és (n+1). állapot között teremt kapcsolatot.

elvárás: az eltérés legyen kisebb. → mi kell ehhez?

„kontraktív", összehúzó tulajdonság.

$A^{\checkmark} - GC^{\checkmark}$ ⇝ ismertek, de mi konkrétan a korrekció?

⇒ keressük meg, állítsuk be azt a G vektort, ami a kontraktivitást bizt.

A−GC ⇝ lehet-e nulla? $\underbrace{A \overset{?}{=} GC}_{\text{mikor lehet?}}$

① $A\cdot C^{-1} = G$ ha van C-nek inverze (azaz négyzetes mátrix)

⇒ annyi érzékelő, ahány áp. változó.

⇝ akkor egy lépésben konvergál; beáll a valódi világba bezárt érték.

ha G négyzetes, akkor a paraméterek száma N×N

ha oszlopvektor, akkor csak N.

② $[A-\underset{?}{\boxed{G}}C]^N = 0$ mikor kapunk N-edik hatványt?

$$x(1)-\hat{x}(1) = [A-GC]\left[x(0)-\hat{x}(0)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$x(N)-\hat{x}(N) = [A-GC]^N[x(0)-\hat{x}(0)]$$

az N. lépésben eltűnhet a hiba!

N lépéses konvergencia lehetséges.

→ csupán mert ettől kell ezen állapot előrejelzéshez

⟹ G megválasztása így történjen.

abban az esetben, ha a rendszer memóriája véges

N+1 lépés után már nem emlékszünk rá...

→ az ilyen mátrixnak az összes sajátértéke 0. (állapotátmenet-mátrix)

→ pólusai az origóban, nevezője 1.

→ a számláló polinom a z tartományban véges sok késleltetést tartalmaz

NEMDEROGATÓRIUS NILPOTENS mátrix.

→ a méretének megfelelő fokszámra hatványozva nullát kapunk.

(DEROGATÓRIUS NILPOTENS mátrix
→ elfajult, ahol már ennél kisebb hatványon, hamarabb eljut)

hm... valójában a világ nem ideális

$$\underline{x}(n+1) = \ldots + \underline{ZAJ} \ldots$$

$$y(n) = \ldots + \underline{ZAJ} \ldots$$

ha mindkét helyen van zaj, akkor nincs baj. (?)

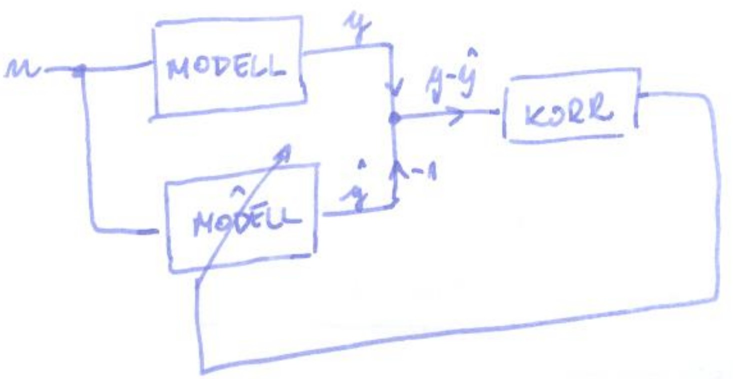
→ ha a sajátértékek nem nullák, még széles tartományban találunk kontraktivitást biztosító A-GC mátrixot.

→ nem az élt, hanem az energia mentén megyünk tovább

↳ végzetes!

Kópiagyártás

fizikai és számítási dobozok párhuzamosítása



Átlagolás

$y(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u(k)$

$$\underset{\substack{n \text{ darab} \\ \text{érték összege}}}{y(n)}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u(k) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}u(k)=n\cdot y(n)$$

$$y(n+1)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u(k)=\frac{1}{n+1}\left[n\,y(n)+u(n)\right]$$

→ Ált. az értékek időben egymás után állnak elő
→ használjuk fel a korábbi átlagot az új számításhoz

ha eggyel több adatot akarok átlagolni:

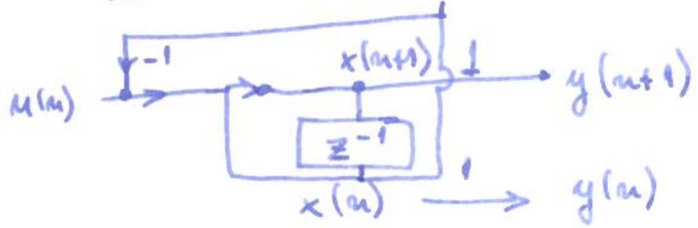
$$\boxed{y(n+1)=\frac{n+1-1}{n+1}\left(y(n)\right)+\frac{1}{n+1}\,u(n)} =$$

Rekurzív séma, rekurzív átlagolás

$$=\overset{A=1}{\downarrow}\;\underbrace{y(n)}_{\text{„régi érték"}}+\underbrace{\frac{1}{n+1}\left[u(n)-y(n)\right]}_{\text{„korrekció"}}$$

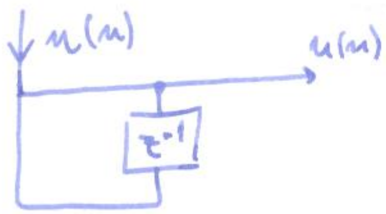
„új érték" = „régi érték" + „korrekció"

egy különbséggel módosítjuk az eredeti értéket!



a hiba vezérli a rendszert,
ez hozzá téve az állapotot,
ebből adódik ki az eredmény

stabil értéken tartás



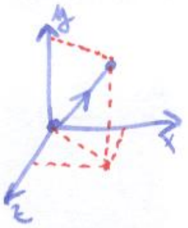
új állapot:

$$\boxed{\hat{x}(n+1) = \underline{A}\,\hat{x}(n) + GC\Big(\underbrace{x(n) - \hat{x}(n)}_{\text{"korrekció"}}\Big)}$$

"új érték" "régi érték"

<u>jelelmélet</u>: jelreprezentációk

- lineáris tér



[. . . . .] vagy $\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$

diszkrét értéksorozat

→ koordinátákkal jellemzett vektor

→ az irányok (x,y,z) speciális vektorok

⟹ koordináták x-re, y-ra, z-re nézve

(• ortogonális függvények ⇝ Fourier-sorfejtés.

→ egy adott frekvencia milyen súllyal szerepel)

→ a koordinátákat megmérve ilyen koordinátákkal történik

→ ez a jelnek egy modellje, mekkora x, y, és z.

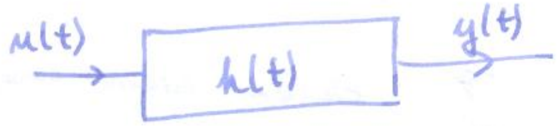
- x, y, z } ⟹ Fourier sorfejtés koncepciója

- koordináták számossága végtelen!

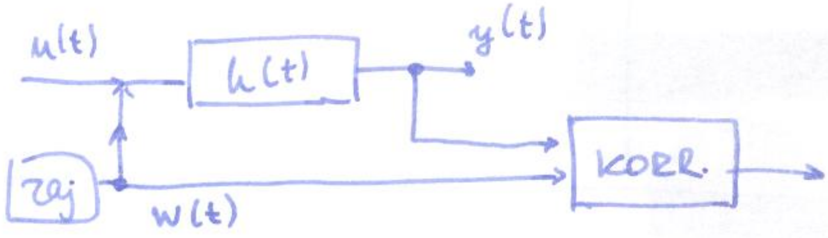
Konkrét mérési feladat.

Konkrét mérési feladat

- technológiai folyamat
- folytonos
- súlyfüggvény.



KORRELÁCIÓS MÉRÉSTECHNIKA → zajt szuperponálunk a bemenetre
→ mit csinál egy korrelátor?



hogyan korrelál?

$R_{uw}(\tau)=0$ Keresztkorrelációjuk nulla.

$$\underbrace{\begin{matrix} u(t_0) & u(t_1) & u(t_2) & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ w(t_0) & w(t_1) & w(t_2) & \\ + & - & + & \longrightarrow \end{matrix}}_{}$$

átlaga az idő folyamán nullát ad.

$$R_{yw}(t) = E\{y(t+\tau)\,w(t)\} = h(\tau)$$

$\sigma_w = 1$ a zaj szórása egységre normált.

→ a mérési eljárásokat teljes mértékben uralni tudjuk.
→ biztosítható, hogy egy zaj hatására perturbált rendszer is mérhető legyen.
(a másik módszerrel nem triviális)

korábbi: explicit, determinisztikus bemenet
most: véletlen, zajjel a bemenet (csillapodás)
→ elkerülhetetlen, ha a mérési feladat nem teszi lehetővé általunk választott bemenet alkalmazását.

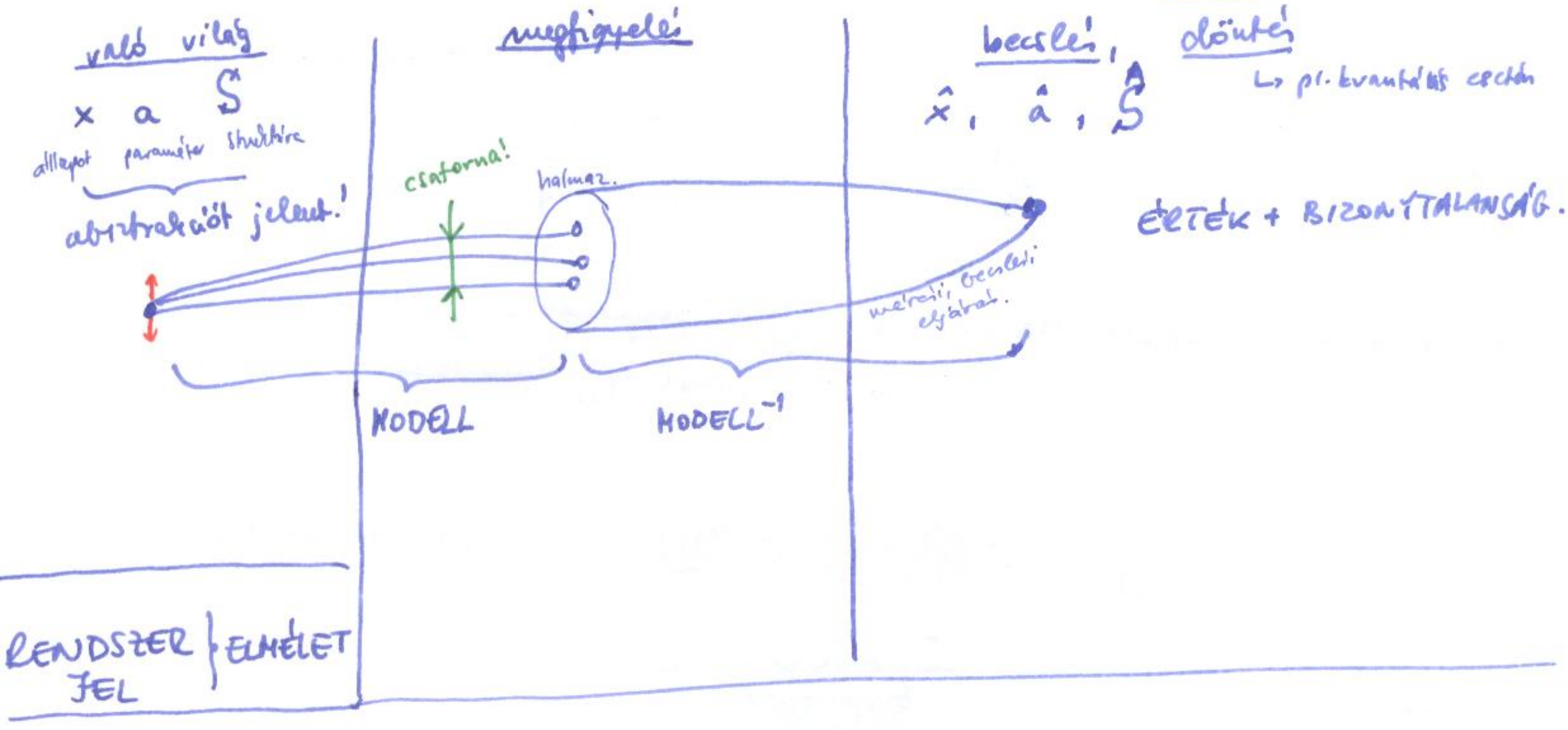
MÉRÉSELMÉLET: MÉRÉSI FELADATOK & JELFELDOLGOZÓ ELJÁRÁSAIT MUTATJA BE MODELL ALAPÚ MEGKÖZELÍTÉSSEL.

HÍRKÖZLÉSELMÉLET:

SZIMBÓLUMOK	csatorna VETT JEL	DEKÓDOLÁS
való világ	megfigyelés	döntés / becslés

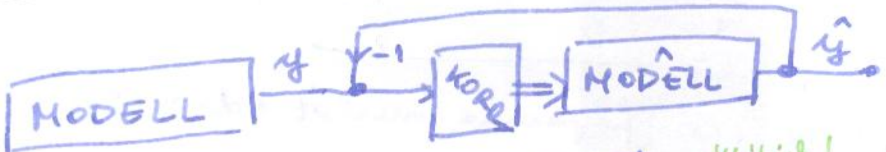
mesterségesen generált!

analóg ezzel.

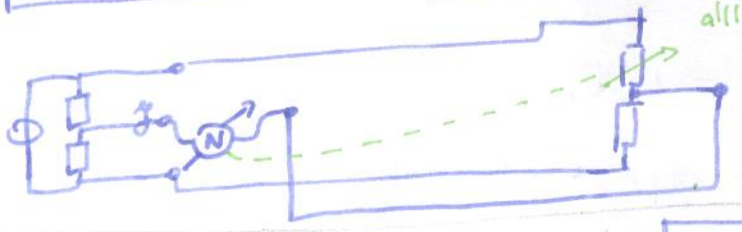


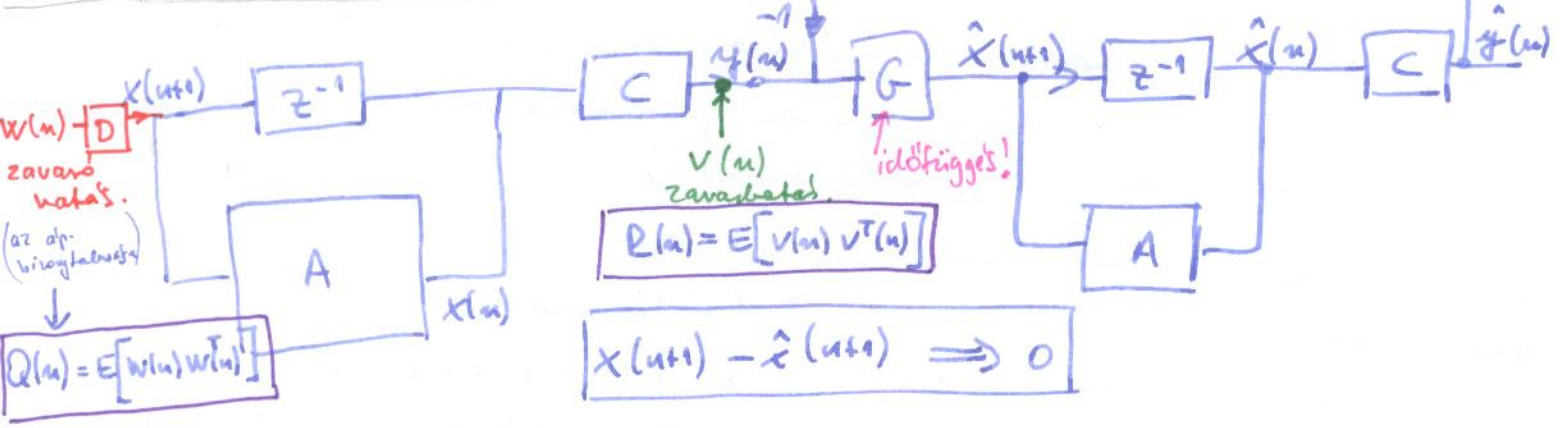
Mérési eljárás

mi van a doboz belsejében?
→ előállítjuk az inverzét
→ számítógépen becsüljük, előállítjuk, szimuláljuk.



pl.





hogyan ragadjuk meg azt, hogy a megfigyelendő dolog bizonytalan?
→ a rajzon feltüntetjük, h. az állapotot vmi „cibálja”
→ pontosan nem ismerjük, mi ... → sztochasztikus (véletlen) jelmodell.
mi történik a csatornában? → zavarhatás befolyásol!
az eddigi elgondolások a cibálások miatt illuzórikusak!

Kálmán prediktor
RUDOLF KALMAN

KALMAN-prediktor → nagy előrelépés a méréstechnikában
~1960
→ a bizonytalansággal terhelt mérések folyamatos kiértékelése lehetővé vált – fontos és izgalmas terület

→ a zajzavaró hatások nagysága időfüggő is lehet
→ a korrekciós mechanizmus is időfüggő, és TANULÓ folyamat eredményeként áll elő

$$x(n+1) - \hat{x}(n+1) \Rightarrow 0$$

$$\boxed{P(n+1) = E\left\{\left(x(n+1) - \hat{x}(n+1)\right) \cdot \left(x(n+1) - \hat{x}(n+1)\right)^T\right\}}$$

$$Q(n) = E\left[W(n)\ W^T(n)\right]$$

$$R(n) = E\left[v(n)\ v^T(n)\right]$$

$$G \longrightarrow \boxed{G(n) = A\ P(n)\ C^T \overbrace{\left[C\ P(n)\ C^T + R(n)\right]}^{\text{„nevező"}}{}^{-1}}$$

↳ ha $R(n)=0 \Rightarrow G = \frac{A}{C}$ lenne; hasonló!

↳ ha a csatornazaj nagy, akkor a nevező nagy → G kicsi

cél: a beavatkozás, módosítás legyen óvatos.

ha már megbízhatóbb a mért adat, G növekedhet

$$\boxed{P(n+1) = \left(A - G(n)C\right) P(n) \left(A - G(n)C\right)^T + G(n)\, R(n)\, G^T(n) + D}$$ [illegible] $Q(n)\, D^T$ [illegible]

cél: a hiba a következő lépésre legyen kisebb.
→ végzetes hatás!

---

1. Rekurzív állapotbecslés ⇒ „modell-alapú" világ   múltkor + ma
2. Modellezés, regressziós séma ⇒ modell-alapú ⇒ illesztés
   néhány óra múlva
3. Adatfeldolgozás / Jelfeldolgozás ⇒ "blokkos" feldolgozás ⇒ rekurzív adatfeldolg.
4. Korrelációs méréstechnika → erről nem beszéltünk a múltkor
   ↳ mit lehet csinálni olyan esetben, mikor a megfigyelendő dolog egy működő folyamat (technológiai berendezés), melynek kölcsönhatásai kötött pályán mozognak
   → úgy kell történnie, hogy zavartalanul működni tudjon!!! (ne térítsük el)

JELEK REPREZENTÁCIÓJA

hogyan ragadjuk meg a jeleket (matematikailag)?

→ a való világ történései objektumok (stabil pontok) kölcsönhatásaiként foghatók le.

↳ rendszer ↵

→ diszkrét vagy folytonos időtengely mentén változó értékek.

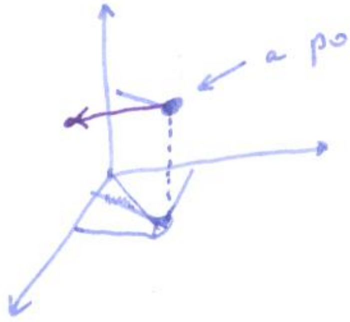
→ a rendszerből leszármaztatható az intenzitásviszony (jel)

a jelek alapján reprezentálható visszaállítható a rendszer.

pl. → rendszerparamétereket tudunk rögzíteni; jelet nem..

matematikai háttér: JELTEREK (Euklideszi-tér általánosításai)

→ geometriai leírás.



← a pont egy jelet reprezentál.

mi két pont távolságának a tartalma?

korábban: $\underbrace{x(n+1) - \hat{x}(n+1)} \rightarrow 0$

két pont a jeltérben (diszkrét jel) legyen minél közelebb egymáshoz, legjobb esetben azonos.

TÁVOLSÁG → METRIKUS

ha a metrikus térben fennállnak az $\underbrace{\text{ALGEBRAI MŰVELETEK és a LINEARITÁS}}_{\text{LINEÁRIS TÉR}}$

→ három szintet fogunk használni.

① LINEÁRIS VEKTORTÉR → kitüntetett tulajdonságú vektorokat alkalmaz

→ pl. koordináta vektorok → pont megadása

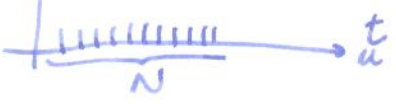
BÁZIS → bázisvektorok, alapvektorok

$$\varphi_n \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \varphi_n$$

pl. α_n, koordináták.

jelek esetén: N db, időben egymás után összegyűjtött érték



α_n meghatározásához szükséges: vektorok skalárszorzata

SKALÁR SZORZAT

$$\underbrace{\underline{a}, \underline{b}}_{\text{mindkettő N dimenziós}} \Rightarrow (a, b) = a^T b = b^T a$$

α_m meghatározása:

$$\underbrace{(x, \varphi_n)}_{\text{skalárszorzat a báziselemmel}} = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m (\varphi_m, \varphi_n) \qquad n = 0, 1, \dots, N-1$$

→ RECIPROK BÁZISRENDSZER bevezetése → leegyszerűsödik

Θ_m $\quad m = 0, 1, \dots, N-1$

$$(\varphi_m \, \Theta_n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = n \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = n \\ 0, & \text{ha } m \neq n \end{cases}$$

másik jelölés.

$$(x, \Theta_n) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_m (\varphi_m, \Theta_n)}_{\text{csak akkor nem 0, ha } m=n} \implies \boxed{\alpha_m = (x, \Theta_m)}$$

$$\boxed{x = \sum_{m=0}^{N-1} (x, \Theta_m) \cdot \varphi_m = \sum_{m=0}^{N-1} (x, \varphi_m) \Theta_m}$$

② LINEÁRIS TÉR

a bázis nem véges, hanem végtelen dimenziójú!

$\varphi_m \to \varphi_m(t)$ folytonos időfüggvény jelenik meg

$\Theta_m(t)$ a reciprok bázis, ugyancsak időfgv.

$$\boxed{x(t) = \sum_{\substack{m=0 \\ (-\infty)}}^{\infty} \alpha_m \varphi_m(t)} \; ; \quad \boxed{\alpha_m = \left(x(t) ; \Theta_m(t)\right)}$$

Fourier-sorfejtés: $\varphi_m(t) = e^{j 2\pi m t}$

$\Theta_m(t) = e^{-j 2\pi m t}$

skalárszorzathoz az együtthatók kelleni fognak (az integrálból)

cél: komplexitás redukálása, csökkentése

$$\hat{x}(t) = \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1}}_{\text{véges!!!}} \alpha_m \varphi_m(t)$$

egy végtelen dimenziós vektort véges számú paraméterrel definiálunk
↓
adatredukciós feladat
(általános)

a becslés egy korlátozott befektetési „igényű" mérési eljárás voltaképp.

milyen legyen a bázisrendszer? → Fourier!

mi az a módszer, ami összeköti $x - \hat{x}$ minimalizálását és egy rögzített N-t?

$$(a,b) = \underbrace{a^Tb}_{} = b^Ta$$

$$\int_T x(t)\, e^{-j2\pi m t}\, dt$$ → a skalárszorzat számítása itt.

③ INTEGRÁLTRANSZFORMÁCIÓ

nem csak a vektordimenziót, hanem a diszkrét helyére is folytonost teszünk

$m \rightarrow s$

$$x(t) = \int_S \underset{\sim}{\alpha(s)}\ \underbrace{\varphi(t,s)}_{\substack{\text{kétváltozós}\\ \text{bázisfüggvény}\\ \text{(magfüggvény)}}}\ ds$$

INTEGRÁLTRANSZFORMÁCIÓ

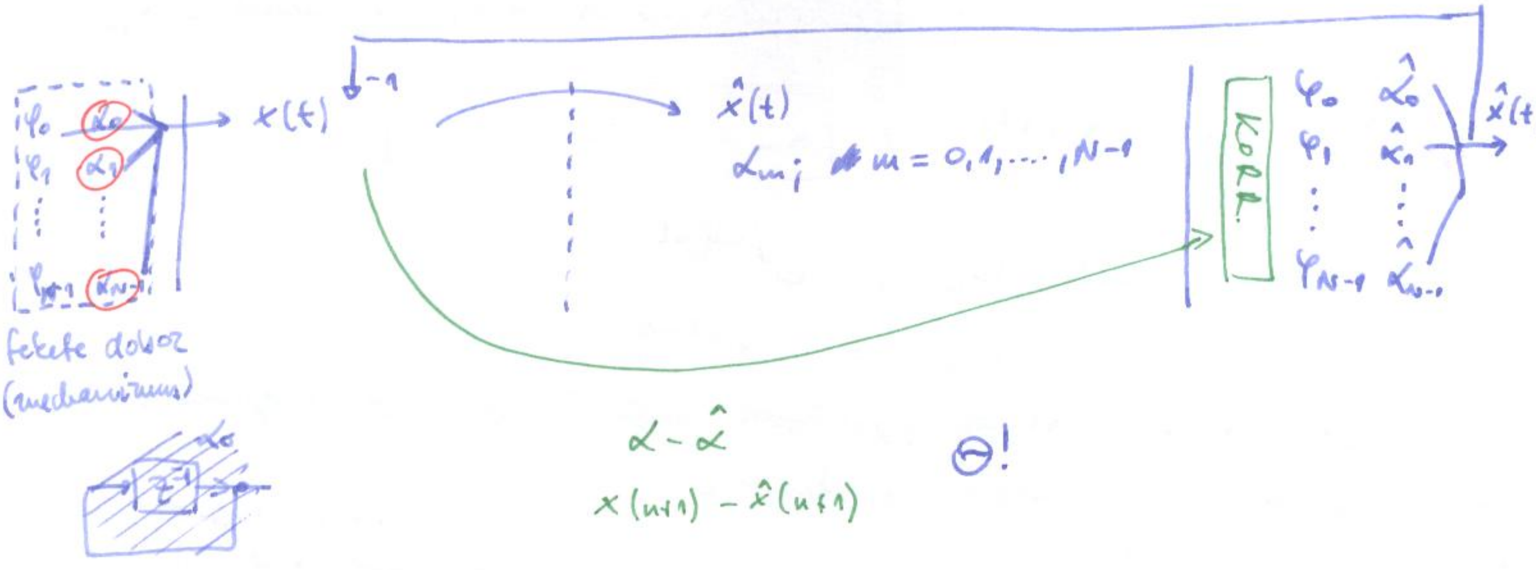
a Σ helyébe $\int$ került, m helyébe pedig s

$$\alpha(s) = \int_T x(t)\, \Theta(t,s)\, dt$$ $x(t)$ integráltranszformáltja.

Fourier világban: $\varphi(t,s) = e^{j2\pi st} = \frac{1}{\Theta(t,s)}$; $\Theta(t,s) = e^{-j2\pi st}$

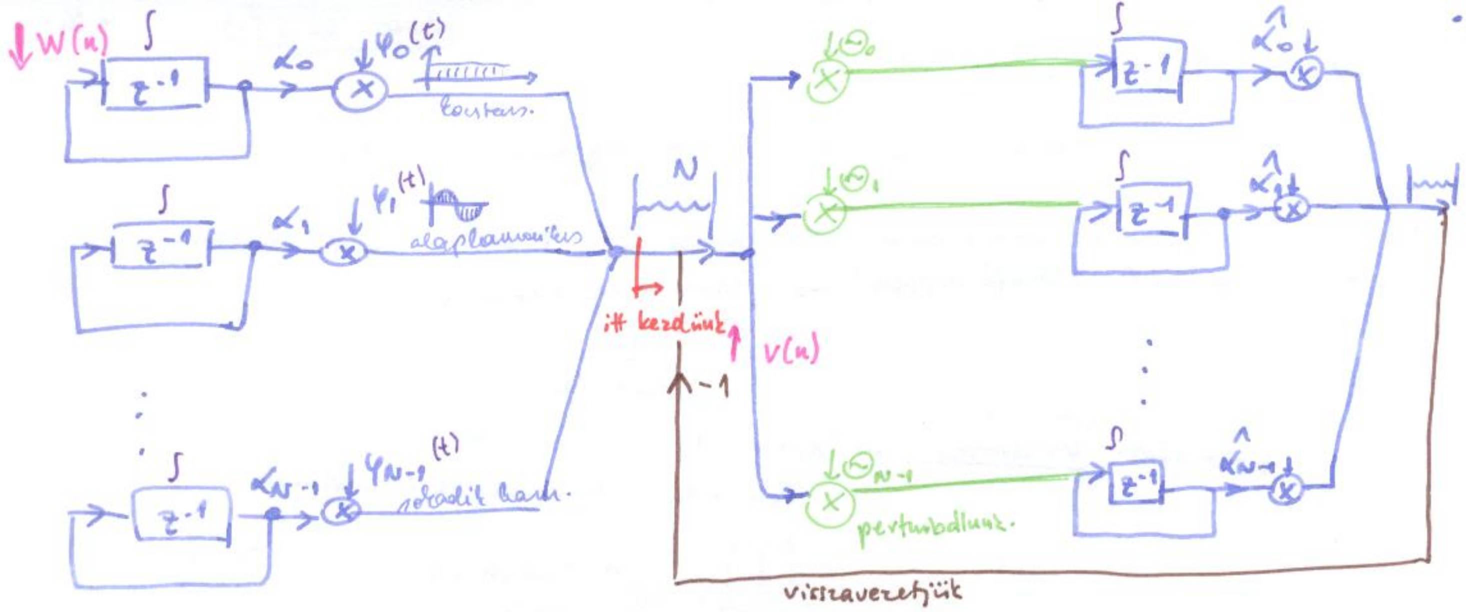
integráltranszformációkkal nem fogunk foglalkozni.

$\boxed{\Sigma}$: koncepcióban igen hasonló dolgokról van szó



hogyan lehet modellezni ezt egy iteratív eljárással?

- kell egy szerkezet a konstansok rögzítésére (memóriaelem)
  ⇝ állapotváltozó értéket tárol; lépésről lépésre.



(konstans, ugyanazt tartja)

ez a fekete dobozban van.

ha a jel nem periodikus, α másként

Megjegyzés (két fontos vonatkozás):

1.) a háromféle jelreprezentációs technikából az első hasonlít; (N)
a jel folyamatosan hömpölyög befelé
ez egyfajta csúszóablakos megoldást jelent
→ a séma a tetszés esetre is megállapítható.

2.) a jelfeldolgozás ezen megközelítése: prekoncepció alapján
várjuk a feldolgozandó jel feldolgozásra
egy előképzelési vázlata.
→ ezt a KALMAN-prediktor kapcsán is elmondtuk
a jel dominánsan az ismeretek alapján jön létre;
de! itt is lehet zavarás, zaj
⇒ a korrekcióban elindulhatunk hasonló irányban

3.) a komplex exponenciális bontás. → komplex keverésként értelmezhető
konstant felkeverek és összeadom
↳ összevetem
↳ lekeverem a megfelelő frekvenciáról

(2009. 02. 25.)

Jelek mérése, jelek reprezentációja

jel: időtengely mentén értelmezhető értéksorozat (folytonos / diszkrét)

hogyan rendszerezhetőek az adatok úgy, hogy a lehető legjobban felhasználható legyen? -> jelek reprezentációja

⇓

JELTÉR.

sorozatok: (lineáris) vektortér -> diszkrét értéksorozat.

báziselemekkel reprezentáljuk

↑↑↑ $x = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \varphi_m$; $\{\alpha_m\}$

$m = 0, 1, \dots, N-1$

az időben diszkrét eset dolgait részletezzük

lineáris tér -> folytonos függvény (végtelen sok elem)

$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cdot \varphi_m(t)$ $\{\alpha_m\}$

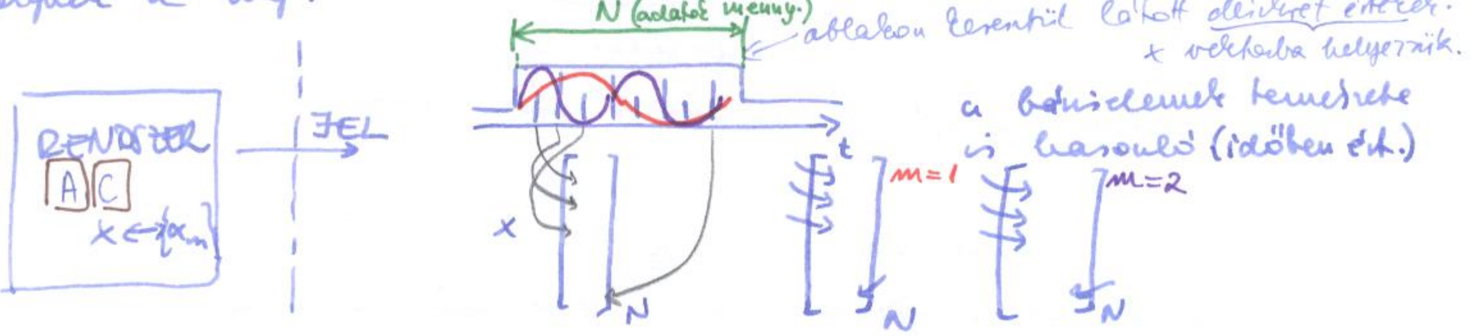
$m = 0, 1, \dots$

-> véges számú tényezővel reprezentáljuk (Fourier)

(integráltranszformáció -> folytonos koordináták)

Mi lenne, ha a jel reprezentáció előzetes feltételezésével úgy képzelnénk el a jelet, mint egy reprezentációt előállítani képes rendszer kimenetét? Milyen véges számú súlytényezővel lehet ezt jellemezni?

Feltételezzük, hogy a jel, amit mérünk, egy rep. báziselemek segítségével áll elő. Ebben a rendszerben keresem azokat a megragadható paramétereket, melyeknek a megismerése a cél. (α_m meghatározására utazunk!)



ablakon keresztül látott diszkrét értékek. + vektorba helyezzük.

a báziselemek természete is hasonló (időben ért.)

milyen súllyal van szerepe a bázisoknak x kialakításában?

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x \\ \end{bmatrix} = \alpha_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_0 \\ \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1 \\ \end{bmatrix} + \dots + \alpha_{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_{n-1} \\ \end{bmatrix} \Big\} \text{idő!}$$

$$x(n) = \alpha_0 \varphi_0(n) + \alpha_1 \varphi_1(n) + \dots + \alpha_{N-1} \varphi_{N-1}(n)$$

↳ egy időponthoz tartozó érték megadása

$n = 0, 1, \dots, N-1, N, N+1, \dots$

Mi történik, ha az időablak csúszik előre? CSÚSZÓABLAKOS JELF.

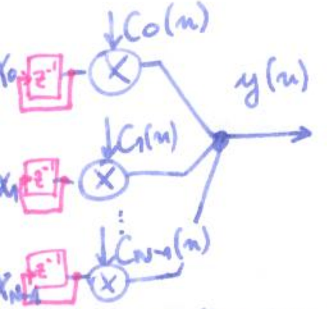
$\boxed{N \text{ minta} \to N \text{ érték}}$ (egyértelmű hozzárendelés)

csúszó megoldással történő továbbléptetés esetén 2 dolog vetődik fel:

- → a bázisok az idővel együtt csúsznak; az ablak elejéhez visz. értelmezzük.
- → vagy az ablak csúszik, de a bázisok a helyükön maradnak.
  - ⇝ az adott szinuszhoz viszonyítva hogyan viselkedik a jelünk?

Hogyan néz ki az a rendszer, ami a jelünk előállítására képes?

A és C.

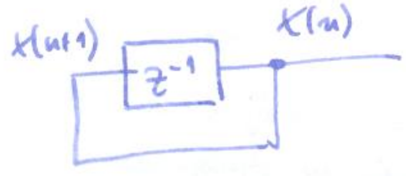


minden ágat figyelembe véve kirajzolódik az N elemű vektor

- $y(n)$ sajátossága, hogy időpillanatról időpillanatra jelkomponensekből tevődik össze (szinuszok)
- a kicsatolás: kell hogy legyen (n) indexe → nem konstanssal szorzunk (csak adott időpillanatban konstans), de minden pillanatra más és más.
- $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ még per pillanat ismeretlen

hogyan legyen a memóriaelem? (egységnyi késleltető)

hogyan jut tartalomhoz? → pl. diffegy. megoldásánál kezdeti érték; valaki egyszer beletette és azóta tartja ezeket.

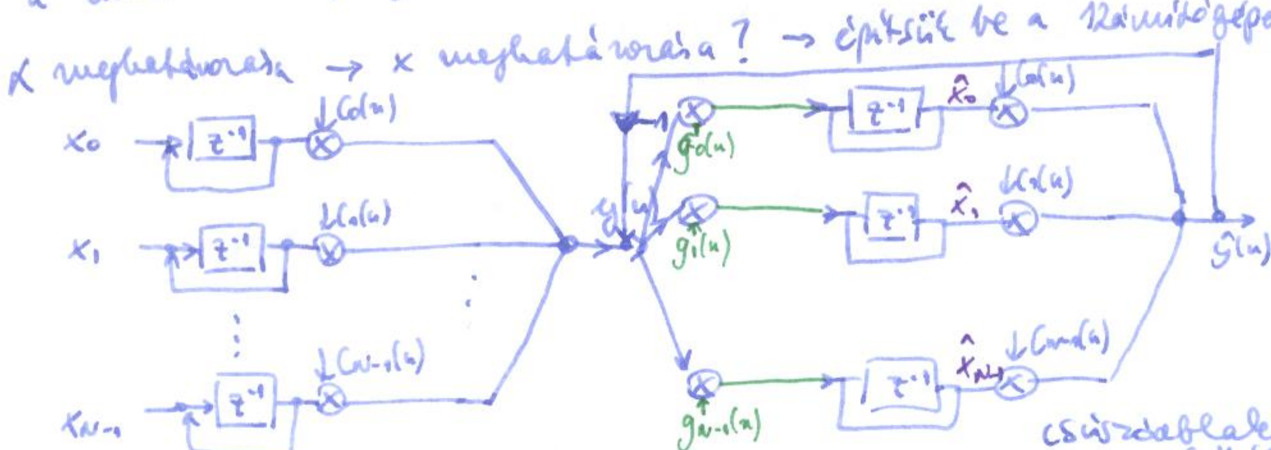


- az állapotátmeneti mátrixot (A) itt az identitás mátrix valósítja meg

$$\text{"}A\text{"} \to I$$

a kicsatolóvektor pedig időtől függ!

x meghatározása → x meghatározása? → építsük be a számítógépes programba!



$A - GC$

$\Downarrow$

$A - G(n)C(n)$

↑

a reciprok bázisok adják meg

csúszóablakos repr. előállítása!

→ a reciprok bázisrészlet írandó $g_0(n), g_1(n), \dots g_{N-1}(n)$ helyébe? Bizonyítsuk!

$$\begin{tikzcd} A - \overset{[\,]}{G(n)} \cdot \overset{[\quad]}{C(n)} \\ I - g(n) \cdot c^T(n) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{g(n) = \begin{bmatrix} g_0(n) \\ g_1(n) \\ \vdots \\ g_{N-1}(n) \end{bmatrix} ; \quad C(n) = \begin{bmatrix} c_0(n) \\ c_1(n) \\ \vdots \\ c_{N-1}(n) \end{bmatrix}}_{\text{definiáljuk őket így.}}$$

→ vizsgáljuk az $\hat{x}$-k és x-k eltérését!

$$x(n+1) - \hat{x}(n+1) = [A - GC]\,[x(n) - \hat{x}(n)]$$
$$[A - GC]^{n+1}[x(0) - \hat{x}(0)]$$

a hatványok helyett különböző indexeket alkalmazunk.

$$\boxed{x(n+1) - \hat{x}(n+1) = \prod_{i=0}^{n} \left(I - g(i)\,c^T(i)\right) \underbrace{(x(0) - \hat{x}(0))}_{\substack{\text{kezdetben fennálló hiba} \\ \to \text{a memóriatartalmak közt. eltérés}}}}$$

biz: mit csinál a produktum, ha megteszünk N lépést?

$\underbrace{N \text{ lépés}}$: N érték meghatározása $= N$ minta.

a hiba eltűnését várjuk!

$$\prod_{i=0}^{N-1} \left(I - g(i) \cdot c^T(i)\right) = 0$$

tipikus elemek a produktum kiszámítása során:

- lesz egy egységmátrix $g(i)\,c^T(i)$-t szorozzuk I-vel.
- lesz olyan, hogy $\sum_{i=0}^{N-1} g(i)\,c^T(i) = I \Rightarrow$ a negatív előjel miatt kiejtődik az egységmátrix.
- több $g(i) \cdot c^T(i)$ összeszorozva

$$g(i)\boxed{c^T(i) \cdot g(j)}\,c^T(j) \qquad i \neq j$$

különböző index $\Rightarrow 0$

$\Rightarrow$ az összes ilyen tényező 0!

$$\prod_{i=0}^{N-1} \left(I - g(i)\,c^T(i)\right) = I - \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} g(i)\,c^T(i)}_{I} = \underline{\underline{0}} \;\downarrow$$

bizonyítás kész

A fenti rész egy N mintát lépő ablakhoz rendelt reprezentáció.

Fourier esetben harmonikusok vannak jelen.

Az a bázis – rec. bázis rendszer, amit ilyenkor használunk, a diszkrét Fourier-sorfejtésből adódnak.

$$C_m(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}m\cdot n} \quad \text{(bázis)}$$

$$g_m(n) = \frac{1}{N}e^{-j\frac{2\pi}{N}m\cdot n} \quad \text{(reciprok bázis)}$$

→ fejtsük ki egy konkrét esetre.

$$\frac{1}{N}\left[e^{-j\frac{2\pi}{N}m\cdot 0} \quad e^{-j\frac{2\pi}{N}m\cdot 1} \quad e^{-j\frac{2\pi}{N}m\cdot 2} \quad \dots \quad e^{-j\frac{2\pi}{N}m(N-1)}\right]\begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{N}\overset{k}{\cancel{m}}0} \\ e^{j\frac{2\pi}{N}\overset{k}{\cancel{m}}1} \\ e^{j\frac{2\pi}{N}\overset{k}{\cancel{m}}2} \\ \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{N}\overset{k}{\cancel{m}}(N-1)} \end{bmatrix} =$$

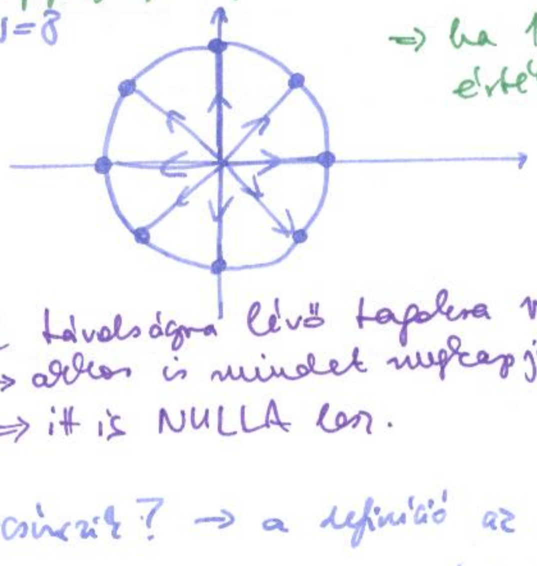
$$= \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=0}^{N-1} 1 = \underline{\underline{1}}$$

és ha nem azonosak az indexek? → k

$$= \frac{1}{N}\left[1 + e^{j\frac{2\pi}{N}\underbrace{(k-m)}_{1\ell}} + e^{j\frac{2\pi}{N}2\underbrace{(k-m)}_{1\ell}} + \dots + e^{j\frac{2\pi}{N}\underbrace{(k-m)}_{1\ell}(N-1)}\right]$$

ha szomszédos tagokra vesszük
→ egyenletesen szépen körön megjelenő exponenciálisok sorozata

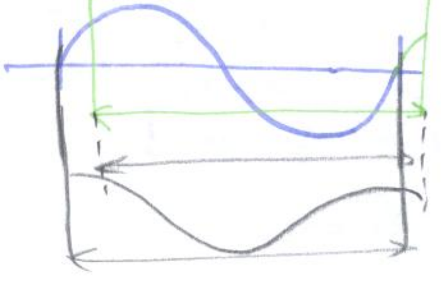
pl. N=8



⇒ ha 1 az eltérés, a sorozat értéke NULLA, kiejtik egymást.

ha ℓ távolságra lévő tagokra vesszük
→ akkor is mindet megkapjuk egyszer, csak más sorrendben
⇒ itt is NULLA lesz.

És ha az ablak továbbcsúszik? → a definíció az előző kör volt..

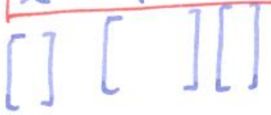


→ újakat hozunk be, a régieket pedig elhagyjuk
→ ez sorrendváltozást jelent.
→ ha az ablakra nézve periodikus jel, ugyanazt fogja adni!

Mit jelent ez?

egy u sorozatból egy T trafó segítségével állítunk elő x-et.

$$\boxed{x = T\ u}$$



$$\overset{[x\ \text{elemek}]}{x^T} \underbrace{\overset{\text{báziselemek}}{\begin{bmatrix} C_0(0) & C_0(1) \ldots & C_0(N-1) \\ C_1(0) & C_1(1) \ldots & C_1(N-1) \\ & \vdots & \\ C_{N-1}(0) & \ldots & C_{N-1}(N-1) \end{bmatrix}}}_{U^T} \underbrace{\overset{\text{reciprok báziselemek}}{\begin{bmatrix} g_0(0) & \ldots & g_{N-1}(0) \\ g_0(1) & \ldots & g_{N-1}(1) \\ & & \vdots \\ g_0(N-1) & \ldots & g_{N-1}(N-1) \end{bmatrix}}}_{T^T} = x^T$$

Az x elemeket megszorozzuk az összes c értékkel a 0, 1, N-1 időpillanatban. Ezen klasszikus összefüggéssel teremtünk kapcsolatot.

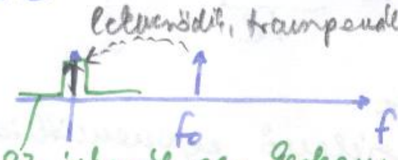
Mit jelent az, ha egy folytonos x(t) jelet megszorzunk a „reciprok bázissal", majd int.?

$$X(f_0) = \int x(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t}\, dt$$

→ ez egy komplex keverés, melynek eredménye egy olyan jel, ami az f frekvencián jellemez
(f legyen konkrét)

Vizsgálódjunk.

① $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t$ ⇒ ha betesszük az integrálba, 1-et kapunk.



az integrál egy keskeny aluláteresztő szűrő

⇒ megkapjuk az f_0 komponens amplitúdóját

⇒ ezzel a technikával le tudjuk választani és jellemezni egy komponenst.

diszkrét világban:

$$X(m) = \sum x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N} mn}$$

→ frekvenciatartományban értelmezett jellemző.

az m. frekvenciapozíció a nulla környékére transzponálódik, majd leválasztjuk.

Esetünkben: egy konstans értékkel meghatározzuk egy adott komponens frekvenciáját; egy jelgenerátor előállítja a komponenst, amiből „[illegible]" veszünk igénybe!
(17. oldal alja)

$$\boxed{\text{FREKVENCIA TRANSZPOZÍCIÓ}}$$ (keverés)

Visszafelé a hibakomponenst tartalmazó hibajelet visszavez. az előző kimenetére, majd ezzel befolyásoljuk azt a memóriaelemet, ami az $\hat{x}$ értéket adja meg.

Tetszőleges bázis/rec. bázis választással hasonló manővernek vagyunk tanúi, ha 0 ⟷ adott frekvencia között transzponálunk.

Hagyományos értelemben ez csak Fourier, de belátható, hogy más bázis és reciprok bázis esetén is működik.

A jel egy jelgenerátor eredménye → standard elemek bázis } komponálás.
↳ paraméterek
↓
a rendszer belsejében levő érték jelleggel vannak jelen → egy kiolvasó eszközre van szükség.

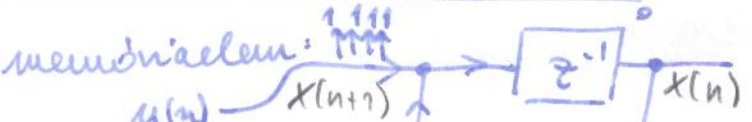
A bázis és reciprok bázis komponenseknél ugyanúgy a szabadságunk, akár alkalmazásfüggő módon határozhatók meg. Fontos az adatredukció igénye. (pl. EKG)

↳ az összetevő alap hullámokból melyikből mennyi van?
normális, kóros időfgv.?
↓
milyen mérve, merre van a normálistól?

Hatékony adatredukció: a jellegzetes vonások egy megfelelő bázis segítségével megragadhatóak.

Mi egyelőre maradunk a Fourier-nál.

Az $\int$ és a Σ mechanizmusa.



ha a bejövő oldalra 1-et teszünk, (folyamatosan), de benn 0-volt.
⇒ 0 → 1 → 2 → 3 ...
⇒ összegző gép;
DISZKRÉT INTEGRÁTOR.

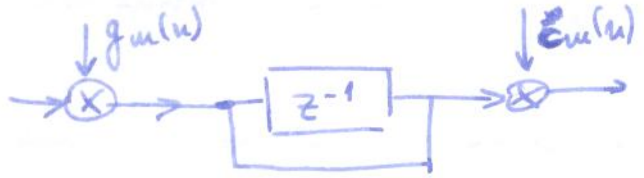
$$x(n+1) = x(n) + u(n)$$
↓
$$zX(z) = X(z) + U(z)$$

mintavét. sorozat összegképlete?

$$\frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{z-1} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \underbrace{1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\dots}_{\text{minták összegzése sorban.}}$$

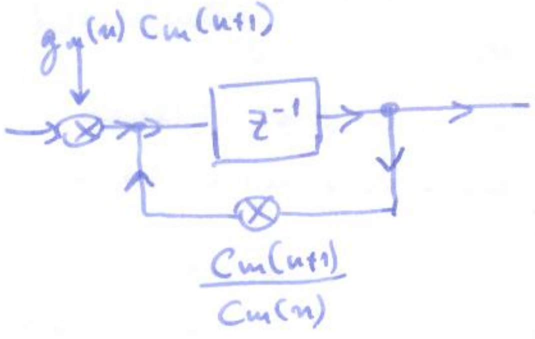
realizációnál elkerülhetetlen a késleltetés!

Keverés és diszkrét integrálás



N lépésben 0 lehet eredményez

Játsszunk a szorzó egységekkel. → $c_m(n)$ legyen mögött!
→ csak előbbre hozhatjuk
→ de ott késleltetés van!
→ eggyel előbbi mintát vegyük!
→ vonjuk össze!
⇓
mit igényel ez a visszacsatoló ágban? → szorzót.



Fourier esetben:

$$c_m(n) = e^{j\frac{2\pi}{N} m n}$$

$$g_m(n) = \frac{1}{N} e^{-j\frac{2\pi}{N} m n}$$

$$g_m(n) \cdot c_m(n+1) = \frac{1}{N} e^{-j\,2\pi/N\, m \cdot n} \cdot e^{j\,2\pi/N\, m\,(n+1)} = \frac{1}{N} \boxed{e^{j\frac{2\pi}{N} m}}$$

elveszett az n.

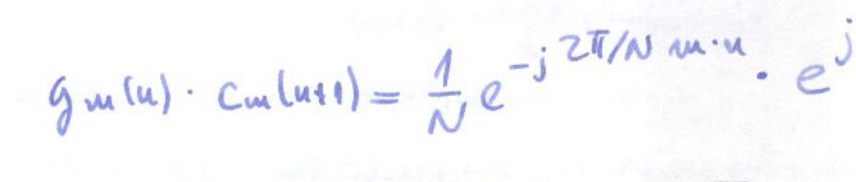
$$\frac{c_m(n+1)}{c_m(n)} = \frac{e^{j\,2\pi/N\, m(n+1)}}{e^{j\,2\pi/N\, m\, n}} = \boxed{e^{j\frac{2\pi}{N} m}}$$

itt is elveszett az n.

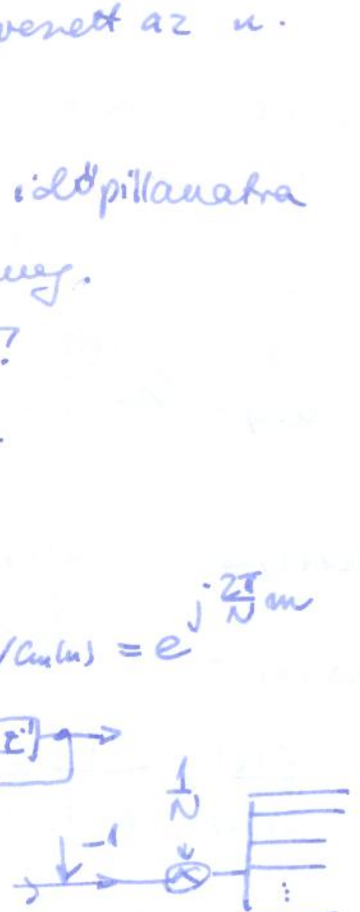
→ megszűnik az az állapot, hogy időpillanatról időpillanatra mást kelljen betenni, egy konstans jelenik meg.

Miért szorzunk két helyen $e^{j\,2\pi/N\, m}$-mel?

→ tuszkoljuk be az összegzőpont mögé a szorzót.



$$c_m(n+1)/c_m(n) = e^{j\frac{2\pi}{N} m}$$



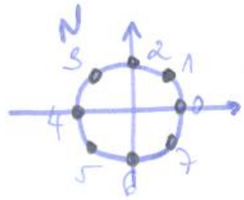
$\frac{1}{N}$ az összes ágon egyben kivehető előre.

A csatornából a jelkomponens súlyozott értékeit kapjuk, tehát ez egy másfajta eszköz. Ahol a sin és a cos 1 amplitúdójú, a tényleges amplitúdót leolvasva megkapható a tényező.

Ahogy az ablak folyamatosan csúszik előre, folyamatosan kiolvasható.

Mit is csinál pontosan az új rajzocska?

→ egy ugyanolyan diszkrét integrátor, de szerepel benne egy komplex számmal való szorzás.
↳ ez az egységgyökök egyike!



$\rightsquigarrow e^{j\frac{2\pi}{N}m}$ $m=0,1,\ldots,\overset{7.}{\widetilde{N-1}}$

↳ az egységgyököt így jelöljük.
→ hossza 1., fázisa m-től függ.

rövidített írásmód (pozíció az egységsugarú körön)

$e^{j\frac{2\pi}{N}m} = z_m$ (ha N-t ismerjük)

$$\frac{1}{1-z_m z^{-1}} \ldots \frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}} = z_m z^{-1}\left(1+z_m z^{-1}+(z_m\cdot z^{-1})^2+(z_m z^{-1})^3+\ldots\right)$$

ami itt működik, az egy olyan eszköz, ami a belsejében lévő értéket az m. frekvenciára transzponálja, majd előállít egy szinuszt és koszinuszt (komplex formában) (?)

egy „jelgenerátor-készlet" → OSZCILLATOROKON ALAPSZIK!

azt, hogy az egyes komponensek mennyire vesznek részt, a kezdeti értékek határozzák meg

Fontos üzenet: a tologatással megszabadulunk az n-től, de ezt csak a komplex exponenciálisoknál tudjuk előadni

oka: az ilyen rendszerek alapfüggvényei ezek.
(pl. kondi is csak exp. fgv. szerint sül ki)

(oszcillátor alapú jelmodell! ezeket kényszerítjük!)

Hf. kiírás a honlapon megtalálható. (2009. 03. 04.)

↳ jelek vektortérbeli reprezentációja; csúszóablak.

Adott egy vektor: $u = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{matrix}$ időben értelmezett értéksorelemek, diszkrét időfgv.

↓

előállítjuk ennek a jeltérbeli reprezentációját

tényezők ⟩ $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$

ennél vettünk egy generátort, ami az u-kat meghatározza.

mátrixosan: $\boxed{x = T\cdot u}$; ha u diszkrét jel, akkor x ennek egy valamilyen koordináta rendszerbeli reprezentációja (ezt a koord. r.-t T adja meg)

most:

u(0), u(1), ...
(→ idővel mindet megkapjuk)

generátor kép.: belső sajátosságok és x hozzárendelési módja
→ sok kis egység; egy-egy bázisfgv.
→ ezek lineáris kombinációját képezzük
→ „jelkomponáló" → fix bázisvektorok
→ súlyozó faktorok készlete.

ebben az esetben: T transzformáció ismeretében keresem, mi lehetett a súlyfaktor.

$u = \begin{bmatrix} \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \end{bmatrix}$

↑ bázisvektorok mátrixa (a bázisvektorok LEFELÉ vannak)

$x = T\cdot u$

$T^{-1}x = T^{-1}T u = u$

bázisvekt. $T^{-1} = \begin{bmatrix} \downarrow\downarrow\downarrow \cdots \downarrow \end{bmatrix}$ 0. 1. ... n.

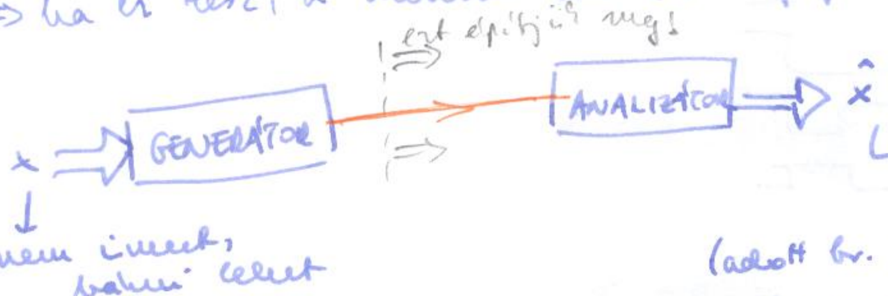
reciprok bázisrendsz. $T = \begin{bmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \end{bmatrix}$

$TT^{-1} = \begin{bmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \downarrow\downarrow\downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$ egységmátrixot adnak!

HF: Fourier-típusú bázisrendszert generálni
→ van olyan báziselem, ami DC komponens 0
→ van koszinuszos alapváltozat 1. 3. 5. ...
→ van szinuszos változat 2. 4. ...

→ a reciprok br. megállapítása a mátrixinverzió!

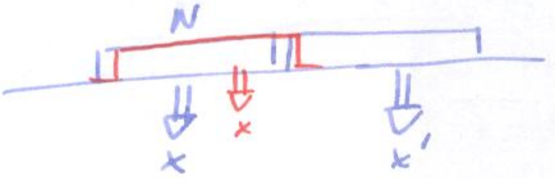
Továbbá: mit eredményez egy báziselem ereje?
⇒ ha ez kész, a modellt kell (*) megépíteni.



↳ becslő: súlytényezők meghatározása.
(adott br. mellett milyen súlytényezőkkel áll. a jel előállítója?)

cél: a kifolyó jel minél kevesebb adattal jellemezhető legyen!
(generátorból)

MEGFIGYELŐ SÉMA
REKURZÍV TRANSZFORMÁCIÓ.:
hagyományos elv: valahány (N) minta, adatblokk

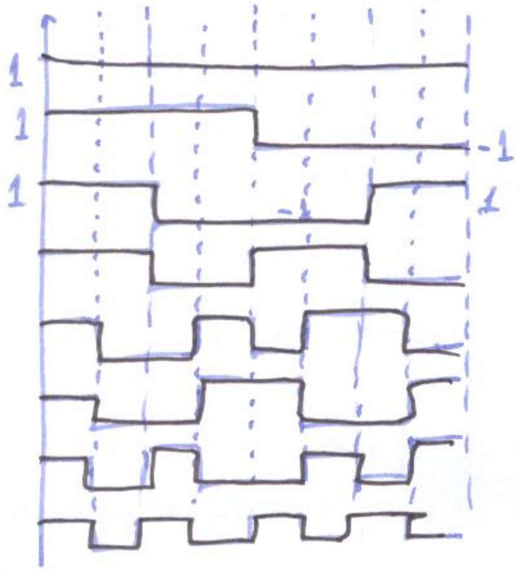


itt: csúszóablak jelleg! → folyamatosan van érvényes adat!
de! odébblépéssel a mátrix nem az.!
a generátor periodikusan működő rendszer!
(az eredetinél mindig 0 a kezdőfázis)
megoldás: CIRKULÁRIS mozgatás! (bázis és r.br. cseréje is)
ez alapján egy általános jelfeldolgozó sémát építettünk fel.
generátor és analizátor
↳ szűrő „bank": a bemenő jelből szűri azokat a komponenseket, amiből a kimeneti jelünk összeépítettük.

szűrőktől kijövő jel nagysága → súlytényező.

⇒ ez tetszőleges br. – rbr. párra működik.
a frekvenciatartománybeli jellemzés az elsődleges.
még egy szempont: nem mindegy, milyen aritmetikai képességeket kell az analizátorhoz rendelni → ILLUSZTRÁCIÓ:

Walsh rendszer N=8-ra

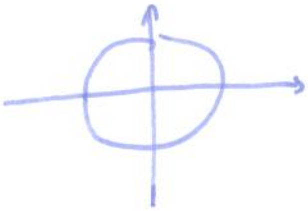


- könnyen implementálható
- a reciproka önmaga
- ortogonális

1.) ortogonális: $(c_m, c_n) = 0$, ha $m \neq n$

2.) reciprok bázis önmaga.

Megj: a felhasználandó sin·cos készlet az egységgyök-körhöz rendelődik



$x^n - 1 = 0$ } egyenlet összes gyöke

$\sqrt[n]{1}$ } konvencionális Fourier

itt N ptlan!

van DC komponens
2 db alaph.
2 db. 2.harm
2 db 3. harm

összesen ptlan db. komponens a bázisrendszerben.

vagy $x^n + 1 = 0$

$\sqrt[n]{-1}$

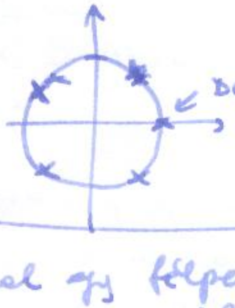
$\Leftarrow$

itt N páros.
pl. N=4

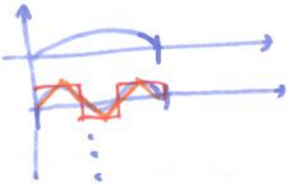
nincs DC komponens!

az alapfrekv: $2\pi/8$

pl. N=5



↳ olyan ortogonális rendszer, ahol egy félperiódus jut
másfél per. jut N lépésre.



ellenfázisban folytatódnak,
de ez nem jelent gondot

↳ itt is 2 frekv. jön számításba: alapharm. fele
alapharm. másfélszerese.

módosítás: előbbi harm. poz.-ban Δ v. □-jelre cseréljük $\Rightarrow$ hogyan módosul a T.br.?

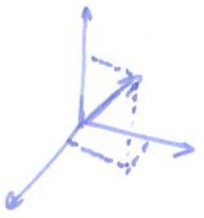
→ a bv. elronti ortogonalitását!

plusz: szinuszos báziselemekkel, de nem harmonikus (modulált) jelekkel kapcsolatba hozható bázisok is szóba kerülnek; nem muszáj harmonikusnak lenniük, de ez már nem az általános jelfeldolgozás szerinti előképzés!

a vevő az analizátor, feladata az eredeti infó „előállítása".

Tér és térbeli ábrázolás:

3D → egységvektorokkal állítunk elő tetszőleges vektort

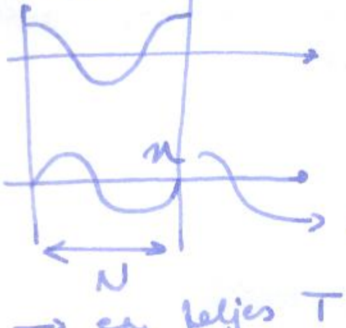


3 vektor segítségével jellemzünk egy egyedet
mindig annyi vektor kell, ahány Dim.
$\boxed{N}$; ha a vektorok függetlenek (mindegyik egy egységnyi)

⇒ súlyozottan összeadunk N db. vektort, így megkapjuk, amit reprezentálni akarunk.

→ diszkrét értéksorozat (N db. elemű vektorok)
↳ ebből N db-ot gyűjtünk be

⇒ nem mindegy, hogyan vál. meg a vektorokat!



mintavételes reprezentáció (N db minta)

→ a minták indexe

→ egy teljes T periódus éppen.

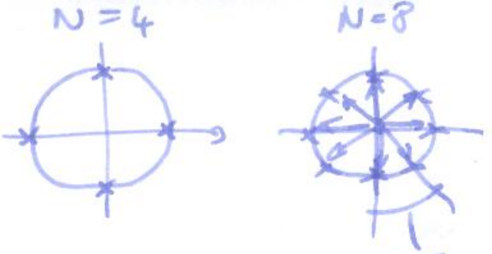
$$T=N\Delta t \Leftarrow \frac{T}{N}=\Delta t$$, mintavételi időlépés.

$$\cos\omega t=\cos 2\pi f t$$

frekvencia → az alapharm. esetén $f_0=\frac{1}{T}$
→ az m. harmonikus $m\cdot f_0=\frac{m}{T}$ $\Longrightarrow$

$$\rightarrow \cos 2\pi \overset{\frac{m}{T}}{f}\underset{n\cdot\Delta t}{t} = \cos 2\pi\frac{m}{T}\cdot n\cdot\Delta t=\cos 2\pi\frac{m}{N\Delta t}n\Delta t=\cos\boxed{\frac{2\pi}{N}}m\cdot n$$

egységgyök → N részre osztott egységkör



az egységgyökből generáljuk a komponenseket

$\frac{2\pi}{N}$ az alapfrekvenciát adja

-1 gyökként elfordul

a 0 frekvenciához rendelhető szög kimarad

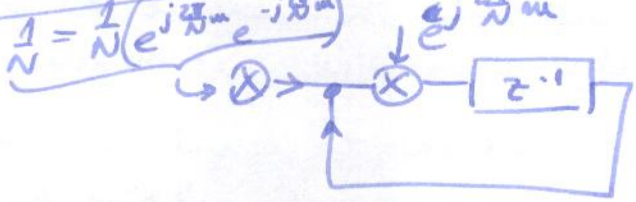
egy - egy adott pont: $e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n}$

$n=0,1,\ldots$

$$1+\underbrace{e^{j2\pi/N}}_{\cos\frac{2\pi}{N}+j\sin\frac{2\pi}{N}}+\underbrace{e^{j(2\pi/N)2}}_{\cos\frac{2\pi}{N}2+j\sin\frac{2\pi}{N}2}+\ldots$$

$\cos\frac{2\pi}{N}\underbrace{m\cdot n}$

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}m}e^{-j\frac{2\pi}{N}m}\right)$$



rezonátor.

$$z_m=e^{j\frac{2\pi}{N}m}$$ az egységsugarú körön egy megfelelő pozíciójú gyök.

jell: $\frac{z_m\cdot z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}$ lenne az átviteli fgv.

mértani sor összegképletét figyelembe véve:

$$(z_m z^{-1})^0+(z_m z^{-1})^1+(z_m z^{-1})^2+\ldots$$

$$1+e^{j\frac{2\pi}{N}1}z^{-1}+e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 2}z^{-2}+\ldots$$

az eltolások miatt

eggyel korábbi minta

kettővel korábbi minta

hárommal korábbi minta

n. n-1. n-2. n-3. ...

KOMPLEX EGYÜTTHATÓS REZONÁTOR

→ a gyökének megvan a komplex konjugált párja is!

$$\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}} + \underbrace{\frac{z_m^* z^{-1}}{1-z_m^* z^{-1}}}_{\text{konjugált}} \quad \overset{*}{=}$$

↳ a szöge mínusz lesz ⇒ a mínusz előtt megjelenik egy -1.

→ van 2 olyan, ami ugyanolyan frekvenciát állít elő; vegyük őket párba!

→ $\left(e^{j\frac{2\pi}{N}m}\right)^* = e^{-j\frac{2\pi}{N}m} = \left(e^{j\frac{2\pi}{N}m}\right)^{-1}$ (az egységnyi amplitúdó miatt)

z^{-2} elvész!

$$\overset{*}{=} \frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}} - \frac{z_m^{-1} z^{-1}}{1-z_m^{-1} z^{-1}} = \frac{z_m z^{-1} \cancel{- z^{-2}} + z_m^{-1} z^{-1} \cancel{+ z^{-2}}}{1-\underbrace{\left(z_m+z_m^{-1}\right)}_{2\cos\frac{2\pi}{N}m \text{ valós!}} z^{-1} + z^{-2}} =$$

ha különbséget képzünk...

valós valós

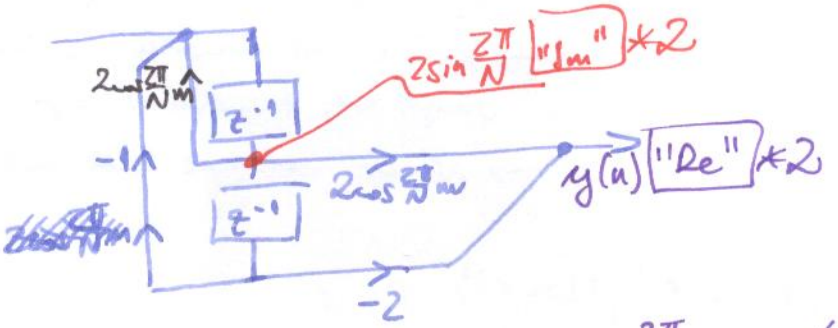
$$\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}m}+e^{-j\frac{2\pi}{N}m}}{2} = \cos\frac{2\pi}{N}m$$

valós, másodfokú nevezőt kaptunk.

$$= \boxed{2\frac{z^{-1}\cos\frac{2\pi}{N}m - z^{-2}}{1-2z^{-1}\cos\frac{2\pi}{N}m + z^{-2}}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

→ valós együtthatós, cosinus jel előállítására képes!!!

rajzban:



$$u(n-1)\cos\frac{2\pi}{N}m - 2u(n-2) = y(n) - y(n-1)2\cos\frac{2\pi}{N}m + y(n-2)$$

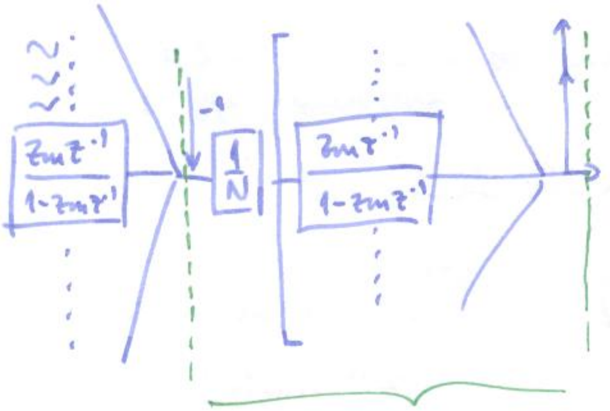
és szinuszt kapunk (képzetes)

$$2j\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}m} - e^{-j\frac{2\pi}{N}m}}{2j} = 2j\sin\frac{2\pi}{N}m$$

$$\frac{2j\, z^{-1}\sin\frac{2\pi}{N}m}{1-2z^{-1}\cos\frac{2\pi}{N}m + z^{-2}}$$

A modellünkbe helyezett rezonátor felírása:

$$\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}$$

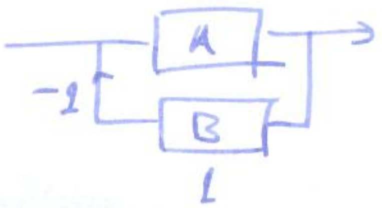


mi történik itt? azt szeretnénk, hogy ne történjen semmi, ugyanaz legyen!

mi van köztük? összeadott kimenetű dobozkakészlet.

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}}{1+\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}} = z^{-N}$$

erősítő visszacsat.



késleltető, ami egy ablaknyit késleltet (egy ablak múlva ér át rajta)

→ de! ez ismétlődik! mindig ugyanazt vonja ki, tökéletes [illegible]

→ N db mintát kell beletolni.

egyenletes kört => $z_0 z^{-1}(1+z_0 z^{-1}+(z_0 z^{-1})^2+\dots)$

$\vdots$

$z_m z^{-1}(1+z_m z^{-1}+(z_m z^{-1})^2+\dots)$

$\vdots$

$z_N z^{-1}(1+z_N z^{-1}+(z_N z^{-1})^2+\dots)$

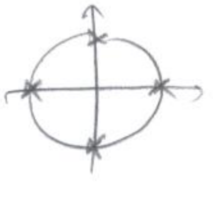
ezt mind össze kell adni

$$\underbrace{z^{-N}+z^{-2N}+\dots}_{\text{végtelen sor}}$$

$\Downarrow$

$$\frac{z^{-N}}{1-z^{-N}}$$

ez a számláló.



$$\underbrace{z^{-1}(z_0+z_1+\dots+z_{N-1})}_{0}$$

hatványsora is 0, kivéve N, akkor 1-et ad.
(ez a zárójelen belül az N-1.)

$$\frac{\frac{z^{-N}}{1-z^{-N}}}{1+\frac{z^{-N}}{1-z^{-N}}}=\frac{z^{-N}}{1-z^{-N}+z^{-N}}=\boxed{z^{-N}}$$

Mi is történik valójában? Egy jelmintáinak eredménye jelanalízis oldalára lesz. Az analízis során előállítjuk ugyanazt a jelet. Nem történt egyéb, csak egy blokkot késett. Nem lehet megoldani, hogy ne legyen késleltetés; a valóságban felhasználjuk. (Formálisan előállítható késleltetés nélküli, de ezt felejtsük el.)

Egy további vonatkozás

z^{-N}-t kaptuk, de minket egy blokk kimenete érdekel az analizátorban.

$$\frac{\overbrace{\frac{1}{N}\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}}^{2}}{\underbrace{1+\frac{1}{N}\sum\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}}_{\frac{z^{-N}}{1-z^{-N}}}}=\underbrace{\overbrace{\frac{1}{N}\left(1-z^{-N}\right)\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}}^{1}}$$

ez egy olyan alak, ami klasszikus eredmény a jelfeldolgozás tudománykörében.

FREKVENCIAMINTAVÉTELI ELJÁRÁS

Milyen átviteli tulajdonsága van $\frac{1}{N}\left(1-z^{-N}\right)$-nek?

$$\frac{1}{N}\left(1-z^{-N}\right)=\frac{1}{N}z^{-N/2}\left(z^{N/2}+z^{-N/2}\right)=$$

Δt helyett T ez a mintavételi idő

$$z=e^{j\omega T}\qquad 2j\,\underbrace{\frac{e^{j\frac{N}{2}\omega T}+e^{-j\frac{N}{2}\omega T}}{2j}}_{\sin\frac{N}{2}\omega T}$$

$$=\boxed{\frac{2j}{N}e^{-j\frac{N}{2}\omega T}\sin\frac{N}{2}\omega T}$$

abszolút értéke: $\frac{2}{N}\left|\sin\frac{N}{2}\omega T\right|=\left|\frac{\sin\frac{N}{2}\omega T}{\frac{N}{2}}\right|$

kis argumentumra ωT szerint indul

ilyen szűrőkarakterisztika!

Az egységsugarú körön lévő pozíciókban zérussal rendelkező,
FÉSŰS SZŰRŐ.

Az m. póluspozíciót a fog kitörésére használom!

$$\prod_{m=0}^{N-1}\left(1-z_m z^{-1}\right)$$

=> olyan szűrő, ami egy kivételével mindent kitör,
azt átengedi, mérhető (jelanalizátor vonalas spektrum)

=> minden generátorkomponenst elnyom egy kivételével.

~> lehet szűrési feladatra használni.

Ezzel a sémával nem mindig versenyképes a mintavétel.
Az aktuális mintából vonjuk le a N-nel korábbit.

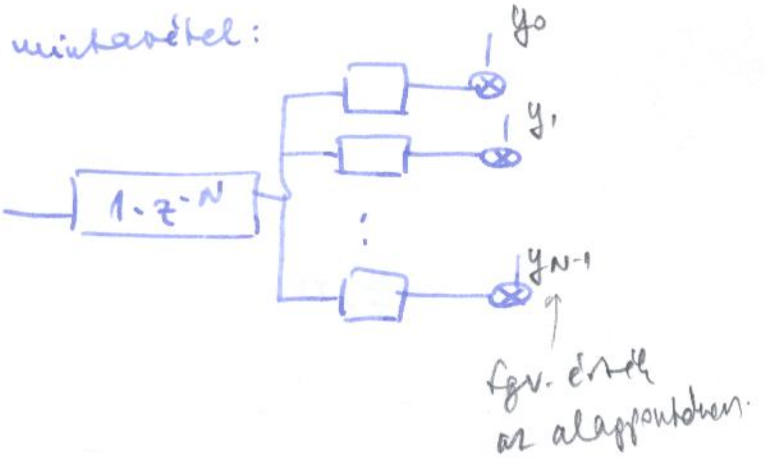
Gyanús ügyek:

- teljesen precízen implementáljuk a szűrőt, a fixpontos realizáció miatt bajba kerülhetek; A cos és a sin nem biztos, hogy
1 olyan amplitúdót jelöl ki (a kerekítés miatt); a stabilitás határán vannak a gyökök.; ha belül maradunk, fokozatosan csökken az amplitúdó.

Itt nem igaz, mivel hiába hibás a pozíció, a kiejtés tökéletes.

2. Mivel z_m egyszer van implementálva, az értékek ugyanazok lesznek, a tört stabilan visszaadja. ~~az~~ Itt kvantálástól függetlenül az erős visszacsatolás miatt közel marad egyhez.
Minőségileg eltér a másik (1) vonzó megvalósításától.

Fr. mintavétel:



Lagrange interpoláció

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) \\ y_1 &= y(x_1) \\ y_{N-1} &= y(x_{N-1}) \end{aligned}\right\}$$ ezekhez egy POLINOMot adunk

független változóértékeknél a fgv. értéke

összes ⇒ egy kiesik

$$Y(x) = \boxed{\prod_{n=0}^{N-1} (x - x_n)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{a_m}{x - x_m}$$

$1 - z_m z^{-1}$ „ellepő"!

az alappontok és x különbsége produktumban

alappontok:

z_0

z_1

z_{N-1}

$$a_m = \frac{y_m}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (x_m - x_n)}$$

a frekvenciamintavételi eljárás
MEGEGYEZIK
a Lagrange-interpolációval!!

→ az alappontokhoz tartozó a fgv. értékeket alapul véve fel tudunk építeni egy polinomot.

mire sarkall minket? felejtsük el az egyenközű szabályosságot, és vegyünk tetszőleges pozíciókat.

⇒ a Lagrange-zsal alkalmas becsatolótényezőket tudunk adni:

Megoldás: korrekciós doboz (G)

$$1 + \sum \frac{g_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} = \frac{1}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})}$$ adja ki a fésűs szűrő gyökeit!

ennek feltétele felírva: (részlettörtekre bontás)

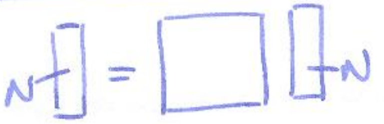
$$g_m = z_m \frac{1}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}$$

ugyanúgy határozzuk meg, ahogy a Lagrange együtthatókat.

Kezünkben van egy olyan eszköz, amivel nem harmonikus szinuszjelek szuperpozícióját analizálni és generálni is tudjuk.

REKURZÍV JELFELDOLGOZÁS, REKURZÍV JELTRANSZFORMÁCIÓK

2003. 03. 11.

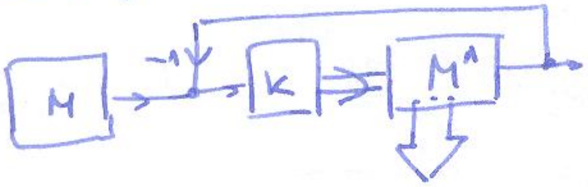


hogyan lesz ez csúszóablakos?

cél: tetszőleges transzformációra meg tudjuk csinálni

→ ha a jel születésére van modellünk... → a kiolvasás eszköze egy önmagát működtető szg. program

→ becslők előállítása, korrekció



konkretizáljuk! (diszkrét Fourier, ezen reprezentáció esetére)

→ szinuszok és koszinuszok lin. kom.

→ itt jelreprezentáció egy fix jól ért. tartományban

→ egyes frekvenciakomponensek jelenlétének mértéke

$$\boxed{X(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}}$$

súlyozó tényező, átlagolási eljárás

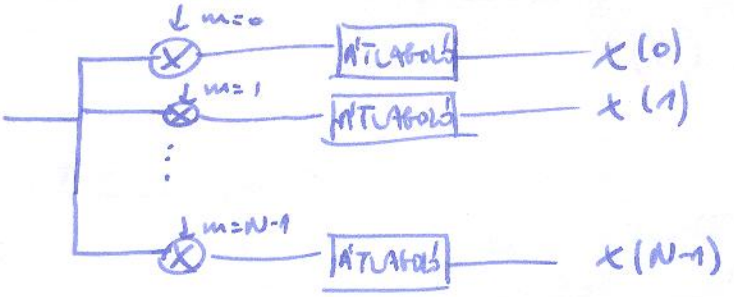
cél: olyan rekurzió, ami folyamatosan gyártja a komponenseket, ha megkapja a bemenetet

Két aktivitásra bontjuk fel:

1.) fogjuk a jelet, és komplex keverőnek tesszük ki.

$$X(m)=\underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}}\cdot\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_n}$$

2.) ezt átlagoljuk



előállnak a frekvenciatartományban ért. komponensek.

→ ezt a pofozó eljárást alkalmaztuk.

→ az átlagoló átviteli függvény típusú leírása:

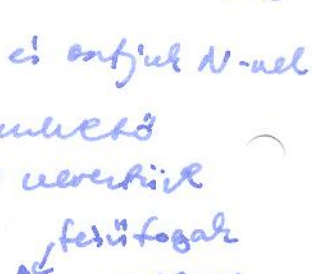
$$H(z)\,\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}=\left(1+z^{-1}+z^{-2}+\dots+z^{-N-1}\right)\frac{1}{N}$$

→ összeadjuk a korábbi mintákat és osztjuk N-nel

$\frac{1}{N}(1-z^{-N})$ → olyan frek. tartományban értelmezhető karakterisztika, amit fésűs szűrőnek nevezünk

amplitúdókarakterisztika: Szinusz függvény

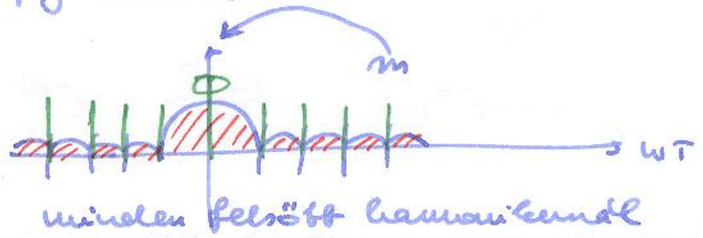
$$2j\,\frac{z^{\frac{N}{2}}-z^{-\frac{N}{2}}}{2j}=\xrightarrow{z=e^{j\omega T}}=\left|\sin\frac{N}{2}\omega T\right|$$



→ egy alkalmas frekvenciájú komponens megmérésének eszköze az adott fésűfog kitörése

→ az átlagoló a 0-frekvenciás fog kitörése

$$\frac{1}{N}\left|\frac{\sin\frac{N}{2}\omega T}{\sin\frac{1}{2}\omega T}\right| \Rightarrow 1$$



kis argumentumnál $\sin x = x$

minden felsőbb harmonikusnál 0 átvitel

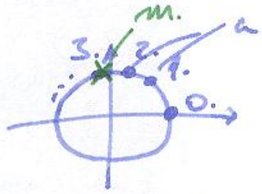
→ tisztán periodikus jel esetén csak tiszta frekvenciák vannak, azaz csak a ~~k~~ 0-nál levőt engedi át 1 súllyal

a keverés hatása, hogy a megfelelőt középre toljuk

másik megközelítés:

$$\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-\boxed{z_m}z^{-1}}$$

az m. pozíció kitörése

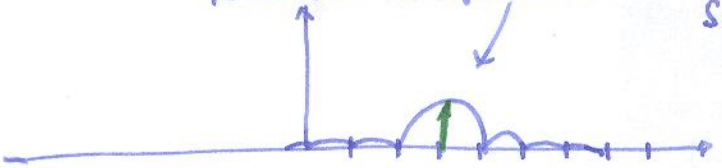


a kiszúrási pontok csak egy kivétellel zárják le

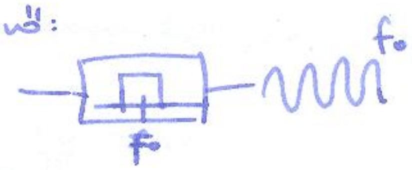
$$1-z^{-N}=\prod_{m=0}^{n-1}\left(1-z_m z^{-1}\right)$$

átlag → Fourier-együttható értéke. (egyenkomponens)

Fourier-komponens



Sávszűrő:



Megjegyzések:

① A számítógépünk valós és képzetes részre bontva számít.

Mi a helyzet a köv. implementációval:

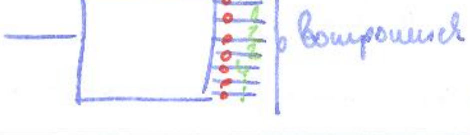
$$\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}$$

a komplex gyökökkel könnyű elbánni, mivel a konjugált pár is rendelkezésre áll.

⇒ páronként összevonva

$$\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}+\frac{z_m^{*} z^{-1}}{1-z_m^{*} z^{-1}} \begin{array}{l}\nearrow 2\mathrm{Re}\\ \searrow 2\mathrm{Im}\end{array}$$

② Általános értelemben vett jelfeldolgozó eszközöket tudunk generálni frekvenciamintavételi eljárással.

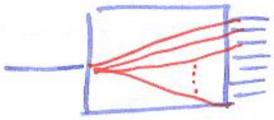


→ összegezve visszakapjuk az eredeti jelet

→ új súlyozást adva neki jelszintézist tudunk csinálni (szűrés)

felül/aluláteresztett jelek, kiemelés/elnyomás

$$\frac{1}{N}(1-z^{-N})\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{1-z_m z^{-1}} = 1 \Big\}$$ eredeti jel!



vagy

$$\frac{1}{N}(1-z^{-N})\sum_{m=0}^{N-1}\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}} = z^{-N}$$

A súlytényező azt mondja meg, milyen legyen az átvitel az adott fr. komponensnél.

$H(z_m)$

① Ez összefügg a Lagrange-interpoláció technikájával.
Itt olyan eszközt építünk fel, amivel megoldjuk, adott függvény hogyan jusson érvényre.

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$

$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$

$$Y(x)_m = \prod_{m=0}^{N-1}(x-x_m)\sum_{m=0}^{N-1}\frac{a_m}{x-x_m}$$

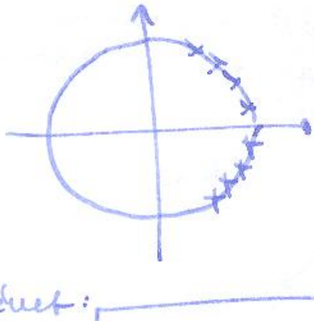
a produktumban az összes gyök szerepel, de kiejtünk egyet és ott érvényre juttatunk egy tényezőt.

⇐ résztörtekre bontási probléma megoldása.

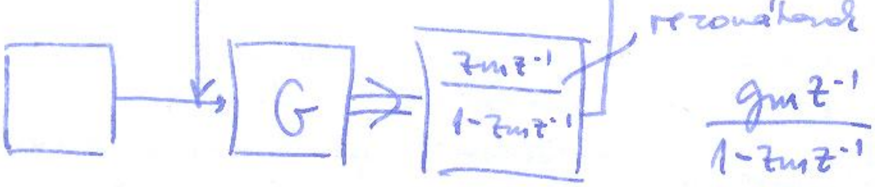
Lagrange: a_m számítása résztörtekre bontás segítségével

$$a_m = \frac{y_m}{\prod_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{N-1}(x-x_m)}$$ ↖ a megfelelő tag kitörése

Az egész frekvenciamintavételi eljárást tetszőleges alappontra értelmezhetővé teszi. Azaz sűrűn egymás mellett lévő fr. komponensekre is alkalmazhatóvá válik.



Visszacsatolt történet:



$\frac{g_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}$ alak kerül vissza

g_m meghatározása Lagrange-interpolációval.

CSATORNA ÁTVITEL súlyozás előtt 1

$$\boxed{g_m = \frac{z_m}{\prod\limits_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{N-1}\left(1 - z_n z_m^{-1}\right)}}$$

→ a Lagrange-interpoláció lehetőséget nyit.

→ univerzális jelmanipuláló eszköz, ami nem csak harmonikus szinuszos komponensekre képes bontani

→ ezután a szűrőbankot alkalmazva jutunk el a célunkhoz.

Ha arra törekszünk, hogy ne csak polinomszerűen gondolkodjunk, akkor a jel rekonstrukcióját nem véges bázisú módon érjük el, hanem pólusok is jöjjenek létre. (?)

köv téma: adaptív jelfeldolgozás
→ olyan műveletkör, ami a mért eredményekből tanul
→ saját működéséhez figyelembe veszi.

ADAPTÍV RENDSZEREK

cél: eszköz a probléma megragadásához, a valóság leírásához, a modellezéshez

modellillesztés: egy elképzelt struktúra + változó/változtatható paraméterek.

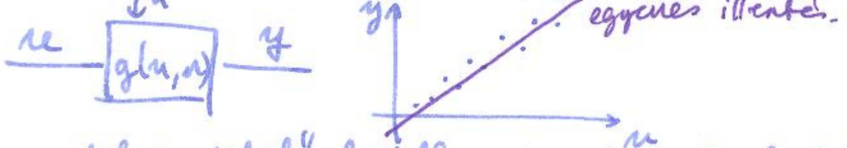
[A]: pontosabb megismerés (identifikáció)
→ a továbbiakban az eljárásainkat ismert blokként kezelj.

[B]: követési tulajdonságok megvalósítása

A: minél pontosabb legyen a rendszer
B: minél jobb, gyorsabb követés a feladat, kisebb pontossággal } ⟹

⟹ rekurzív eljárásokat használunk, amik ezt a két világot összekötik.

regressziós séma: van egy megragadandó jelenség → függvény
(vannak bemeneti és kimeneti értékpárjai)

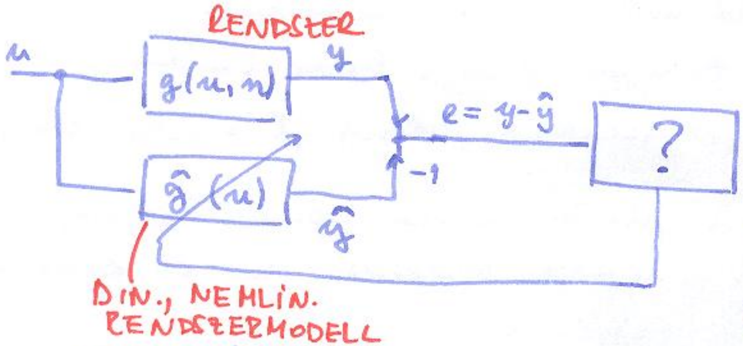


cél: a dobozt leíró legjobb, egyszerűen kalkulálható, jobban illeszkedő reprezentációját készítsük el.

Mivel nincs semmilyen ismeretünk a belsejéről, prekoncepcióval élünk (pl. egyenletet feltételezünk.)

A jelenséget befolyásolja az „u" bemenet, amit mi adunk, és
egy zajként értelmezett „n" aktivitás
(ez a dobozon belül vmi működik)
→ bizonytalanságnak tudjuk be.

Legyártunk egy $\hat{g}$ függvényt, ebben n-t nem ismerjük.



Mivel állítjuk vissza
$\hat{g}$ állítható paramétereit?

Eltérés a megfigyelőhöz képest, hogy nem állapotokat, hanem paramétereket igazítunk.

pl. lineáris → $\hat{g}(u) = a + bu$
paraméter a és b.

↓
mi találtuk ki, hogy lin. legyen.

a hiba négyzetének, a várható érték alakulását követjük nyomon.

$E[e^2] \Rightarrow$

a paraboloid alja az a/b síkon értelmezve adja a helyét.

a deriválással keressük az értékét.

Mind a felső, mind az alsó dobozt általánosabban értelmezzük.

A din., nemlin. részek legyen statikusak, a változtatható paraméterek pedig kövessenek valamilyen lineáris világot.

pl.: $\hat{g}(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + \ldots$
$\Rightarrow$ paramétereiben lineáris struktúra,
kiértékelhetőség egyszerű.

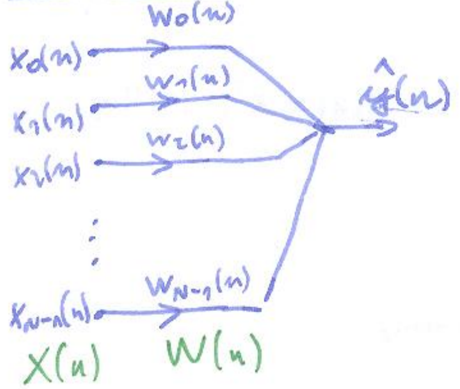
$\Rightarrow$ lineáris egyenletrendszer megoldásához jutunk.

ADAPTÍV LINEÁRIS KOMBINÁTOR

kell a  helyére. ?

rendszermodell

ADAPTÍV LINEÁRIS KOMBINÁTOR

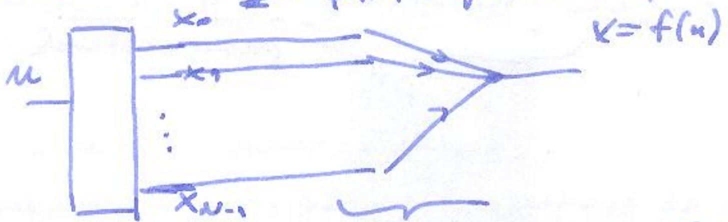


$$\hat{y}(n) = W^T(n)\,X(n)$$

$\downarrow d(n)$

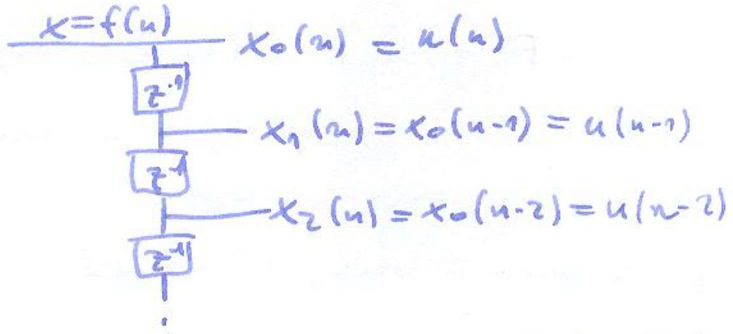
$\hat{y}$ ~~az~~ előállítása súlyozott ~~(paraméterekkel)~~ $x_i(n)$-ekkel csak vektorban vannak $X(n)$

Ez csak egy elem! ← FIX, rögzített dolgokat produkál.



ezt súlyozzuk, hogy produkáljuk

Elhelyezhetünk benne késleltető láncot is:



Adaptív szűrő, mely a bemenő jelek korábbi értékeivel kombinál.
↳ a paraméterei változnak.

Hogyan működtessük?

Hogyan történhet a regressziós feladat megoldása, mi a mozgásterünk?

Gyanús: $E[e^2]$ → valamilyen végtelen mennyiség begyűjtése utáni átlagolás; meg vagyunk lőve!
(nem [illegible] regisztrátum!)

$$\underbrace{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv}_{N} \Rightarrow \frac{1}{N}\ldots \sim E[\ ]$$

→ csak valamilyen mértékben tudjuk a várható értéket megvalósítani.

→ követelmény, hogy eredmény minél hamarabb legyen.

Általában: azonosítandó $d(n)$ jel.

cél: hozzá képest minél közelebb kerüljön új

A hiba: $\underbrace{d(n) - W^T(n)x(n) = e(n)}$ $W^T(n)x(n) = x^T(n)W^T(n)$

Hogyan határozzuk meg a súlytényezőket?

$E(e^2)$ legyen minimális.

(lineáris regressziós feladat általánosítása)

~~$E(e^2) = E(d^2(n) - W^T(n)x(n) \; x^T(n)W(n))$~~

$$E(e^2) = E\left(d^2(n)\right) - 2\underbrace{E\left[d(n)\,x^T(n)\right]}_{P^T}\underline{W(n)} + \underline{W^T(n)}\,\underbrace{E\left[x(n)\,x^T(n)\right]}_{R}\,\underline{W(n)}$$

paraméterek

skalár és vektor szorzata → vektort kapunk

→ az eredmény egy korrelációs vektor P

álló és fekvő vektor, négyzetes mátrix születik R

$$E(e^2) = E\left(d^2(n)\right) - 2P^T W(n) + W^T(n)\,R\,W(n)$$

mi az optimális beállítás? → előállítjuk a deriváltat (grad. vektor)

$\nabla(n)$ → $W(n)$ lesz független változó!

→ milyen vektornak szánjuk? → álló!

$$\underbrace{\nabla(n) = -2P + 2RW(n)}$$

keressük az alsó pontot a paraboloidon → $\nabla(n) = 0$

a kimeredő W^* lesz az optimális beállítás

$$\boxed{W^*(n) = R^{-1}\cdot P}$$ Wiener–Hopf egyenlet

az adaptív lin. komb. elméleti megoldása

jó, de csak ha rendelkezésre áll R és P

nagyon kevés környezet közül csak részben, v. közelítőleg.

tanulási eljárás: P-, R- és súlytényezők (W) együttes tanulása!

⇒ nehézkes, mert a tiszta eredmények csak közelítőleg ismertek

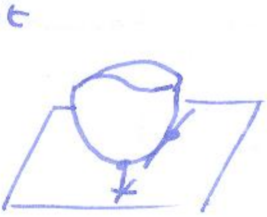
⇒ folyamatosan kell működtetni P-t és R-t megismerőket.

ÚJ ISMERET!!! → többletinformáció birtokában mondok többet.

$W(n+1) = W(n) + \underline{\text{KORREKCIÓ}}$, $(\ldots)\,x(n)$ lesz ez! iteratívan újabb paraméterbecslőt állítok elő!

→ az adaptív eljárások alapsémája;

Tehát: újabb ismeret birtokában a korábbi lépésben becsült paramétert finomítani szeretnénk
→ ehhez segítségül hívjuk a gradienst
(a hibafelületben való mozgás)



$$W(n+1) = W(n) - \mu \hat{\nabla}(n)$$

↳ μ: bátorsági tényező, kellő bátorsággal, de óvatosan kell haladni.

⇒ egy mérnöki becslést produkálunk. $\hat{\nabla}(n) = \frac{\partial e^2(n)}{\partial W(n)}$ (standard felírási mód.)

$e(n)$-ről azt látjuk, hogy

$$e(n) = d(n) - W^T(n)\,x(n) = d(n) - x^T(n)\,W(n)$$

$$e^2(n) = \left(d(n) - W^T(n)\,x(n)\right)^2$$

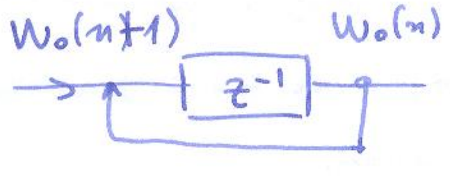
deriválás eredménye: $\underbrace{-2e(n)\,x(n) = \hat{\nabla}(n)}$, a gradiens becslője

$$\boxed{W(n+1) = W(n) + 2\mu\, e(n)\, x(n)}$$

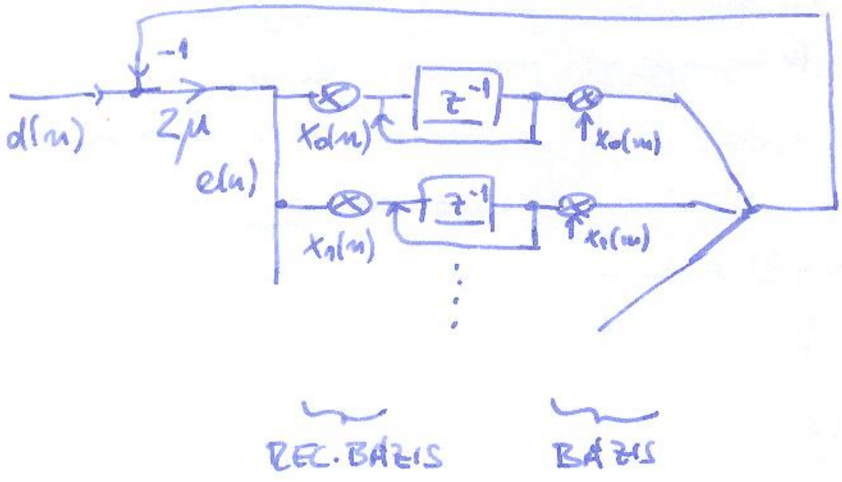
primitív, de sok szempontból eredményes eljárás.
Sok iterációval, de eredményesen műk.

„(~~elemes eljárás~~)" LMS-eljárás
↳ Least Mean Square.

minél nagyobb a dimenzió, annál gyanúsabb a gradiens.



korrekciós tag megalkotása
⇒ bejön $d(n)$, ehhez igazodnunk kell.



$2\mu\, x(n) \Rightarrow G(n)$
$x(n) \Rightarrow C(n)$

$\mu = \frac{1}{N}$ véges lépésben konv.

visszavezet a rek. transzformációs struktúrájához

a bátorság módosításával érdekes eredményekhez lehet jutni.

végtelen N blokkok (egymás mellett) feldolgozására képes exponenciális átlapolással

P-re, R-re és W-re egyszerre kell utazni.

Hogyan érhetünk el olyan megközelítési modellt, amiben nem csak W-re utazunk, hanem P-vel és R-rel kapcs. ismeretekre is?

$$W^* = R^{-1} \cdot P \qquad E[e^2]\Big|_{min} = E[d^2(n)] - P^T W^*$$

(a paraboloid legaljától a síkig terjedő érték)

→ optimális esetben <u>NULLA</u>.

→ ez akkor érhető el, ha az illesztést végző modell tökéletesen leírja a valóságot. (kvantálás nélkül)

$$E[e^2] = E[e^2]\Big|_{min} + \underbrace{(\overbrace{W(\cancel{n})-W^*}^{V^T(n)})^T R\,(\overbrace{W(n)-W^*}^{V(n)})}_{\text{optimális beállításnál 0, innen indul a paraboloid.}}$$

$$\boxed{E[e^2] = E[e^2]\Big|_{min} + V^T(n)\,R\,V(n)}$$

a hibafelület leírása.

a gradiens: $\boxed{\nabla(n) = 2RV(n)}$

(a paraméterhiba függvényében)

→ amikor elérjük a nulla feltételt, akkor a várható értéke a hiba és az x korrelációjának 0, azaz korrelálatlanok (ez az ortogonalitás feltétele)

$$E[e(n)x(n)] = 0$$

A hibafelület R függvénye; ez adja meg, hogy a paraboloid különböző irányokban mennyire <u>lapult</u>, azaz h. a gradiens mentén a lépkedés milyen <u>bátorságú</u> legyen.

ha gradiens lapos → bátorság nagy

— " — meredek → — " — kicsi

Szerencsés, ha minden par. irányra nézve hasonló a metszet.

vagyis, ha az alapsíkkal párhuzamos metszete <u>kör</u>.

→ ez szintén R-ből fakad.

Milyen legyen ez az R ?!

$$W(n+1) = W(n) - \underbrace{\mu\,\nabla(n)}_{\text{a gradiens minden irányára jó tényezőt állítsunk be!}}$$

Sajátérték, sajátvektor rendszer: (R vizsgálatához)

$$\left(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{sajátérték}}}{R-\lambda I}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{sajátvektor}}}{Q_n}=0 \qquad n=0,1,\ldots,N-1$$

sajátérték: $\det(R-\lambda I)=0 \Rightarrow \overset{\Lambda}{\overbrace{\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1}}}$

$$R\left[Q_0 Q_1\ldots Q_{N-1}\right]=\left[Q_0 Q_1\ldots Q_{N-1}\right]\,\mathrm{diag}\langle\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1}\rangle$$

↑ a sajátértékeket a főátlóban tartalmazó diagonális mátrix

$$RQ=Q\Lambda$$

$$R=Q\Lambda Q^{-1}$$ (normálforma)

→ ezen vizsgálat eredményeként fogunk becslést adni a bátorsági tényezőre.

R tulajdonságai:

- $R=R^T$, azaz szimmetrikus mátrix. $E[x(n)\,x^T(n)]$

köv ⇓

- a sajátvektorok ortogonálisak.

Biz.: $$\left.\begin{array}{l} RQ_1=\lambda_1 Q_1\\ RQ_2=\lambda_2 Q_2\end{array}\right\}\Rightarrow \underbrace{\left.\begin{array}{l} Q_1^T R^T Q_2=\lambda_1 Q_1^T Q_2\\ Q_1^T R\cdot Q_2=\lambda_2 Q_1^T Q_2\end{array}\right\}}\ R=R^T$$

$\lambda_1\neq\lambda_2 \Rightarrow Q_1^T\cdot Q_2=0$ kell, azaz ortogonálisak.

↓

$Q^T=Q^{-1}$

- $V^T R V$ pozitív szemidefinit.

⇒ a sajátértékek nemnegatívak.

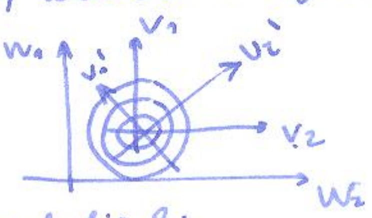
⇓

$$E[e^2]=E[e^2]\big|_{min}+V^T R V=E[e^2]\big|_{min}+V^T\underbrace{Q\Lambda Q^T}_{R}V=$$

$$\boxed{E[e^2]=E[e^2]\big|_{min}+\left[Q^T V\right]^T\Lambda\left[Q^T V\right]}$$

a hibafelület átrendezése.

van olyan koordináta rendszer, amiben a sajátértékek orientálni tudnak minket.



$\nabla(n)=2\Lambda V'=$
$=2[\lambda_0 v'_0(n),$
$\lambda_1 v'_1(n),\ldots$
$\lambda_{N-1} v'_{N-1}(n)]$

→ a vesszős koordinátarendszer a metszetek főtengelyeit mutatja ki.

2008. 03. 18.

A zárthelyire gyakorlunk!

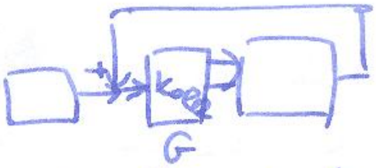
→ számpélda bemutatása

1 Modellkövető számítógépes programmal

→ autonóm diszkrét lin. rendszer

állapotátmeneti mátrix: $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{csak főátlóban}\\ \text{kül. 0-tól}}}{\mathrm{diag}}\langle 1;-1\rangle$

kicsatolómátrix $C=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}$



két spec. esetet nézünk

$\boxed{1.)}$ C négyzetes

$\boxed{2.)}$ C nem négyzetes de: $(A-GC)^N=0$

$x(n+1)-\hat{x}(n+1)=(A-GC)(x(n)-\hat{x}(n))$

cél: A−GC egyre kisebbé tegye az eltérést, kontraktív.

itt: a 2. esethez milyen G mátrix tartozik?
↳ oszlopvektor (mivel C sor)

$$G=\begin{bmatrix}g_0\\g_1\end{bmatrix}$$

két lehetőség: (stratégia)

$\boxed{A)}$ $(A-GC)(A-GC)=0$

$\boxed{B)}$ sajátérték vizsgálata

$$\det(\lambda I-(A-GC))=\lambda^2 \text{ kell.}$$

$\boxed{A)}$:

$$GC=\begin{bmatrix}g_0\\g_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_0&g_0\\g_1&g_1\end{bmatrix}$$

$$A-GC=\begin{bmatrix}1-g_0&0-g_0\\-g_1&-1-g_1\end{bmatrix}$$

$$(A-GC)(A-GC)=\begin{bmatrix}1-g_0&-g_0\\-g_1&-1-g_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-g_0&-g_0\\-g_1&-1-g_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overbrace{1-2g_0+g_0^2+g_0g_1}^{0}&\overbrace{\cancel{-g_0}+g_0^2\cancel{+g_0}+g_0g_1}^{0}\\\underbrace{\cancel{-g_1}+g_0g_1\cancel{+g_1}+g_1^2}_{0}&\underbrace{g_0g_1+1+2g_1+g_1^2}_{0}\end{bmatrix}$$

minden elem
0 kell legyen!

⇒ minden mátrixelemnek nullának kell lennie!

$$\left.\begin{aligned} 1-2g_0&=0\\ 1+2g_1&=0\end{aligned}\right\}\quad \underline{\underline{g_0=\tfrac{1}{2}}}\qquad \underline{\underline{g_1=-\tfrac{1}{2}}}$$

$(\lambda I-(A-GC))$

$$\begin{bmatrix}\lambda-1+g_0 & g_0\\ g_1 & \lambda+1+g_1\end{bmatrix} \rightsquigarrow (\lambda-1+g_0)(\lambda+1+g_1)-g_0g_1=\lambda^2=(\lambda-\overset{}{\underset{0}{\lambda_0}})(\lambda-\underset{0}{\lambda_1})$$

$$\lambda^2+\cancel{\lambda}+\lambda g_1-\cancel{\lambda}-1-g_1+\lambda g_0+g_0+\cancel{g_0g_1}-\cancel{g_0g_1}=\lambda^2$$

λ^2-en kívül mindennek nullának kell lennie

$$\lambda(g_0+g_1)+g_0-g_1-1=0$$

ebből:

$$-\;\;2g_1=-1 \rightsquigarrow \underline{\underline{g_1=-\tfrac{1}{2}}}$$

$$\underbrace{g_0+g_1=0,\quad g_0-g_1=1,}_{+}$$

$$2g_0=1 \rightsquigarrow \underline{\underline{g_0=\tfrac{1}{2}}}$$

$\boxed{2.}$ **Mutáció**

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\qquad C=\mathrm{diag}\langle 1;1\rangle \rightsquigarrow \text{egységes mátrix!}$$

véges lépésben törlődő kompenzációra vágyunk $G=?$

$\boxed{3.)}$ $A=GC$

$G=A\cdot C^{-1}$ $\qquad C=\underline{I}=C^{-1}$

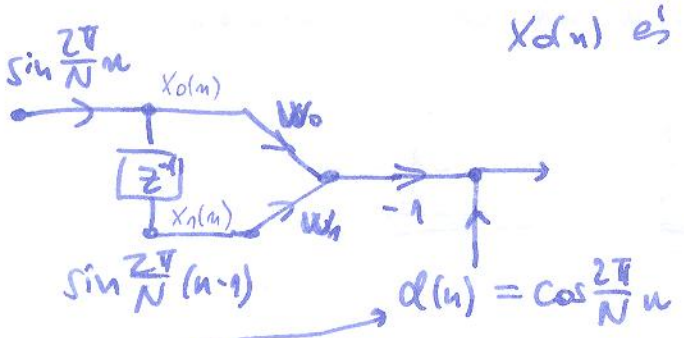
$\underline{\underline{G=A}}$

Kontraktív jelleg másfajta G-ket is elérhetővé tesz.

→ amit értelmeztünk, exponenciális jellegű, végtelenben 0-t elérőként fogható fel.

$\boxed{3}$ Két érték lineáris kombinációja

$x_0(n)$ és $x_1(n)$ konkretizálódott.



valamilyen jel követése a feladat

milyen súlytényezőket kell alkalmazni (w_0, w_1), hogy a cos előálljon?

Wiener-Hopf egyenlet: $W^* = R^{-1} P$
(korrelációs mátrixok)

$$P^T = E\left[d(n)\,x_0(n) \quad d(n)\,x_1(n)\right]$$

várható érték, két jel korrelációját számítja

$$R = E\begin{bmatrix} (x_0(n))^2 & x_0(n)\,x_1(n) \\ x_1(n)\,x_0(n) & (x_1(n))^2 \end{bmatrix}$$

w_0 és w_1?

$$E\Big[\underbrace{\cos\frac{2\pi}{N}n \cdot \sin\frac{2\pi}{N}n}_{\frac{\sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{N}n\right)}{2}}\Big] = 0$$

(0 a várható értéke)
P első eleme nulla.

$$E\Big[\cos\underbrace{\frac{2\pi}{N}n}_{\alpha} \cdot \sin\underbrace{\frac{2\pi}{N}(n-1)}_{\beta}\Big] \overset{*}{=}$$

itt sajnos eltérnek az argumentumok...

→ trigonometrikus azonosságok

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

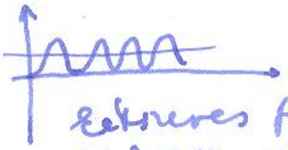
1. − 2. ⇒ $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$

$$\overset{*}{=} E\left\{\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sin\frac{2\pi}{N}(2n-1)}_{\text{0 a várható érték}} - \underbrace{\sin\frac{2\pi}{N}}_{\text{konstans}}\Big]\right\} = \underline{-0{,}5\,\sin\frac{2\pi}{N}}$$

$$P^T = \left[0 \quad -0{,}5\,\sin\frac{2\pi}{N}\right]$$

R mátrix elemei

$$E[x_0^2(n)] = E\left[\sin^2 \frac{2\pi}{N} n\right] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$



egyszeres frekvenciájú szinusz, maximum 1, várható értéke $\underline{\underline{1/2}}$.

$$E[x_1^2(n)] = E\left[\sin^2 \frac{2\pi}{N} (n-1)\right] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \longrightarrow \text{ugyanaz!}$$

$$E[x_0(n)\, x_1(n)] = E\Big[\underbrace{\sin\frac{2\pi}{N} n}_{\alpha}\ \underbrace{\sin \frac{2\pi}{N} (n-1)}_{\beta}\Big] = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{N}}}.$$

trigonometrikus versike:

$\alpha - \beta = \frac{2\pi}{N}$

1.) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

2.) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

2. − 1. : $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5\cos\frac{2\pi}{N} \\ 0.5\cos\frac{2\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \frac{1}{0{,}25 - 0{,}25\cos^2\frac{2\pi}{N}} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5\cos\frac{2\pi}{N} \\ -0.5\cos\frac{2\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix}$$

ellenőrzés:

$$\underbrace{\frac{1}{0{,}25 - 0{,}25\cos^2\frac{2\pi}{N}} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5\cos\frac{2\pi}{N} \\ -0.5\cos\frac{2\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5\cos\frac{2\pi}{N} \\ 0.5\cos\frac{2\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix}}_{R}$$

~~$w^* = R^{-1} \cdot P = \frac{1}{0{,}25 - 0{,}25\cos^2\frac{2\pi}{N}}$ 0.5 −0.5~~

$$W^* = R^{-1}P = \frac{1}{0{,}25\sin^2\frac{2\pi}{N}}\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\cos\frac{2\pi}{N} \\ -0.5\cos\frac{2\pi}{N} & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ -0.5\sin\frac{2\pi}{N}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}w_0 \\ w_1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{0{,}25\sin\frac{2\pi}{N}\cos\frac{2\pi}{N}}{0{,}25\sin^2\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{N}} \\ \frac{-0{,}25\sin\frac{2\pi}{N}}{0{,}25\sin^2\frac{2\pi}{N}} = -\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{N}}\end{bmatrix}$$

Súlytényező!

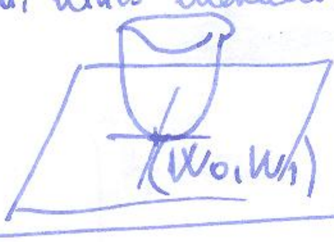
Nézzük meg, mit csinál a szűrőnk:

$$\sin\cancel{\frac{2\pi}{N}}n \cdot \frac{\cos\frac{2\pi}{N}}{\cancel{\sin\frac{2\pi}{N}}} + \underbrace{\sin\frac{2\pi}{N}(n-1)\cdot\left[-\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{N}}\right]} = \cos\frac{2\pi}{N}n \text{ legyen}$$

$$-\frac{\cancel{\sin\frac{2\pi}{N}n\cos\frac{2\pi}{N}} - \cos\frac{2\pi}{N}n\sin\cancel{\frac{2\pi}{N}}}{\cancel{\sin\frac{2\pi}{N}}}$$

teljesül!

→ hibátlan, nincs maradékhiba



---

14. LMS eljárás

van-e esély arra, hogy végtelen sok méréssel állítsuk elő R-t és P-t? nincs...
→ határozzuk meg a deriváltak alapján!

$$\boxed{W(n+1) = W(n) + 2\mu e(n)x(n)}$$

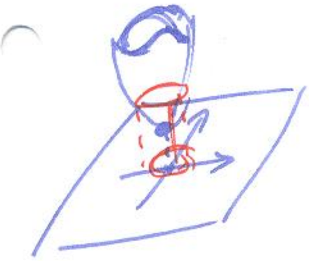
} nézzük meg az előző példára!

a deriváltból maradt.

$$e(n) = \cos\frac{2\pi}{N}n - W^T(n)X(n) = \cos\frac{2\pi}{N}n - w_0(n)\sin\frac{2\pi}{N}n - w_1(n)\sin\frac{2\pi}{N}(n-1)$$

$$w_0(n+1) = w_0(n) + 2\mu\left(\cos\frac{2\pi}{N}n \cdot \underbrace{\sin\frac{2\pi}{N}n}_{x_1} - w_0(n)\sin\frac{2\pi}{N}n\,\underbrace{\sin\frac{2\pi}{N}n}_{x_1} - w_1(n)\sin\frac{2\pi}{N}(n-1)\,\underbrace{\sin\frac{2\pi}{N}n}_{x_1}\right)$$

μ-t általában kicsire választjuk, és rengeteg lépést hajtunk végre
→ sok érték átlagolása révén hosszú távon 0 várható értéket
eredményez ⬭ -re



nem tudjuk befejezni?..

$\boxed{5}$ A gradiens számítása során hogyan tudunk ereszkedni?
Mi befolyásolja a paraboloid formáját?

R sajátérték / sajátvektor?

$\frac{2\pi}{N}$ kicsi, mínusz kicsi.

$\sin\frac{2\pi}{N} \sim$ kicsi

$\cos\frac{2\pi}{N} \sim 1.$

$$w = \begin{bmatrix} -\dfrac{\cos\frac{2\pi}{N}}{\sin\frac{2\pi}{N}} \\ \dfrac{-1}{\sin\frac{2\pi}{N}} \end{bmatrix}$$

→ nagy súlyú érték

≈

→ nagy súlyú érték

$$w \approx \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sin 2\pi/N} \\ \dfrac{-1}{\sin 2\pi/N} \end{bmatrix}$$

⇝ nagy N értékek esetén numerikusan meglehetősen megterhelő, jelentős, ingékony megoldás...

ebből kell konvergálni...

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5\cos\frac{2\pi}{N} \\ 0{,}5\cos\frac{2\pi}{N} & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Sajátértékek: $\det\begin{bmatrix} \lambda-0{,}5 & -0{,}5\cos\frac{2\pi}{N} \\ -0{,}5\cos\frac{2\pi}{N} & \lambda-0{,}5 \end{bmatrix} = (\lambda-0{,}5)^2 - 0{,}5^2\cos^2\frac{2\pi}{N} =$

$$= \lambda^2 - \lambda + 0{,}25\sin^2\frac{2\pi}{N} = 0$$

$$\frac{+1 \pm \sqrt{1-\sin^2\frac{2\pi}{N}}}{2} = \begin{cases} \left(1+\cos\frac{2\pi}{N}\right)\cdot 0{,}5 = \lambda_0 \ (\sim 1) \\ \left(1-\cos\frac{2\pi}{N}\right)\cdot 0{,}5 = \lambda_1 \ (\sim 0) \end{cases}$$

ha N elég nagy, a cos. kb. egy!

Sajátvektorok

- $RQ_0 = \lambda_0 Q_0$ $\qquad Q_0 = \begin{bmatrix} q_{00} \\ q_{01} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5\cos\frac{2\pi}{N} \\ 0.5\cos\frac{2\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{00} \\ q_{01} \end{bmatrix} = 0.5 + 0.5\cos\frac{2\pi}{N} \cdot \begin{bmatrix} q_{00} \\ q_{01} \end{bmatrix}$$

1. sor

$$\cancel{0{,}5q_{00}} + \cancel{0{,}5}\cos\cancel{\frac{2\pi}{N}}\,\underline{q_{01}} = \cancel{0{,}5q_{00}} + \cancel{0{,}5}\cos\cancel{\frac{2\pi}{N}}\,\underline{q_{00}}$$

$$\boxed{q_{01} = q_{00}}$$

2. sor

$$0{,}5\cos\cancel{\frac{2\pi}{N}}\,\underline{q_{00}} + \cancel{0{,}5q_{01}} = \cancel{0{,}5q_{01}} + \cancel{0{,}5}\cos\cancel{\frac{2\pi}{N}}\,\underline{q_{01}}$$

$$\boxed{q_{00} = q_{01}}$$

- $RQ_1 = \lambda_1 Q_1$ $\qquad Q_1 = \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{11} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5\cos\frac{2\pi}{N} \\ 0.5\cos\frac{2\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{11} \end{bmatrix} = 0{,}5 - 0{,}5\cos\frac{2\pi}{N}\begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{11} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{q_{10} = -q_{11}}$$

ortogonalitás?

$$Q_0 = \begin{bmatrix} q_{00} \\ q_{00} \end{bmatrix} \qquad Q_1 = \begin{bmatrix} q_{10} \\ -q_{10} \end{bmatrix} \qquad Q_0^T Q_1 = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{00} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{10} \\ -q_{10} \end{bmatrix} =$$

$$= q_{00}q_{10} - q_{00}q_{10} = \underline{\underline{0}}$$

a sajátvektorok ortogonalitása egyértelmű.

transzformáció is megfeleltethető: (tetszőleges R mátrixot rá lehet transzformálni)

$Q = \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 \end{bmatrix}$ hogyan tudjuk a Q mátrixot normálni?
(egységre normálva szeretjük használni,
önmagával szorozva egyet ad)

$$QQ^T = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{10} \\ q_{00} & -q_{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{00} & q_{00} \\ q_{10} & -q_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{00}^2 + q_{10}^2 & \underline{q_{00}^2 - q_{10}^2} \\ \underline{q_{00}^2 - q_{10}^2} & q_{00}^2 + q_{10}^2 \end{bmatrix}$$

ha $q_{00} = q_{1,1}$ akkor jelölt elemek 0-k lesznek

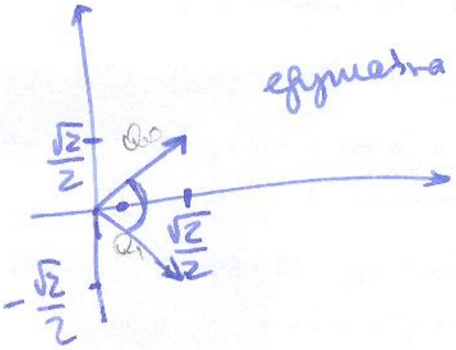
$$QQ^T = \begin{bmatrix} 2q_{00}^2 & 0 \\ 0 & 2q_{00}^2 \end{bmatrix} = I \text{ kell}$$

($Q^{-1} = Q^T$-hez)

$$2q_{00}^2 = 1 \Rightarrow q_{00} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ Q_0 $\qquad$ $\downarrow$ Q_1



egymásra merőleges vektorok.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_0 = 0.5\left(1+\cos\frac{2\pi}{N}\right) \\ \lambda_1 = 0.5\left(1-\cos\frac{2\pi}{N}\right) \end{array}\right\}$$

→ N választásával változtatható!

↳ a sajátérték még leosztozza, a sajátvektor már nem!

hova jutottunk?

$$E\left[e^2(n)\right] = \underbrace{E\left[e^2(n)\right]\Big|_{min}}_{\text{a paraboloid alsó pontja alatti távolság}} + \underbrace{\overset{V^T(n)}{(W(n)-W^*)^T}\,\overset{R}{R}\,\overset{V(n)}{(W(n)-W^*)}}_{\text{a paraboloid leírása}}$$

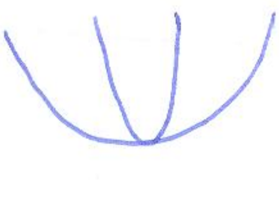
ha becsalogatnánk W^* beállításba, a második tag 0.

→ az optimum keresésében gradiensmódszert alk.
(derivált mentén süllyedve megyünk)

→ hogyan függ az ereszkedés a paraboloid geometriájától?

→ lesz egy ellipszismetszetet produkál, ha eltérnek a sajátértékek

→ kör lesz, ha a sajátértékek egyformák



} más-más ereszkedési lehetőség: gyorsan, ha meredek; lassan, ha lankás

Pontszámítás:

HF1	40
ZH1	40
HF2	40
ZH2	40

Σ: 160 pont.

40 pontos rendszerre normálva

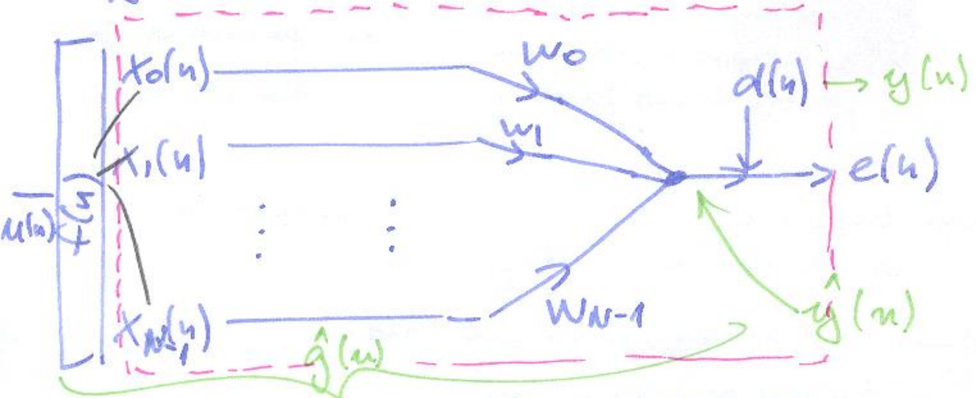
0-15	①	nem jó
16-20	②	éppen jó
21-25	③	picit jobb
26-31	④	már elmegy
32-40	⑤	„én is lelkes vagyok"

A zh-k megírása követelmény.

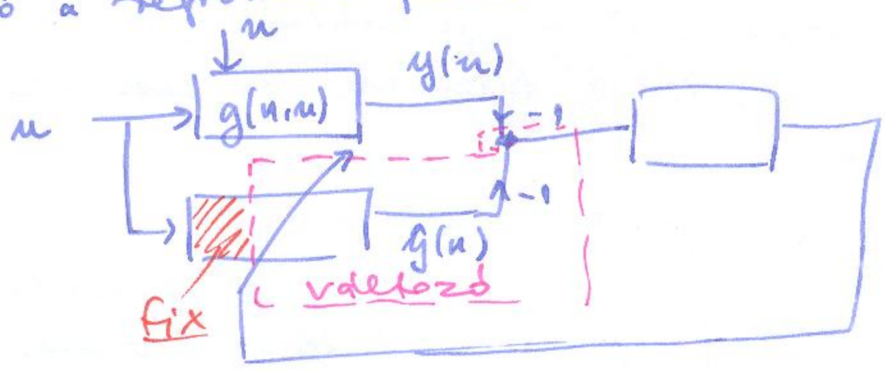
Nagy drámára jegy ügyileg nem kell számítani.
Becsületes dolog eljönni megírni a zárthelyit.
(Formálisan pótolni kell.)

ZH: - az eddig elhangzottakból kisebb kérdések és feladatok
- a nagyobb lélegzetűek kevésbé
- szerdán délután két részre lesz osztva a társaság;
- szűk 60 perc, hirdetmény a honlapon.
- előtte ráhangoló hadművelet

A cél, hogy a lineáris kombinátornak nevezett szerkezet egy értéksorozatot követni legyen képes.



hasonló a regressziós problémához



ez ennek egy interpretációja.

A hiba négyzetének a várható értékét minimalizáljuk, ez a változtatható jellemzők négyzetes függvénye.

(Eredetileg lineárisan szerepeltettek)

ezen a paraboloid felületen mozgunk különféle $W(n)$ beállításával

ha ettől bármilyen irányba mozdulunk, a hiba nagyobb lesz; a paraboloid határozza meg a mértéket

<u>Hogy jön ide a sajátvektor / sajátérték probléma?</u>

$$R = Q \Lambda \underset{\uparrow}{Q^{-1}} = Q \Lambda Q^T$$

1-re normáltuk

áll.: az R mátrix helyett használhatunk olyan mátrixot, aminek csak a főátlóban vannak elemei

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.5\left(1+\cos\frac{2\pi}{N}\right) & 0 \\ 0 & 0,5\left(1+\cos\frac{2\pi}{N}\right) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Q^{-1} R Q = \Lambda}$$

→ az ellenőrzést ajánlja mindenki figyelmébe

A négyzetes kifejezés másfajta felírása:

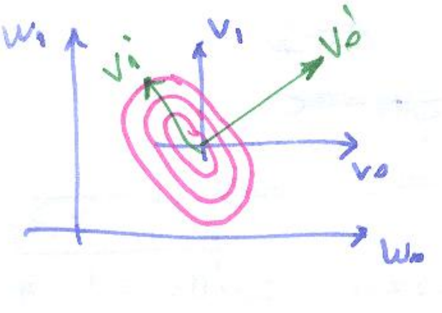
$$V^T(n)\, R\, V(n) = \overset{V'(n)}{\underbrace{V^T(n)\, Q}}\, \Lambda\, \overset{V'(n)}{\underbrace{Q^T V(n)}} = V'^T(n)\, \Lambda\, V(n)$$

új paraméterhiba kifejezés!

$$V'(n) = Q^T V(n)$$

$$V'^T(n) = V^T(n)\, Q(n)$$

ha R kizárólag diagonális elemet tartalmaz, akkor eltolás a paramétertérben



Elforgatott koordináta rendszerben vagyunk a transzformáció következtében

Az elforgatott koordinátarendszerben a ~~[illegible]~~ paraboloid „irányai" a „fő metszet irányok".

A négyzetes hibakifejezés minimalizálását ezen, módosított mellett képzeljük el... → a deriválást a V' szerint végezzük!

a gradiensvektor $\boxed{\nabla(n) = 2\cdot\Lambda V'(n)}$

⇓

$$\nabla(n) = 2\cdot\Lambda V'(n) = \left[2\cdot\lambda_0 V_0'(n) \quad 2\cdot\lambda_1 V_1'(n) \quad \dots\dots\right]^T$$

A problémát leegyszerűsítve, 1D-re degradálva:

(az aktuális par. becslést úgy korrigáljuk, hogy a kisebb hibairányba menjen)

Skalár: $w(n+1) = w(n) + \mu \underbrace{(-\nabla)}_{}$

a deriválttal ellentétes irányban lépünk valamekkorát

$$\nabla(n) = 2\lambda\left(w(n) - w^*\right)$$

$$w(n+1) = w(n) - 2\mu\lambda\left(w(n)-w^*\right) = w(n)(1-2\mu\lambda) + 2\mu\lambda w^* =$$

$$= w^* + (1-2\mu\lambda)^{n+1}\left(w(0)-w^*\right)$$

$$\underbrace{w(n+1)-w^*}_{V(n+1)} = \underbrace{(1-2\mu\lambda)^{n+1}}_{}\underbrace{\left(w(0)-w^*\right)}_{V(0)}$$

hogyan történik az iteráció? egyre kisebb értékű" pozícióba lépünk

lehet, hogy lengve jutok el...

→ minél több iteráció, annál nagyobb Ksg.

→ ~~ha~~ a legjobb stratégia a biztonsági tény. megvál. fgv.-e.

kontraktívnak kellene lennie!

a hiba azonnal eltűnik, ha ~~AZZ~~

~~$1-2\mu\lambda=0$~~

$$1-2\mu\lambda = 0 \Longrightarrow \mu = \frac{1}{2\lambda},$$

kritikusan csillapított.

→ ez a kritikusan csillapított mozgás.

→ ha rögtön leereszkedünk, az túlcsillapított.

→ ha ide-oda, akkor alulcsillapított lengő

$$\frac{1}{2\lambda} < \mu < \frac{1}{\lambda}$$ alulcsillapított.

$$0 < \mu < \frac{1}{2\lambda}$$ túlcsillapított.

lényeg: $|1-2\mu\lambda| = |r| < 1$, akkor lesz kontraktív.

Az skalárra is látszik, hogy a sajátérték összefügg μ-vel.

Magasabb dimenzióra:

$$\boxed{V'(n+1) = \left[I - 2\mu\Lambda\right]^{n+1} V'(0)} \quad *$$

arra vágyunk, hogy a paraméterlista csökkenjen.
A szereplő sajátértékek közül a legnagyobbat kell választani, ami korlátozza μ választási tartományát. (?)

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}}$$

$0,5 + 0,5\cos\frac{2\pi}{N} \sim 1$ volt ez a példánkban. (a másik nagy ereszkedési tartományt hagyjuk.)

R és P mátrixszal kapcsolatos ismereteink?

$R = ?$ $P = ?$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n = \underbrace{tr[R]}_{}$$

trace, vagyis a főátlóban lévő elemek összege

~~ha R nem~~ ha nem ismert, a stratégia:

$$0 < \mu < \frac{1}{tr[R]}$$

A főátló meghatározása nem reménytelen.

$$R = \begin{bmatrix} 0,5 & \dots \\ \dots & 0,5 \end{bmatrix} \Rightarrow tr[R] = \underline{1}.$$

(ezt kellett alapul venni, hogy μ-t egynél kisebbre választhassuk)

Ha a sajátértékek nem térnek el jelentősen, nagyjából egyformák, akkor a tr hatása megfelelően durva.

-> ezzel az ereszkedésnek jó nagy tempót adunk, és felgyorsítható a betalálás (?)

-> sok ilyen praktika van, minél több infó van R-ről és P-ről, annál jobb.

- állapotfigyelő
- *
- rekurzív transzformáció

} hibaértékek öröklődése mátrixok sorozatán keresztül történik
↓
megnézzük LMS eljárás esetére

LMS: $W(n+1) = W(n) + 2\mu e(n) x(n)$

$e(n) = W^{*T} x(n) -$ -> az optimális eset
$W^T(n) x(n)$ -> a tényleges

$$e(n) = W^{*T} x(n) - W^T(n) x(n) = x^T(n)\left[W^* - W(n)\right]$$

behelyettesítve előállítható (*):

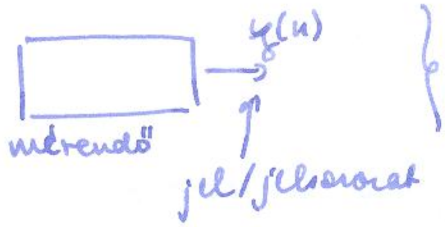
$$V(n+1) = \left[\prod_{i=0}^{n}\left(I - \underbrace{2\mu\, x(i)}_{g}\,\underbrace{x^T(i)}_{c^T}\right)\right] V(0)$$

-> ez olyan kifejezés, mint amivel a rekurzív transzformáció idején találkoztunk

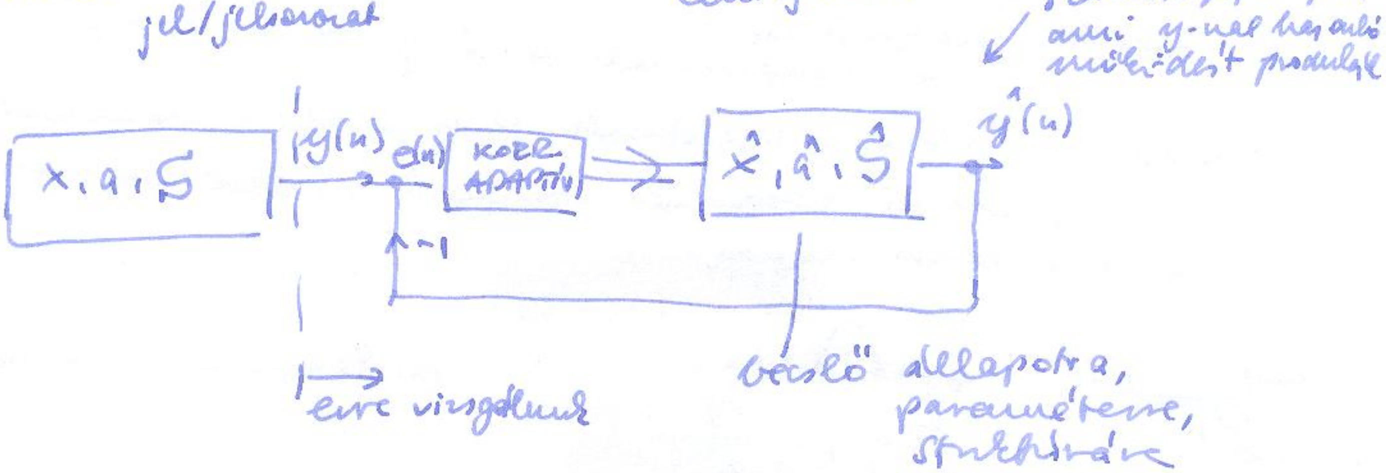
- plenáris ülés, összefoglalás, ráhangolódás
- társaság első fele
- társaság második fele

2 hét múlva: az adaptív eljárások és az adaptációval párhuzamosan adaptált ismeretek.

Összefoglalás az első hat hétről – ZH előtt



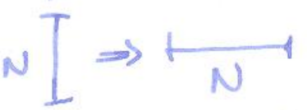
hogyan használható fel y, hogy a belvilággal kapcsolatba kerüljünk?



három fontos vetület:

1: lehetséges követni azt a gondolatmenetet, hogy a mérendő jel önálló hatások, aktivitások összegeként áll elő

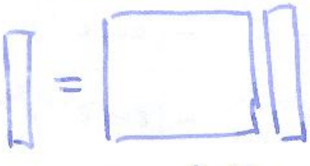
⇒ ph.-soros átalakítás



} transzformációként értelmezhető

hogyan zajlódhat ez folyamatosan, az idő végéig?

→ csúszóablak, mindig az utolsó N



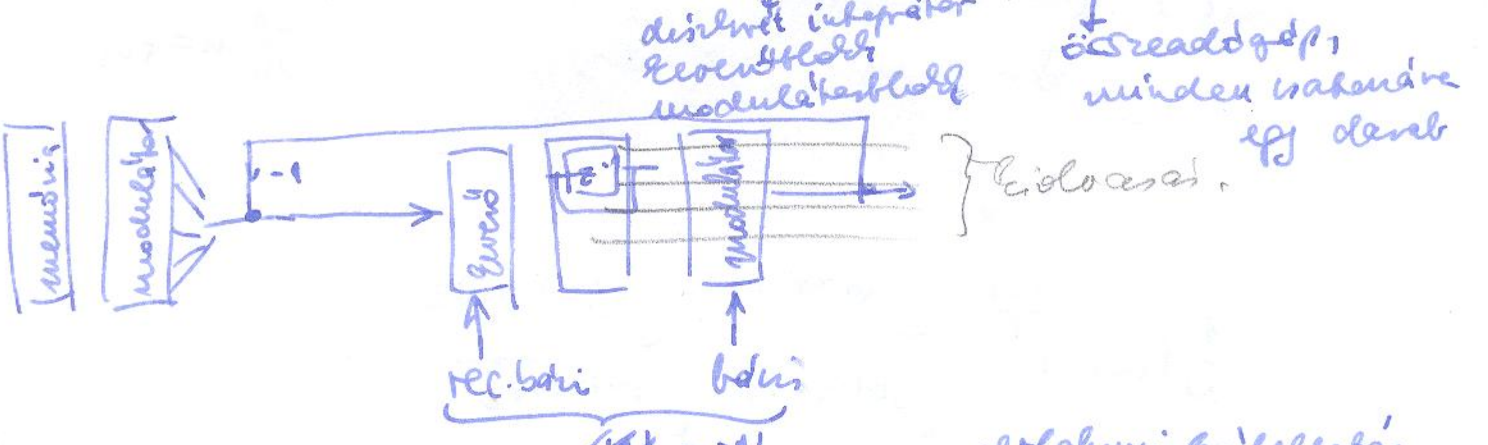
CSÚSZÓABLAKOS JELFELDOLGOZÁS

mindig az utolsó N minta alapján kapunk becslőt.

⇝ transzformációs eljárás, rekurzív sémával.

diszkrét integrátor
rezonátorok
modulátorblokk

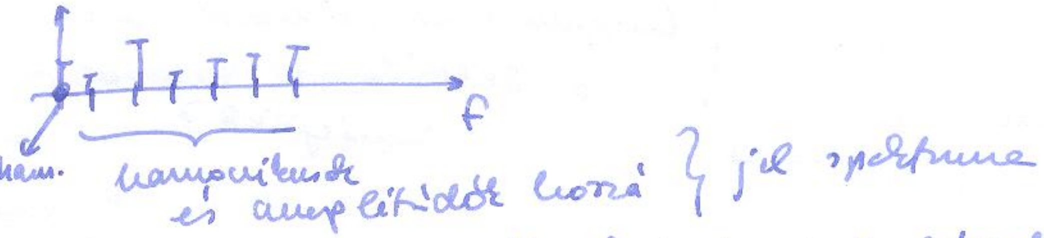
összeadógép, minden csatornára egy darab



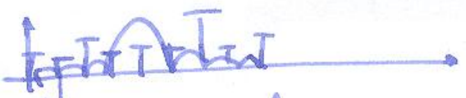
z^{-N} ⇒ egy ablaknyi késleltetés

⇒ a memóriából kiolvasható az adatsor.

2. Ha csúszóablakos, interpretálható szűrőket.
→ diszkrét frekvenciák DFT



⇒ keverés helyett az amplitúdók úgy is meghatározhatóak, hogy egy konkrét frekvencián áteresztő szűrőket használunk (ami a többin elnyom)



mintavételi frekv. / N az első!

$$\underbrace{\frac{1}{N}\left(1-z^{-N}\right)}_{\text{minden pozícióban nullahelyet}}\cdot\frac{1}{1-z_m z^{-1}}$$

$\frac{f_M}{N}$

← egy pozíció azonosítója

$z_m = e^{j\frac{2\pi}{N}m}$
⇒ itt áteresztünk

$$1-z^{-N}=\prod_{n=0}^{N-1}\left(1-z_n z^{-1}\right)$$

→ ahol $m=n$, kiesik, átenged.

kiindulás: $H(z)=\underbrace{\frac{1}{N}\left(1-z^{-N}\right)\frac{1}{1-z_m z^{-1}}}$

↳ abszolút és fázis? ↓

$$H(z)=\frac{1}{N}\,\frac{\left(z_m z^{-1}\right)^{\frac{N}{2}}\left[\left(z_m z^{-1}\right)^{-N/2}-\left(z_m z^{-1}\right)^{N/2}\right]}{\left(z_m z^{-1}\right)^{1/2}\left[\left(z_m z^{-1}\right)^{-1/2}-\left(z_m z^{-1}\right)^{1/2}\right]}\overset{*}{=}$$

$$\left(z_m z^{-1}\right)^{N/2}\cdot\left(z_m z^{-1}\right)^{N/2}=z_m^{N}\left(z^{-1}\right)^{N}=1\,z^{-N}$$

$$\frac{2\pi}{N}m=\varphi_m$$

$$z_m z^{-1}=e^{j\frac{2\pi}{N}m}\cdot e^{-j\omega T}=e^{-(j\omega T-\varphi_m)}$$

$$T=\frac{1}{f_m}$$

$$\overset{*}{=}\underbrace{\frac{1}{N}\left(z_m z^{-1}\right)^{\frac{N-1}{2}}}_{\text{abszolút }\frac{1}{N}}\underbrace{\frac{e^{j(\omega T-\varphi_m)\frac{N}{2}}-e^{-j(\omega T-\varphi_m)\frac{N}{2}}}{e^{j(\omega T-\varphi_m)\frac{1}{2}}-e^{-j(\omega T-\varphi_m)\frac{1}{2}}}}_{\left|\frac{\sin\frac{N}{2}(\omega T-\varphi_m)}{\sin\frac{1}{2}(\omega T-\varphi_m)}\right|}$$

kicsi értékre $\sin x \sim x$
$\Longrightarrow N$ $\quad \frac{1}{N}\cdot N=1$ egységnyi az m. komponensből.

⇒ ez a Lagrange-interpolációs technikája volt:

fgv. közelítés speciális polinommal
(ami egy környezetben nulla átvitelű)

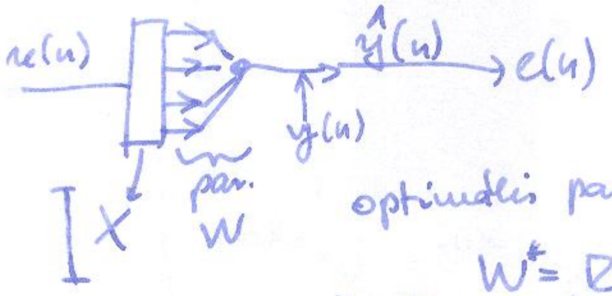
Szűrőtervezési eljárás: úgy kell szűrőt csinálni, hogy a  karakterisztikákat lin. kombinációba tesszük.

⇒ ennek végeredménye egy olyan szűrő, amivel meg tudom mondani kül. $x\frac{f_m}{N}$-re, hogy mennyi legyen ⟶ <u>frekvenciamintavételi eljárás</u>

3. Modellillesztés

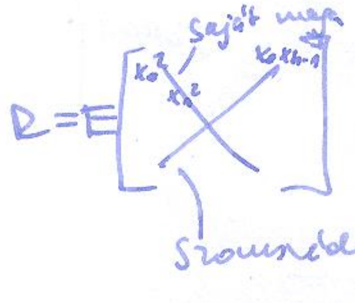
alapelve 1.)-gyel megegyező, de itt abban utazunk, hogy egy mesterséges modell és a szabad paraméterek (keresett) segítségével megközelíteni a valóságot

⇒ lineáris kombinátor (ha követésre képes, akkor adaptív)



optimális paraméter:

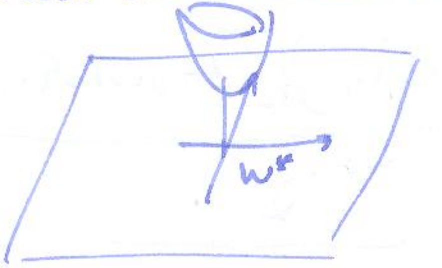
$$W^* = R^{-1}P$$



⟶ x(n) komponensek és y(n) korrelációja

$$P = E[y(n)\ x(n)]$$

⇒ kényelmes követő tulajdonsága hibanégyzet folytonos minimalizálásával képes eszköz kell



w^*: lehető legjobb illeszkedés.
(a paraboloid minimuma)

ZH. 1.

DFT N=3-ra

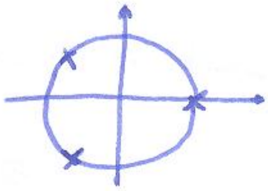
$e^{j\frac{2\pi}{N}mn}$ ← diszkrét idő

↑ „frekvencia" hanyadik harm.

$m=0,1,2$
$n=0,1,2$

$m=0 \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$m=1 \quad \begin{bmatrix}1\\e^{j2\pi/N}\\e^{j2\pi/N\cdot 2}\end{bmatrix}$



120 fokonál lévő poz.

$$m=2 \quad \begin{bmatrix}1\\e^{j2\pi/N\,2}\\e^{j2\pi/N\,2\cdot 2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\e^{-j2\pi/N}\\e^{j2\pi/N}\end{bmatrix} \qquad m=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\e^{j2\pi/N}\\e^{-j2\pi/N}\end{bmatrix}$$

bázisrendszer
$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & e^{j2\pi/N} & e^{-j2\pi/N}\\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{j2\pi/N}\end{bmatrix}$$

Konjugáltak!

reciprokbázis
$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{j2\pi/N}\\ 1 & e^{j2\pi/N} & e^{-j2\pi/N}\end{bmatrix}$$

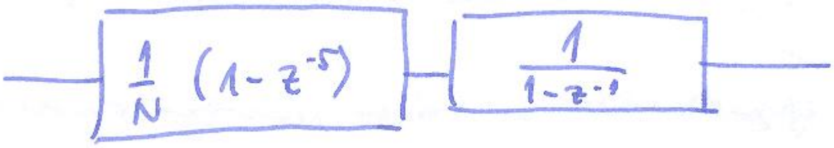
normálás!

$$\sum_i \;|\overline{\quad} + |\overline{\quad} + |\overline{\quad} = I$$

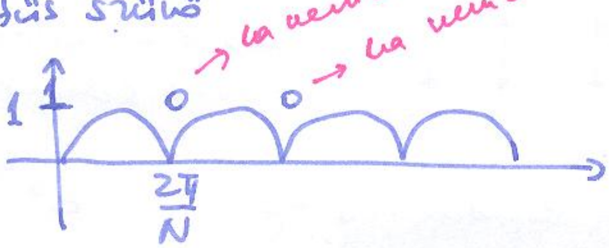
$$\underbrace{\left[I - g(0)c^T(0)\right]\left[I - g(1)c^T(1)\right]\left[I - g(2)c^T(2)\right]} = 0$$

$$I - \underbrace{\sum_{\forall i} g(i)\,c(i)}_{I} + \underbrace{\qquad\qquad}_{=0} \quad (RB\cdot B = I)$$

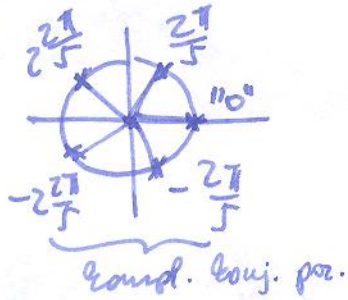
ZH.2. Lagrange-interpolációs változat

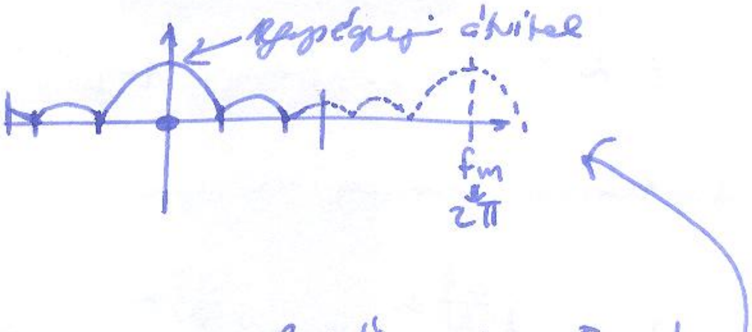


cél: a fésűs szűrő



N=5

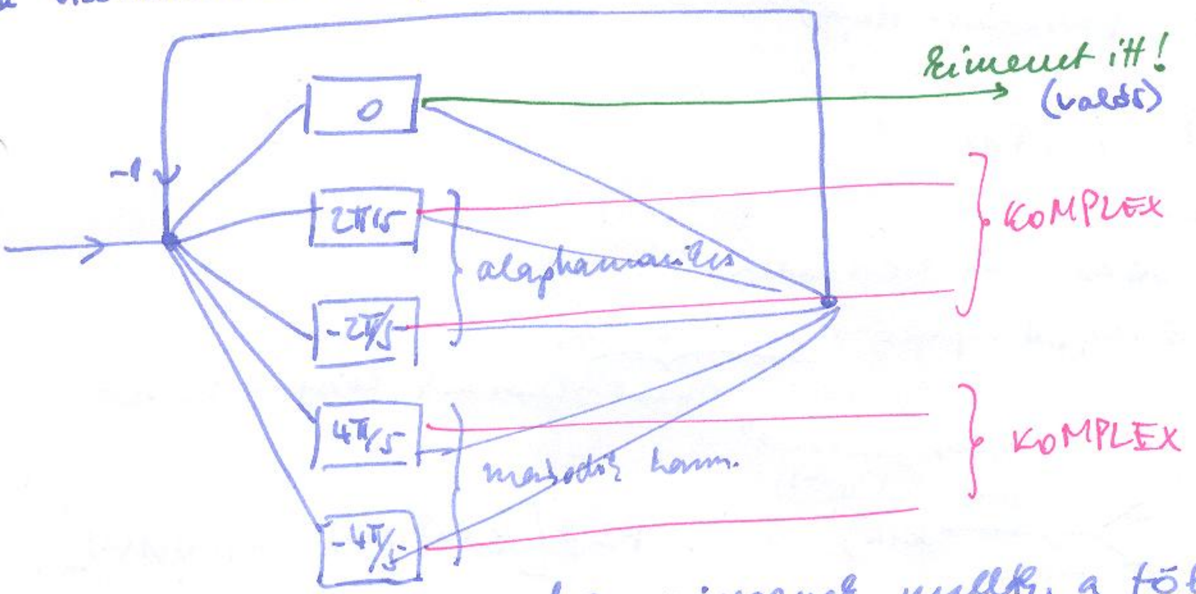




amplitúdókar: $\frac{1}{5}\,\frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}} \overset{\text{levezetés}}{\Rightarrow} \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\frac{5}{2}\omega T}{\sin\frac{1}{2}\omega T}\right|$

a mintavételi frekvenciánál (π) valamit elhúz...

ha visszacsatolásban oldjuk meg, sokkal redundánsabb



ha nincsenek nullák, a többi érték is kicsatolható megfelelő súlyozással;

(itt ez a megvalósítás túlbonyolított.)

1. feladat – transzformáltértékek!

$\underbrace{1 \; ; \; 1+j \; ; \; 1-j}$ → mi a diszkrét időfgv.?

a sorfejtés együtthatói a bázis/vektori rendszerben

$m=0 \quad e^{j\frac{2\pi}{3}0\,n}$

⇒ 1 amplitúdójú DC
→ súlytény.: 1

$m=1 \quad e^{j\frac{2\pi}{3}\cdot 1\cdot n}$ → súlytény.: $1+j$ $\qquad e^{j\frac{2\pi}{3}n}(1+j)$

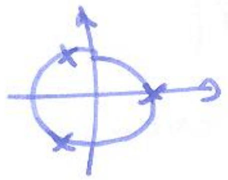
$m=2 \quad e^{+j\frac{2\pi}{3}\cdot 2n}$ → súlytény.: $1-j$ $\qquad e^{-j\frac{2\pi}{3}n}(1-j)$

időfgv.: a három dolog összege

$$1+e^{j\frac{2\pi}{N}n}+je^{j\frac{2\pi}{N}n}+e^{-j\frac{2\pi}{N}n}-je^{-j\frac{2\pi}{N}n}=$$

$N=3$

$$2(jj)\underbrace{\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n}-e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)}_{2j}$$



$$1+2\cos\frac{2\pi}{3}n-2\sin\frac{2\pi}{3}n$$

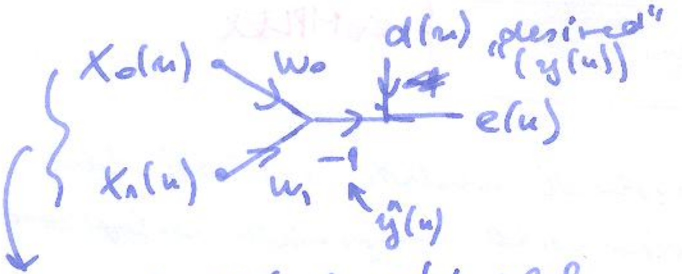
3. feladat (Wiener-Hopf)

$W=R^{-1}P \qquad (5p)$

Levezetés

Egymáshoz viszonyított fáziskülönbséget?...

→ 2 súlytényező: $\underbrace{w_0 \text{ és } w_1}$
ezzel hozzuk létre a becslőt



szinusz hullámformájú jelek

$$P=E\left[x_0(n)d(n) \quad x_1(n)d(n)\right]$$

$$R=E\begin{bmatrix} x_0^2(n) & x_0(n)x_1(n) \\ x_1(n)x_0(n) & x_1^2(n)\end{bmatrix}$$

kov. mátrixok → előtte sim.

fáziskapcsolat:

$$E\left[x_0(n)\,x_1(n)\right]$$

a fázisinformációt az argumentumok különbségével kapjuk

$$0{,}5\cos\left(\frac{4\pi}{N}\right) \Rightarrow 2 \text{ minta}$$

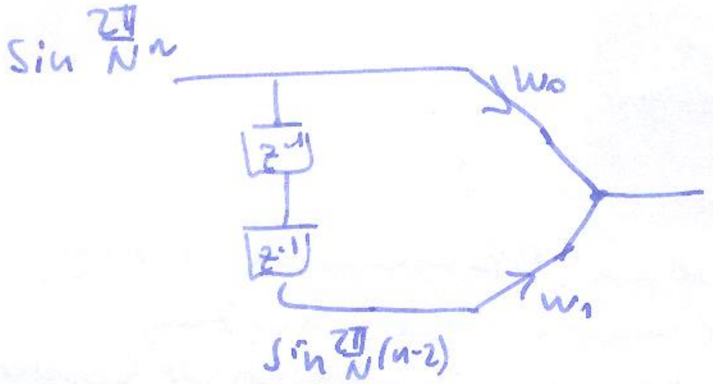
órai $\cos\frac{2\pi}{N} \Rightarrow 1$ minta

konstans fázistól

$$\sin\frac{2\pi}{N}n \quad \alpha$$

$$\sin\frac{2\pi}{N}(n-1) = \sin\frac{2\pi}{N}n - \boxed{\sin\frac{2\pi}{N}}$$

$$\underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{N}n - \frac{4\pi}{N}\right) = \sin\frac{4\pi}{N}(n-2)}_{\text{2 mintavét !}}$$



$$w_0\sin\frac{2\pi}{N}n + w_1\sin\frac{2\pi}{N}(n-2)$$

analitikus helyettesítő

} koszinusz hullámforma, az órai mutációja!

ADAPTÍV ELJÁRÁSOK, MODELLILLESZTÉS

adaptív – követőképesség, akár működés közben is
„identifikáció" is szükséges

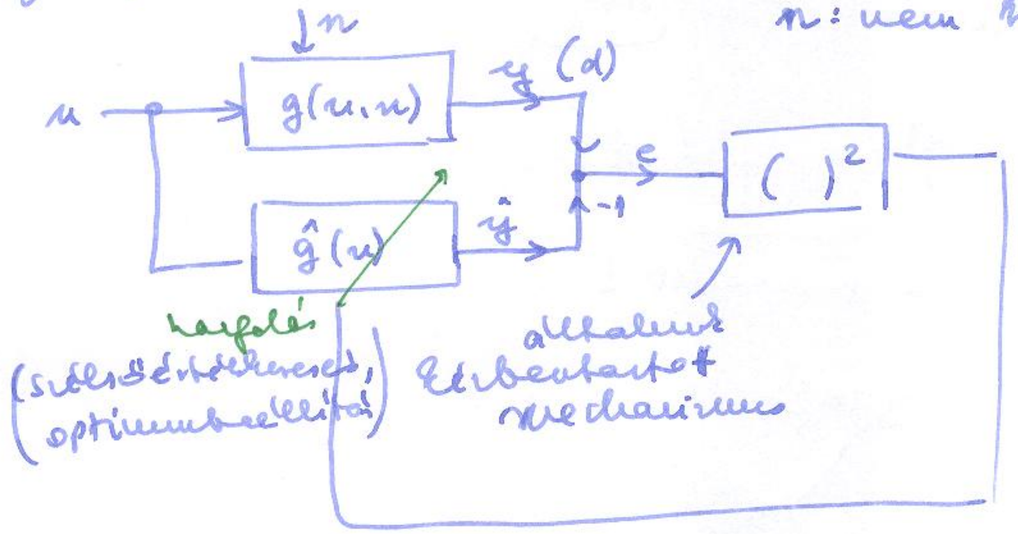
↳ módszerük sokszor egyszerű, iteratív, tanuló eljárások, számítás

a regressziós feladat alapábrája; erre húzzuk rá a modellillesztés

ma adaptív technikákat tekintjük át, mindben van vmi
többletinfó, ami hatékonyságjavulást eredményez.
→ a többletinfó módosít, mat. és intuitív elemeket hoz be
→ az alapgondolat ua. (regresszió)

fgv. kapcsolat leírása:

u: kézbentartott független vált.
n: nem kézbentartott, zaj, zavarhatás



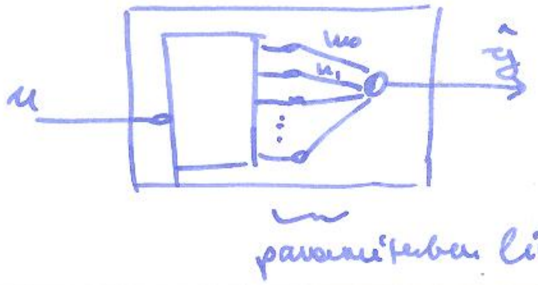
megj: párhuzamos séma (kimenetek illesztése)
soros séma (bemenetek illesztése)
↳ inverz karakterisztikát követel a g
→ ez problematikus, ritkán alk.

Továbblépés: ĝ(u) általánosítása → két rész

fix eszköz
(akár több ilyen
párhuzamosan)

↓

súlyozott lin. komb.



doboz: fgv. kapcsolat (akár nemlin.)
- u hatványaival építhető fel
- késleltetőelemekkel

paraméterben lineáris állítás. → négyzetes → deriv. → lineáris!

analitikus megoldás eszköze a Wiener-Hopf egyenlet

→ a P és az R szükséges } teljes ismeretük tipikusan illuzórikus, részleges ismerete részleges eredményt ad!
↓
keresztkorreláció

mi legyen a stratégia a beállításkor?
↳ adaptivitás, iteratív eljárás

$$W(n+1) = W(n) - \mu\nabla(n)$$

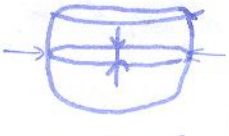
mennyiben finomítja a vektort?
hogyan mozogjunk?
hogyan hat. meg a ∇ és a μ?

elemi vizsgálatok R ismerete mellett.
pl. 2x2 mátrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

→ a két csatorna jele erősen korrelált (0.9)
⇒ ennek sajátértékei rendesen eltérnek
1,9 és 0,1
{ a paraboloid jól ellapított lesz!
→ az ereszkedés irányfüggő, nem kív.

a sajátérték sajátvektor irányában másik koordinátarendszerbe helyezhető át!



ha nem ismert P és R, akkor is előfordulhat nagy korreláció → modellezési kérdés: a cél a [illegible] olyan kialakítása, melyben kicsi a korreláció
⇒ akkor a sajátértékek közelebb kerülnek
(a sajátértékek ≠ [illegible])

mit lehet tenni? variációk!

① - (valószínűséges) LMS eljárás
→ helyette a pillanatnyi hiba, ennek négyz. kifejezésének deriváltját vesszük alapul az előrehaladásnál

$$\text{LMS:}\quad \underset{[\,]_N}{W(n+1)} = \underset{[\,]_N}{W(n)} + \underbrace{2\mu\, e(n)}_{\text{skalár}} \underset{[\,]_N}{X(n)}$$

hibakifejezés:

$$\boxed{V(n+1)=\left[\prod_{i=0}^{n}\left[I-2\mu\,\underbrace{x(i)\,x^T(i)}\right]\right]\underbrace{V(0)}_{0.\ \text{időpill. paraméterhiba}}}$$

W akt. érték
- optim. érték

„rec. bázis" „BÁZIS" → analógia!

$$\left[\cancel{\Pi}(A-GC)^N\right]=0$$

$$\prod\left(I-g(i)c^T(i)\right)=0$$

~> hatékonysága kérdőjeles; nem szerencsés nagy μ alkalmazása

② α-LMS módszer

→ azt próbálja megragadni, hogy x értéke széles tartományban változhat ⇒ a korrekció minden lépésben konstans körüli paraméterértéket pótol x függvényében (az idő előrehaladtával egyre kisebb perturbáció)

→ jó lenne ezt csillapítani → normalizálás!

→ az x hosszára normalizálunk

$$\boxed{W(n+1)=W(n)+\alpha\frac{e(n)\,x(n)}{\underbrace{x^T(n)\,x(n)}_{\text{skalár, hosszra normál}}}}$$

ekkor a paraméterhiba:

$$\boxed{V(n)=\left[\prod_{i=0}^{n}\left[I-\underbrace{\frac{\alpha}{x^T(i)\,x(i)}}_{2\mu\ \text{helyett}}X(i)\,x^T(i)\right]\right]V(0)}$$

μ nem konstans, X hosszával van kapcsolatban

⇒ a produktum a kontraktív hatás érdekében van (minél kisebb hibájú állapot)

③ R ismert (feltételezés) ⇒ Newton-módszer

Wiener-Hopf: $W^*=R^{-1}P$

$$\nabla=2RW-2P$$

$$W-W^*=\frac{1}{2}R^{-1}\nabla$$

$$\boxed{W^*=W-\frac{1}{2}R^{-1}\nabla}$$

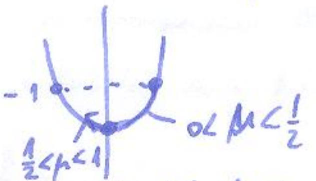
→ kiindulás a diszkrét iterációs eljárásra vonatkozóan!

$$W(n+1) = W(n) - \boxed{\frac{1}{2}} R^{-1} \nabla(n)$$

μ – a bátorsági tény. bevezetésével finomítható

$\mu = \frac{1}{2}$ optimális, de

$0 < \mu < 1$ lehet.



- pont jó helyre ($\mu = \frac{1}{2} \to 1$ lépéses)
- túllendülünk (pl. ha $\mu \approx 1$: szemközti oldal)
- ereszkedés ($\mu < \frac{1}{2}$)

$$\boxed{W(n+1) = W(n) - \mu R^{-1} \nabla(n)}$$

paraméterhiba: $\boxed{V(n+1) = (1-2\mu)^n V(0)}$

~~[illegible]~~ tiszta bemenet: $\mu = \frac{1}{2}$ egylépéses!

egyébre ugrál / ereszkedik.

! ez feltételezi az R ismeretét, és ∇ adott értékhez tartozó beállítását!

Σ: visszanyúl az elképzelhetetlenben, azaz hogy $\underbrace{R \text{ ismert}}$ nemnem...

(2. hf. ennek hatékonyságvizsgálata lesz)

Ahogy a paramétereket előállítjuk, R-re is végezhetünk becsléseket: $E(x(n)\, x^T(n))$, $n = 0, \dots$ } ha összegyűjtöttük a diadikus szorzatokat, átlagképzéssel elkezdjük becsülni (erre már van rekurzív technikánk)

$$W(n+1) = W(n) + 2\mu \underbrace{\boxed{R^{-1}(n+1)}}_{\text{becslő}} e(n)\, x(n)$$

az LMS eljáráshoz képest megjelenik R inverze

<u>LMS-Newton módszer</u>

→ iteratív módon becsüljük R-t

R mátrix inverzét igényli

paraméterhiba:

$$V(n+1) = \left[\prod_{i=0}^{n} \left(I - 2\mu \boxed{R^{-1}} x(i)\, x^T(i) \right) \right] V(0)$$

↳ Newton módszer hatása

$R^{-1}(n+1)$ hogyan áll elő?

R(n+1) lineáris kombinációból adódik (eddigi és új)

$$R(n+1) = \lambda R(n) + ?\; x(n) x^T(n)$$

stratégia: nagyobb súly az újabb adatoknak

-> összesen n+1 adat, ha lineáris átlagolás

$$\lambda = 1 - ? \text{ kell} \implies \underline{0 \le ? \le 1},$$

$$\underbrace{0 \le \lambda \le 1}, \quad \text{typ: } \lambda = 0{,}9 \dots 0{,}99$$

⇒ exponenciális átlagoló hatással képezi a becslőt

R^{-1} számítása (drága, de hatékonyan kiértékelhető)

$$\boxed{R^{-1}(n+1) = \frac{1}{\lambda}\left[R^{-1}(n) - \frac{R^{-1}(n)\, x(n)\, x^T(n)\, R^{-1}(n)}{\frac{\lambda}{?} + x^T(n)\, R^{-1}(n)\, x(n)}\right]}$$

nagy vívmány R iteratív számolása

-> a fix méretek korrekciója bevezethető,
egyre jobb a becslés

alapja: mátrixinverziós lemma

1-skalár!

$$[A + BC]^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B \cdot \underbrace{[I + CA^{-1}B]^{-1}}CA^{-1}$$

a nevezőben

nem gyönyörű, de egy ponton borzasztó hatékony

ha BC

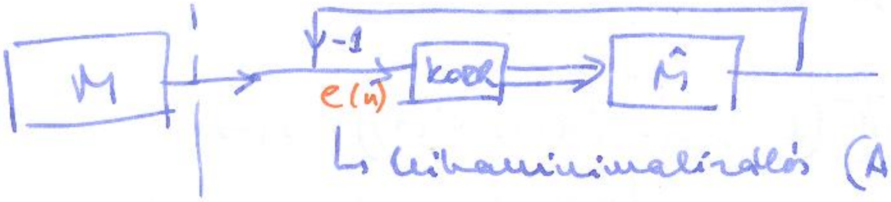
diadikus szorzat!

↓

egy diádiddal módosított mátrix!

hatékonyan implementálható!

④ Modell illesztés Kalman-prediktorral

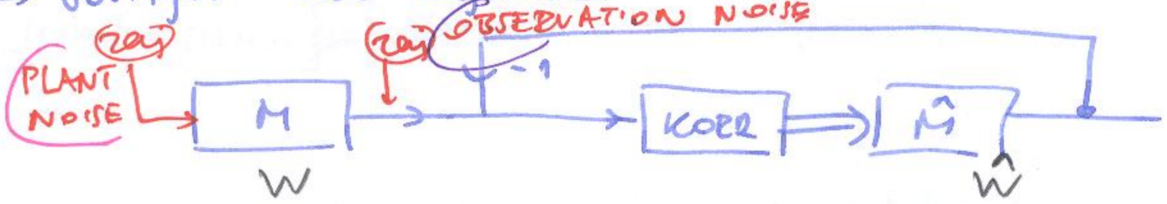


↳ hibaminimalizálás (A-GC) kontraktivitás!

de! itt nem volt zaj!

itt van nem kézbentartott x változó!

→ bővítjük: van zajhatás



- kétfajta zajforrás nehezít → rendszerzaj → megfigyelési zaj
- ennek kezelésében a különbségnek minimalizálását tűzzük ki kritériumként!

(rendszerzaj: plant noise (a megfigyelendő r., melynek állapotait szeretnénk becsülni)

megfigyelési zaj: observation noise

→ a korrekciós mechanizmust intelligensen kell beállítani;

→ ha nagyon zajos a megfigy., nem illik komolyan venni (kis korrekció)

→ ha csökken, növelhetjük a korrekciót

$$x(n+1) = A\,x(n)$$

$$W(n+1) = I\,W(n)$$

~~x(n+1)~~

$$W(n+1) = W(n) + \underline{\underline{v(n)}}$$

PLANT

OBSERVATION

$$d(n) = \underbrace{\hat{y}(n)}_{\text{becslő!}} = x^T(n)\,W(n) + \underline{\underline{n(n)}}$$

legegyszerűbb zajmodell: korrelálatlanok

$$E\left[v(i)\,v^T(j)\right] = Q(i)\,\delta(i,j) \quad ; \quad \delta(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i=j \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

hasonlóképp:

$$E\left[n(i)\,n^T(j)\right] = R(i)\,\delta(i,j) \qquad \delta = \ldots \text{ —"— }$$

→ egymástól is függetlenek

$$\hat{W}(n+1) = \hat{W}(n) + \left[d(n) - x^T(n)\,\hat{W}(n)\right]$$

↓

korábbi + korrekció

$v(n)$ és $n(n)$ additív perturbáció nehezítő elemeket

cél: stratégia a hiba minimalizálására

$$E\left[(W(n+1)-\hat{w}(n+1))(W(n+1)\,\hat{w}(n+1))^T\right]=E\left[e(n+1)\,e^T(n+1)\right]=$$

$$=P(n+1)$$

mi a keresett jellemző? amivel súlyozzuk a korrelációt!
(G mátrix)

G mátrixot keressük, úgy, hogy a négyzetes hibát minimalizáljuk

$$\frac{\partial P(n+1)}{\partial G(n)}=\dots$$

négyzetes kifejezés deriválása
→ először külső fgv. szerint
→ majd belül

$$\frac{\partial P(n+1)}{\partial G(n)}=-2E\left[e(n+1)\left[d(n)-x^T(n)\hat{W}(n)\right]^T\right]=0$$ kell!

$\hat{w}$-ba behely. → G(n) együtthatója marad!

$d(n)=x^T(n)W(n)+n(n)$

e(n+1)-et behelyettesítjük

$$E\Big[\underbrace{\underbrace{W(n)+V(n)}_{W(n+1)}-\hat{W}(n)-G(n)\big[d(n)-x^T(n)\hat{W}(n)\big]}_{e(n+1)}\Big]\Big[x^T(n)\underbrace{(W(n)-\hat{W}(n))}_{e(n)}+n(n)\Big]^T=0$$

behelyettesítünk

$$E\left[e(n)-G(n)x^T(n)\overset{}{e(n)}-G(n)\,n(n)+V(n)\right]\left[e^T(n)\,x(n)+n^T(n)\right]=0$$

$\hat{W}(n)-\hat{W}(n)$

d-ből

mindent mindennel szorzunk

$$E\Big[\underbrace{e(n)e^T(n)}_{P(n)}x(n)+\underbrace{e(n)n^T(n)}_{0\text{ a korreláció miatt}}-G(n)x^T(n)\underbrace{e(n)e^T(n)}_{P(n)}x(n)-\underbrace{0}_{\text{a korreláció miatt}}-$$

$$-0-G(n)\underbrace{n(n)n^T(n)}_{R(n)}+V(n)\underbrace{e^T(n)x(n)}_{0\text{ várh. ért.}}+\underbrace{V(n)n^T(n)}_{\text{szintén }0}\Big]=0$$

⇒ G(n) kifejezése!

$$G(n) = P(n)\,x(n)\left[x^T(n)\,P(n)\,x(n) + R(n) \right]^{-1}$$

x(n), P(n) és R(n) ismeretében számolható értéke.

$$\frac{PX}{x \cdot P \cdot x + R}$$

ilyeneket felírni tilos,
de a formális analógia
segíti a megragadást.

↘ ha R kicsi, vagy elhanyagolható
→ formálisan $\frac{1}{x} = G$.

Korábban:

$$A - GC = 0 \Rightarrow G = AC^{-1}$$

$$I - GX = 0 \Rightarrow G = Ix^{-1}$$

Lényeg: ha G zajos, R nagy, a G kicsi
ha gyenge, az arányossági tényező hangsúlyosabb lehet!

programozáshoz: P(n) és R(n) a korábbi, iterációs
eljárással biztosítható.

$$P(n+1) = E\Big[\underbrace{\big(I - G(n)x^T(n)\big)e(n) + G(n)u(n) - v(n)}_{\text{a leíró rendszer állapotátmenete}}\Big]\Big[\;.\;.\;.\;.\;\Big]^T$$

átrendezés:

$$\boxed{P(n+1) = \big(I - G(n)\,x^T(n)\big)P(n) + Q(n)}$$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Q(n) ezt additive terheli
(bizonytalanság, zajzavarhatás)

ADAPTÍV ELJÁRÁSOK + MODELL ILLESZTÉS

követőképesség

paraméter előállítás → iteratív séma

$$① \quad W(n+1) = W(n) + \mu \underbrace{(-\nabla(n))}$$

ismeretlen esetleg
→ közelíteni, tanulni próbáljuk.

sokféle megoldás; alapvető, h. iterációval javítunk.

Kerettörténet: az illesztés hibájának tekintett hibát egy különbségként írjuk fel

$$\left.\begin{matrix} d(n) - y(n) \\ y(n) - \hat{y}(n) \end{matrix}\right| \text{ négyzetes értékeinek } (\ )^{②}$$

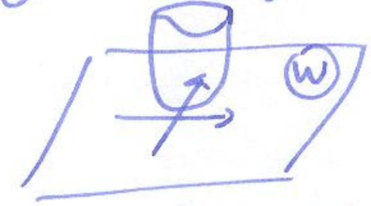
↓ deriválás után lineáris

$$\frac{\partial}{\partial w}$$

paramétereiben lineáris modell

→ a hiba értékelésének paraboloid alakú hibafelület tart. a paramétertér felett (ha lehet, lehetséges a tökéletes ill.)

$$e(n) \Rightarrow E(\ )^2$$



ennek feloldásával végtelen sok, összetett világ tárul fel.

⇒ általában meredek fal, strapás feladat.

A kezdetek iteratív, kereső eljárások;
a keresési stratégia sok ötletet életre hívott.

⇝ olyan lehetőség, amiben az összes pozíciót megvizsgáljuk (kimerítő keresés), elvileg adott, de erőforrásigényes

Legutóbb: Kalman prediktoros par. becslő ②
kísérletesen a megfigyelő sémát mutatta
↳ hogyan redukálható a hiba lépésről lépésre?

$$\boxed{V(n+1) = \underbrace{(\qquad)}_{\text{kontraktív, h. a paraméterhibát csökkentse.}} V(n) = \underbrace{(\qquad)}_{G(n)} V(0)}$$

⇒ kaptunk egy par. becslést, iterálva alk. képlete

Hf: A különféle eljárások hangolhatóak-e olyan ügyesen, hogy minél hatékonyabb legyen az opt. par. meghat.

③ A kritériumfgv. helyettesítése vmilyen eltéréssel kapcsolatban lévő C függvénnyel. $C(e(n))$

Kritériumfüggvény Taylor sorfejtése

$C(d(n), y(n))$ d és y függvénye (azaz e)

$$C(d(n), y(n)) = C(d, \underbrace{y(w)}_{\text{paraméter függvénye, ami hangolható}}) = C(w)$$

← paraméter a független változó

$w - w_k$ környékén fejtsük sorba!
→ közelítőleg írható úgy, hogy

$$C(w) \simeq C(w_k) + \underbrace{\nabla C^T(w)}_{\text{első derivált}}(w - w_k) + \frac{1}{2}(w - w_k)^T \underbrace{H(w_k)}_{\text{másodrendű deriváltak mátrixa}}(w - w_k) + \dots$$

$$H = \left.\frac{\partial \nabla C(w)}{\partial W}\right|_{w = w_k}$$

→ a modellillesztés ezen ráépülési irányából: vhol abbahagyjuk a sorfejtést, és megpróbálunk valamit kihozni...

a) → első két tagot figyeljük.

w_{k+1} meghatározásakor kell, hogy a krit. fgv. 0-t adjon

$$w_{k+1} = ? \quad \left. C(w) \right|_{w = w_{k+1}} = 0$$

$$C(w_k) + \nabla^T C(w_k)(w_{k+1} - w_k) = 0$$

$$\boxed{w_{k+1} = w_k - \left(\frac{C(w_k)}{\nabla C^T(w_k) \nabla C(w_k)} \nabla C(w_k) \right)}$$

Newton-Raphson módszer (skalárszorzat)

alapja: induljunk el a gradiens mentén, ez az optimumtól távol jól működik; de, a minimumnál lehet (~~[illegible]~~ nem mindig) nulla

ha $C(w^*) \cong 0$, akkor jó módszer.

b) → a második deriváltat nem hanyagoljuk el.

→ C(w) minimumát deriválással határozzuk meg.

$$\boxed{W_{k+1} = W_k - H^{-1}(W_k)\,\nabla C(W_k)}$$

Még egy valami. Adaptív rendszerek kapcsán, ahol az állítható paraméterek nemcsak a bemenet súlyozásában vesznek részt, hanem visszacsat. révén a kimenet súlyozásában is...

ADAPTÍV SZŰRŐK

- csak bemenet által befolyásolt par.

FIR ≡ véges impulzusválasz

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, x(n-k)}$$

(adaptív lin. komb. probléma)

n. pillanatbeli érték meghatározásánál az $x(n-N+1)$ mintát veszik utoljára figyelembe ⇒ véges a memória!

- ha az $y(n)$ a bemenetek mellett más is...

IIR ≡ végtelen impulzusválasz

$$\left. y(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} a_k\, x(n-k) - \sum_{k=1}^{M-1} b_k\, y(n-k)}_{Ⓝ \qquad Ⓜ} \right\} \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Az y-on keresztül permanens, implicit függés. A hibafelület nem paraboloid, komplikáltabb az iteráció. Kérdőjelessé tevődik az értelmezhetőség.

Implicit függés megszüntetésére adódó eljárás. (visszavezetés a FIR problémára)

← mintha operátor lenne

y(n) felírása $y(n) = \frac{A(z)}{B(z)}\, x(n)$

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \frac{A(z)}{B(z)}\, x(n)$$

B(z) e(n) minimalizálása (szűrt változat)

$$B(z)\,e(n) = \underline{B(z)\,d(n) - A(z)\,x(n)},$$

B hatását visszaadni...

$$e'(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-1} b_k\, d(n-k) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, x(n-k)} \qquad b_0 = 1$$

ez független az y-tól, csak a kívánt
jel aktuális és korábbi mintáinak és a
szűrő —"— —"— —"— —"—
lineáris kombinációja.

→ a végeredetes stabilitást nem biztosítanak
olyan jó eljárást

Tapasztalat: ha a mérések zajosak, akkor torzított becslést kapunk

→ van ára a trükköknek...

→ bizonyos feladatoknál viszont célravezető,
hogy kevesebb paraméterrel megoldható.

IIR: 10...20 együttható
FIR: 100...200

STABILITÁS ELMÉLETI MEGKÖZELÍTÉS

cél: megtaláljuk az optimumhoz konvergencia feltételeket

→ analógiákkal operálunk.

$$V(n+1) = \;\ldots\; V(n) = \;\ldots\; V(0)$$

mert a rendszerek vagy visszaállnak, mint a stabil rendszerek; energiafolyamatokat illetően [illegible] törekednek, nem tudnak megfutni; megszaladni.

→ stabilitás.

(~~Ezután~~) Ehhez egy rövid fejtegetés kapcsolódik,
végül alapul az LMS eljárást.

$$W(n+1) = W(n) + 2\mu e(n)\,x(n) \implies V(n+1) = \left(I - 2\mu x(n)\,x^T(n)\right)V(n)$$

$$V(n) \to 0$$

illetve V(n) energiája tartson nullához

LJAPUNOV: $\underbrace{\text{energiafüggvényeket}}$ kell találni

legyen most $\underline{\text{ez}}$ $G(n)$ $\qquad G(n) = V^T(n)\,V(n)$

a maradék par. hiba energiája

ennek eltűnésével neveztünk benne:

$$\Delta G(n+1) = G(n+1) - G(n) \leq 0$$

(vagy $<$)

ha G(0) valamilyen véges érték, a Lit. azt mondja, hogy ΔG-nek és az energiának majd 0-hoz kell tartania

$$\Delta G(n+1) = \underbrace{V^T(n+1)\,V(n+1)}_{\text{skalárérték}} - \underbrace{V^T(n)\,V(n)}_{\text{skalárérték}} = V^T(n)\left(I - 2\mu X(n)X^T(n)\right)^T \cdot \left(I - 2\mu X(n)X^T(n)\right) V(n) - V^T(n)\,V(n) =$$

$$= -4\mu e^2(n)\left(1 - \mu X^T(n)X(n)\right)$$

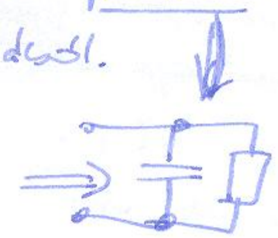
mivel μ pozitív,

$$\underline{0 < \mu < \frac{1}{X^T(n)\,X(n)}},$$

ha ez minden n-re teljesül, akkor biztosított a ΔG nullához tartása, és a maradékhiba nullához tartása, és W(n) nullához tartása $(V^T(n)X(n) \to 0)$

→ stabilitáselméleti megközelítés

→ a rendszert vezérlő folyamat passzív marad, energiadisszipáció szempontjából.



pl. pl. RC-tag

(csak nyelni tud)

$V^T(n)\,X(n) \to 0$ úgy is lehet, hogy a par. hiba nem 0, ha ortogonális a két vektor

⇒ nem mindegy X(n) megválasztása!

klasszikus méréselméleti probléma, hogy hogyan gerjesszük a passzív rendszert úgy, hogy a csillapodás hatására <u>minden</u> részletében mozogjon)

Optimális szűrők

→ véletlen hatások valósz. modellel helyettesítjük.

Fontos családok: - Wiener
- Kalman

→ a lehetséges legegyszerűbb bemutatás, a lehető legtöbb gyakorlati részlettel.

Skalár Wiener szűrő ~ batch processzor

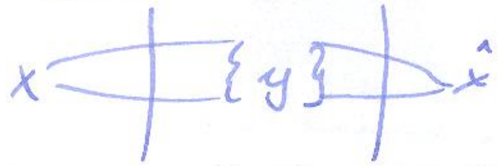
optimális nemrekurzív becslő

megfigyelési adatokból indulunk ki; N db-ot látunk

⇒ ezekből becslőt állítunk elő ($\hat{x}$)

$$y_0, y_1, \dots, y_{N-1} \Rightarrow \underbrace{\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k}_{\text{súlyozott, lineáris kombináció előállítása.}}$$

Háttérben prekoncepciónak kell lennie.
Van valahol x, vannak valahol y-ok.
Szeretnénk x-et becsülni.



hasonló a Wiener-Hopf egyenlet származtatásához.

$e = x - \hat{x}$ a megismerendő érték nem megfigyelhető, de becsülhető...

a jóságát úgy minimalizáljuk (?), hogy

$$E\{(e^2)\} = E\{(x-\hat{x})^2\} = E\left\{\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k\right)^2\right\}$$

Képezzük a deriváltját!

$$\frac{\partial E(e^2)}{\partial w_j} = -2E\left[\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k\right) y_j\right] = 0 \text{ kell.}$$

A hiba és a megfigyelt érték szorzatának várható értéke legyen nulla!... $E(e\, y_j) = 0$ ($\forall j$-re, N db)

A korreláció legyen 0, azaz a hiba és a megf. érték korrelálatlan.

másik megfogalmazás:

a hiba ortogonális a megfigyelt értékekre

⇒ megtalálása az ortogonalitás révén (?)

továbbírás:

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_k E\left[y_k y_j\right] = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{keresztkoreláció!}}}{E\left[x y_j\right]} \qquad j=0,1,\dots,N-1$$

$E[x y_j] = P_{xy}(j)$ a korrelációmátrix megfelelő eleme
↳ keresztkoreláció.

$E[y_k y_j] = \underset{\substack{\uparrow}}{R_{yy}}(k,j)$ autokoreláció (kovariancia)

a további, most y és y között értelmezve

A feladat annak vizsgálata, hogyan alakul a hiba az opt. beállításnál. ⇒ behelyettesítés.

$$E[e^2]\Big|_{min} = E\Big[e \underbrace{\Big(x-\sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k\Big)}_{\text{az egyik } e\text{-t kifejtettük...}}\Big]\Big|_{min} = E[ex] \overset{*}{=}$$

e és x_k meg e és y_k
ez nullát ad...

$$\overset{*}{=} E[(x-\hat{x})\,x] = \underbrace{E[x^2] - \sum_{k=0}^{N-1} w_k E[x y_k]}_{\text{a hiba minimális értéke.}} =$$

$$= E(x^2) - \sum_{k=0}^{N-1} w_k P_{xy}(k)$$

emlékeztető: ez az adaptív lin. komb. világa, ha

$$R_{yy} W\Big|_{opt} = P_{xy} \; ; \quad \boxed{W_{opt} = R_{yy}^{-1} P_{xy}} \; ;$$

$E(e^2)$ minimuma: $E(e^2) = E[x^2] - P_{xy}^T R_{yy}^{-1} P_{xy}$

Példa: Egyszerű átlagolás továbbfejlesztett változata.

$y_k = x + n_k$

A zaj: $E[n_j n_k] = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \sigma_n^2 & j = k \end{cases}$

$E[x\, n_j] = 0$, korrelálatlan a jel és a zaj $\forall$ j-re.

x: nulla várható értékű, σ_x^2 szórásnégyzetű mennyiség.

$E[x] = 0 \qquad E[x^2] = \sigma_x^2$

(véletlen érték átlagolása).

Mi kell a számításhoz?

- $r_{yy}(k,j) = E[y_k\, y_j] = E[(x+n_k)(x+n_j)] =$

$x.x \Rightarrow \sigma_x^2$
keresztszorzat korrelálatlan
$n_k n_j = 0$

$\Rightarrow \ = \boxed{\sigma_x^2 + \sigma_n^2\, \delta_{kj} = r_{yy}(k,j)}$

$\delta_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq j \\ 1, & \text{ha } k = j \end{cases}$

- $\boxed{p_{xy}(k) = E[x, y_k] = \sigma_x^2}$

megvannak a w meghatározására szolgáló egyenletek.

legelső sor: tartalmazza a zajt, az első mérési szorzathoz

$$\begin{aligned}
(\sigma_x^2 + \sigma_n^2) w_0 + \sigma_x^2 w_1 + \dots + \sigma_x^2 w_{N-1} &= \sigma_x^2 \\
\sigma_x^2 w_0 + (\sigma_x^2 + \sigma_n^2) w_1 + \dots + \sigma_x^2 w_{N-1} &= \sigma_x^2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \\
\sigma_x^2 w_0 + \dots \dots + (\sigma_x^2 + \sigma_n^2) w_{N-1} &= \sigma_x^2
\end{aligned}$$

Adjuk össze az összes egyenletet!...

$$\sigma_n^2 + N \sigma_x^2 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} w_k = N \cdot \sigma_x^2$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_k = \frac{N \cdot \sigma_x^2}{N \cdot \sigma_x^2 + \sigma_n^2}$$

soronként visszahelyettesítve adódik, hogy az összes súlytényező egyforma

$$w_0 = w_1 = \dots = w_{N-1} = \frac{N \sigma_x^2}{N \sigma_x^2 + \sigma_n^2} = \frac{1}{N + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2}}$$

Az eredeti feladvány a legjobb becslő előállítása volt additív zaj esetén. Ez az $\frac{1}{N}$, ha nincs zaj, de ha van, akkor

$$\boxed{\hat{x} = \frac{1}{N+\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_x}\right)^2} \sum_{k=0}^{N-1} y_k}$$

Ha egy véletlen jelenség véletlennel terhelt megfigyelését végezzük, akkor nem az átlag a legjobb becslő, hanem attól valamennyivel eltér. Az eltérés nagyban függ attól, mennyire ingadoznak. Ha nagy a zaj, tompítódik az átlagolás értéke. Ha a zaj pici a jel ingadozásához képest, akkor teljesen jogos az egyszerű átlagolás.

Jóság:

$$E(e^2) = \sigma_x^2 - \sigma_x^2 \frac{N}{N+\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_x}\right)^2} = \frac{\sigma_x^2}{N+\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_x}\right)^2}$$

megvan a bizonytalanság is.

A továbbiakban a γ paraméter a $\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_x}\right)^2=\gamma$.

A példa üzenete: ne higgyük, hogy az egyszerű átlagolás optimális becslő; ez csak akkor van így, ha nincsen zaj.

Következő példa:

egy lin. növekvő jelből 2 mintát veszünk, hogy becsüljük annak meredekségét.
→ zajmentes esetben egyenest illesztünk rá.
→ a becslés eszköze a skalár batch processzor

$$\hat{x} = \sum_{k=0}^{1} w_k y_k \qquad y_k = (k+1)x + n_k \qquad k=0,1.$$

$$k=0 \to x$$
$$k=1 \Rightarrow 2x$$

Mi a becslő, ha a megfigyelés zajos?

$$R_{yy}(k,j) = E\left[\left((k+1)x+u_k\right)\left((j+1)x+u_j\right)\right] = (k+1)(j+1)\,E(x^2) + E(u_k u_j) =$$

$$= (k+1)(j+1)\,S + \sigma_n^2 \delta_{kj}$$

$E[x^2] = S$ ~~$+\sigma_n^2$~~ $\qquad S = E(x^2) = \sigma_x^2 + \left[E(x)\right]^2$

$$P_{xy}(j) = E[x y_j] = E\left(x(j+1)(x+n_j)\right) = (j+1)\,E(x^2) = (j+1)\,S \qquad j=0,1.$$

Behely.:

$$\left.\begin{aligned}(S+\sigma_n^2)w_0 + 2S w_1 &= S\\ 2S w_0 + (4S+\sigma_n^2)w_1 &= 2S\end{aligned}\right\} \qquad w_0 = \frac{1}{5+\frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2+E^2(x)}}$$

$$w_1 = \frac{2}{5+\frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2+E^2(x)}}$$

ha $\gamma = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2+E^2(x)} = \frac{\sigma_n^2}{S}$

$$\boxed{\hat{x} = \frac{y_0+2y_1}{5+\gamma} \qquad E(e^2) = \frac{S\gamma}{5+\gamma}}$$

Mit kaptunk? Jó ez az érték?

Mi van, ha nincs zaj? $\gamma = 0 \qquad \hat{x} = \frac{y_0+2y_1}{5}$ hf!...

A továbbiakban: az alkalmazott batch processing...

regisztráltuk ⇒ számoltuk...

Hogyan alakítható ez át rekurzív számítássá?

Írjuk át az 1. példát folyamatos futásra.

Az első példa átírása:

$$\hat{x} = \hat{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k y_k$$

n: mennyit vettünk figyelembe

$$\gamma = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_x}\right)^2$$

$W_k = \frac{1}{n+\gamma}$ volt az eredmény

$$E(e^2) = E\left[(x-x_n)^2\right] = \frac{\sigma_n^2}{n+\gamma}$$

ha $N \to n$ után $n \to n+1$-et alakul...

$$\hat{x}_{n+1} = \sum_{\xi=0}^{n} w_\xi y_\xi \qquad w_\xi = w_{\xi,n+1} = \frac{1}{n+1+\gamma}$$

$$E(e_{n+1}^2) = \frac{\sigma_n^2}{n+1+\gamma}$$

$$w_{\xi,n} = \frac{1}{n+\gamma} = \frac{E[e_n^2]}{\sigma_n^2}$$

$$= \frac{E[e_{n+1}^2]}{\sigma_n^2}$$

$$\boxed{\frac{E[e_{n+1}^2]}{E[e_n^2]} = \frac{w_{\xi,n+1}}{w_{\xi,n}} = \frac{n+\gamma}{n+1+\gamma} = \frac{1}{1+\frac{1}{n+\gamma}} = \frac{1}{1+\frac{E(e_n^2)}{\sigma_n^2}}} \; (*$$

⇒ ezeket használjuk fel a rekurzív számítás előállításához.

(⇒ az opt. rek. szűrő a Kalman lesz ... ?)

$$\hat{x}_{n+1} = \frac{1}{n+1+\gamma} \sum_{\xi=0}^{n-1} y_\xi + \underbrace{\frac{1}{n+1+\gamma} y_n}_{\text{az utolsó becslésünk}} = \frac{n+\gamma}{n+1+\gamma} \hat{x}_n + \frac{1}{n+1+\gamma} y_n =$$

$$\boxed{\hat{x}_{n+1} = \frac{E[e_{n+1}^2]}{E[e_n^2]} \cdot \hat{x}_n + \frac{E[e_{n+1}^2]}{\sigma_n^2} y_n}$$

ha $\gamma = 0$ lenne, a rekurzív átlagolást látnánk.

* * *

<u>3. példa</u>: $\gamma = 2$ legyen (a zaj és a jel szórásának aránya)
↳ σ_x^2 adott. ($\hat{x}_0$ lehet 0...)

első becslő: $\hat{x}_1 = \frac{y_0}{3}$ $\qquad \underbrace{\gamma=2 \quad n=0 \quad +1}_{3}$.

$n=1; \gamma=2$

az első lépésben a négyzetes hiba: $E(e_1^2) = \frac{\sigma_n^2}{3}$

$$\hat{x}_2 = \frac{\sigma_n^2/4}{\sigma_n^2/3} \hat{x}_1 + \frac{\sigma_n^2/4}{\sigma_n^2} y_1 = \frac{3}{4}\hat{x}_1 + \frac{1}{4} y_1$$

Megjegyzés: Az $\hat{x}_1 = \frac{1}{3} y_0$ volt. Ha ezt behelyettesítjük: $\frac{1}{4}(y_0 + y_1)$, ez a nem rekurzív esettel egyező, lényegében csak egy átírás

Ha bevezetünk egy jelölést:

$$a_{n+1} = \frac{E(e^2_{n+1})}{E(e^2_n)} \qquad b_{n+1} = \frac{E[e^2_{n+1}]}{\sigma_n^2}$$

$$\boxed{\hat{x}_{n+1} = a_{n+1}\hat{x}_n + b_{n+1} y_n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_n} \quad \text{és} \quad \ast \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+b_n} = \frac{1}{1+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+b_{n+1}} \Rightarrow \quad a_{n+1} = 1 - b_{n+1}$$ lesz a visszahely. után.

Az x_{n+1} ezután úgy írható:

$$\hat{x}_{n+1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{előző időpillanat.}}}{\hat{x}_n} + \underbrace{b_{n+1}(y_n - \hat{x}_n)}_{\text{korrekciós tag}}$$

⇒ A rekurzív becslést az eddig megszerzett adatokon állítjuk elő (korrekció, iteratív séma... ~~az~~ itt az áp. átmenet meg fog jelenni)

2009.04.15.

OPTIMÁLIS „SZŰRŐK”

megfigyelési adatok: $\underbrace{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}}$ ezek alapján szeretnénk egy becslőt előállítani

legegyszerűbb: lineáris kombinátor

$$\underbrace{\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_n}_{\text{lineáris batch processzor}}$$ } időtartományban v. esetleg transzformált-tartományban értelmezhető"

cél: a hibát négyzetes értelemben minimalizáljuk.

$e = x - \hat{x}$ ⇒ WIENER-HOPF.

példákat is nézünk;

továbbiakban: hogyan lehet ezt átírni rekurzív alakká?

→ a sémát illetően megelőző becslő finomítása (predikció, korrekció)

indexek: időtartomány n. időp. ismeretében (n+1). becslése

⇒ korrekciós tag megjelenése

$$\boxed{\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + b_{n+1}(y_n - \bar{x}_n)}$$ } predikció + korrekció.

a lin. batch. proc. rekurzív átírása

Optimális rekurzív becslő származtatása (szűrő) } Skalár Kalman-szűrő.

→ korábbiakat idézi fel; változó élettörténete;

→ rekurzív becslés → aktuális időpillanatban becslünk.

SZŰRŐ v. PREDIKTOR.

↓ „n." időp. becslést rendel

↓ „n." alapján „n+1."-re jósol

jóslás: n.-ből még át kell lépni az n+1.-be.

rekurzív séma: x alakulását becsüljük. az előző pillanatbeliből születik, „a"-val való szorzással és perturbálja egy 0 várható értékű fehér zaj

$$x_n = a\cdot x_{n-1} + w_{n-1}$$

A $\{w_n\}$ sorozat $(n=0,1,\dots)$ 0 várható értékű és fehér. ~~$E(w_n)$~~ $E[w_n]=0$.

⇝ saját múltjával nem korrelál, csak önmagával szorozva ad 0-tól kül. értéket.

x_n és w_n belekapcsolt jelenségnek tulajdoníthatók, negatív értékekre nullák, energiamentes állapotból indulunk!

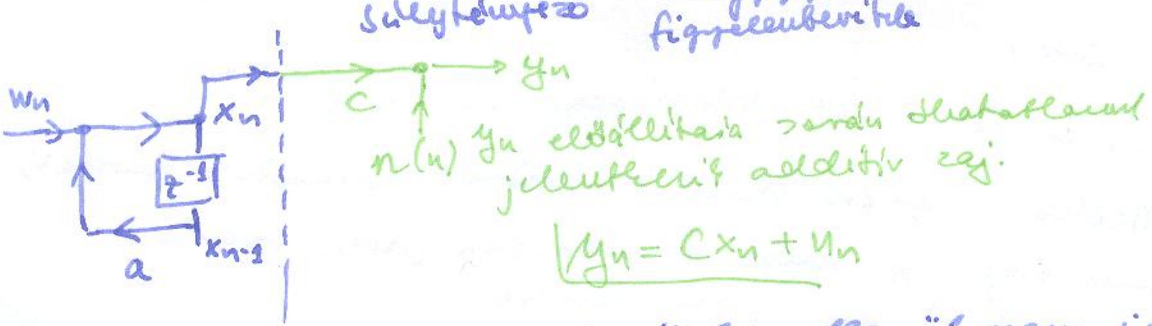
$$\left.\begin{matrix}x_n, & w_n\end{matrix}\right\} = 0;\ n<0\quad;\ x_0=0$$

$$E[w_n]=0 \qquad E[w_n w_j] = \begin{cases}0, & \text{ha } n\neq j\\ \sigma_w^2, & \text{ha } n=j\end{cases}$$

ebből indulunk, ehhez keressük rekurzív becslést.

Az n. időpillanatbeli BECSLŐ:

$$\hat{x}_n = \underset{\text{súlytényező}}{a_n}\hat{x}_{n-1} + \underbrace{b_n y_n}_{\text{megfigyelés figyelembevétele}}$$



$n(n)$ y_n előállítása során óhatatlanul jelentkező additív zaj.

$$y_n = Cx_n + n_n$$

ilyen folyamat feltételezése reális.

koncepcionális modell; a belsejét közvetlenül nem ismerjük

⇒ külső felületén tudunk érzékelni, megfigyelni

⇒ ez generálja számunkra az y_n-t.

$a_n = ?$

$b_n = ?$

Hosszadalmas, kitartást igénylő levezetés.

kiindulás: $\hat{x}_n = \cancelto{}{a}_n \hat{x}_{n-1} + \cancelto{}{b}_n y_n$

törekvés: optimumkritérium kielégítése
↳ ehhez hibát definiálunk
(becsült és valóságos eltérése)

$$\underbrace{e_n = \hat{x}_n - x_n}$$

a hiba négyzetének várható értékével dolgozunk
$E(e_n^2)$ minimalizálása.

$$E[e_n^2] \overset{!}{=} \min.$$

A kifejezés minimumát keressük $\underset{\sim}{a_n}$ és $\underset{\sim}{b_n}$ állításával.
a lépésindexet hangsúlyozzák,
azaz változnak!*

$$E[e_n^2] = E\left[\left(\cancelto{}{a}_n \hat{x}_{n-1} + \cancelto{}{b}_n y_n - x_n^{*}\right)^2\right]$$

minimum előállítása → deriválás par. szerint.
a_n és b_n szerinti derivált. (belső fgv.!!!)

$$\frac{\partial E[e_n^2]}{\partial a_n} = 2E\left[\left(a_n \hat{x}_{n-1} + b_n y_n - x_n\right)\hat{x}_{n-1}\right] =$$

$$\frac{\partial E[e_n^2]}{\partial b_n} = 2E\left[\left(a_n \hat{x}_{n-1} + b_n y_n - x_n\right) y_n\right] =$$

optimum, ha ezeket nullával tesszük egyenlővé, és keressük a paramétereket

visszaírva az eredetieket:

$$= \boxed{E[e_n \hat{x}_{n-1}] = 0}$$

$$= \boxed{E[e_n y_n] = 0}$$

azaz, hogy korrelálatlanok legyenek
(ortogonalitási feltételek)
(skalárszorzat nulla)

ORTOGONALITÁSI EGYENLETEK.

További részletek.

$\boxed{a_n}$ meghatározása → 1. ortogonalitási egyenlet

ez a másik oldalra került

$$E\left[\left(a_n\hat{x}_{n-1}+b_ny_n-x_n\right)\hat{x}_{n-1}\right]=0$$

a_nx_{n-1} hozzáadása és levonás

$-a_nx_{n-1}$ (a_nx_{n-1})

$$a_nE\left[e_{n-1}\hat{x}_{n-1}+x_{n-1}\hat{x}_{n-1}\right]=E\left[\left(x_n(1-b_nc)-b_nv_n\right)\hat{x}_{n-1}\right]$$

y_n-t behelyettesítettük.
→ itt az v_n is jelen van!

jó lesz: ortogon. egy. köv.:

- $E[e_{n-1}\hat{x}_{n-1}]=0$;

<u>mivel:</u> e_n korrelálatlan $\hat{x}_{n-1}$-gyel!

~~akkor~~ $$\hat{x}_{n-1}=a_{n-1}\underbrace{\hat{x}_{n-2}}_{e_{n-1}}+b_{n-1}\underbrace{y_{n-1}}_{e_{n-1}}$$

ezek nullát adnak, tehát áll.

- $E[v_n\hat{x}_{n-1}]=0$ ugyancsak teljesül, ~~[illegible]~~
mivel a köv. időpillanatbeli csatolással
és nem áll összefüggésben!
(v_n nem redukálja y_{n-1}-et)

⇓
egyszerűbb és áttekinthetőbb az eredmény.

$$a_n\cdot E\left[x_{n-1}\hat{x}_{n-1}\right]=\left[1-cb_n\right]E\left[x_n\hat{x}_{n-1}\right]$$

az eredeti kiindulás szerint:

$x_n=ax_{n-1}+w_{n-1}$ (ezt behelyettesítjük)

$E\left[w_{n-1}\hat{x}_{n-1}\right]=0$ lesz! (mivel a becslő korrelálatlan).

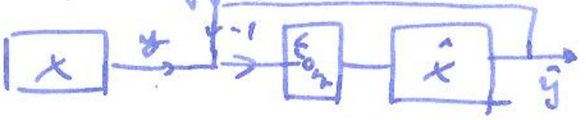
$$a_n\cdot E\left[x_{n-1}\hat{x}_{n-1}\right]=a\cdot(1-cb_n)E\left[x_{n-1}\hat{x}_{n-1}\right]$$

$$\boxed{a_n=a\cdot 1-cb_n}$$ fontos eredmény.

ha visszahelyettesítjük a becslőbe...

$$\boxed{\hat{x}_n=a\hat{x}_{n-1}+b_n\left[y_n-ac\hat{x}_{n-1}\right]}$$

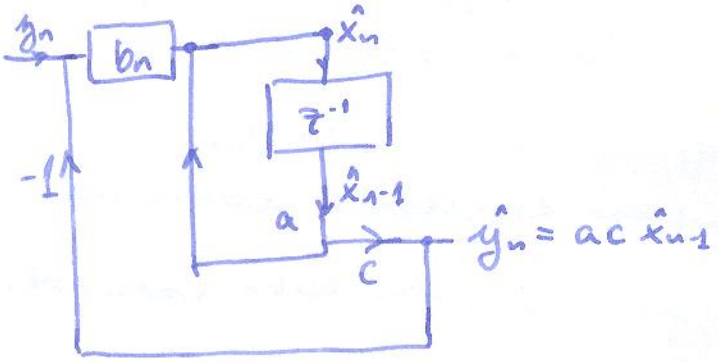
az összefüggés struktúrája megfelelő.
→ megjelenik a valóságból feltételezett mechanizmus.
(zajos és perturbált korrekciós taggal)
(a becslés és a megfigyelés különbsége)



Ha a valóságra vonatkozóan feltételezhetjük a megtett feltételezéseket, akkor az a stratégia a legjobb, amit korábban is megkaptunk.

→ lépésről lépésre visszük közelebb a hibát

→ a véletlen folyamatok miatt a hiba nem lesz nulla, de várható értéke alacsony marad.



dobozi,
korreláció,
-1 visszacsatolás } mint eddig.

$\boxed{b_n}$ meghatározása.

→ a korrelációt vesszük, a hibát csökkentő rendszerben.

kiindulás: $E[e_n^2] = E[e_n(\hat{x}_n - x_n)] = -E[e_n x_n]$

mivel: $\hat{x}_n = a_n \hat{x}_{n-1} + b_n y_n$

$e_n \hat{x}_{n-1}$
$e_n y_n$ } ortogon. egyenletek miatt 0 vh. érték.

megfigyelési egyenlet:

~~$Cx_n + n_n$~~ $y_n = Cx_n + n_n$

$$\downarrow$$

$$Cx_n = y_n - n_n$$

ezután: $cE[e_n x_n] = -E[e_n n_n] \Rightarrow \boxed{E[e_n^2] = \frac{1}{c} E[e_n n_n]}$

hiszen $e_n y_n$ az ort. felt. miatt 0 várh. értékű

fontos részeredmény!

köv. lépés: e_n behelyettesítése. $\hat{x}_n$ behelyettesítése

csak ez marad!

$$E[e_n^2] = \frac{1}{c} E[(\hat{x}_n - x_n) n_n] = \frac{1}{c} E[(a_n \hat{x}_{n-1} + b_n y_n - x_n) n_n] =$$

$$= \boxed{\frac{1}{c} b_n E[y_n n_n] = \frac{1}{c} b_n \sigma_n^2},$$ mivel: $E(\hat{x}_{n-1} n_n) = 0$, $E(x_n n_n) = 0$ } korrelálatlanok

$$E[n_n n_j] = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq j \\ \sigma_n^2, & \text{ha } n = j \end{cases} \qquad E[w_n w_j] = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq j \\ \sigma_w^2, & \text{ha } n = j \end{cases}$$

$b_n \Rightarrow$ $\boxed{b_n = c \cdot \frac{E[e_n^2]}{\sigma_n^2}}$

fontos állomás.

Látszik b_n kapcsolata a megfigyelési zajjal;

ha ennek szórása nagy, akkor kis súlyú a korrekció.

→ logikus lépésnek tűnik.

A korrekció mértéke attól is függ, mennyire vagyunk közel az optimumhoz.

Ha jól közelítettünk, nem nagyon cibáljuk a becslőt.

Még egy menet; azt mutatja be, hogyan kellett a b_n értékeket korábbi b_n értékekből, ill. várható értékekből előállítani.

Ehhez: b_n megadhatósága a korábbi négyzetes hiba értékéből.

$$\boxed{b_n \Leftarrow E[e^2_{n-1}]}$$

keressük, hogy hogyan tudjuk számolni korábbi értékekből.

$$E[e^2_n] = E[(\hat{x}_n - x_n)^2] = E[(a\hat{x}_{n-1} + b_n[y_n - ac\hat{x}_{n-1}] - x_n)^2] =$$

$$\underbrace{\hat{x}_n = a\hat{x}_{n-1} + b_n[y_n - ac\hat{x}_{n-1}]}_{\text{korábbi eredmény}}$$

$y_n = cx_n + n_n$

$x_n = ax_{n-1} + w_{n-1}$

$$= E[(\underbrace{a[1-cb_n]e_{n-1} + b_n n_n - (1-cb_n)w_{n-1}}_{3\ \text{tag.}})^2]$$

e_{n-1} → hiba

n_n → megfigyelési zaj

w_{n-1} → folyamat zaja(!)

⇒ a keresztszorzatok korrelálatlanok lesznek

- ~~X~~ $e_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} \Rightarrow w_{n-2}, n_{n-1}$ lenne, ~~[illegible]~~ ami korrelált, azaz nincs
- csak a négyzetesek adnak különbözőt.

$$\boxed{E[e^2_n] = a^2(1-cb_n)^2 E[e^2_{n-1}] + (1-cb_n)^2\sigma_w^2 + b_n^2\sigma_n^2}$$

az előző pillanatbeli hiba négyzetét a következőt

az állapotátmenettel súlyozza.

→ $a^2(1-cb_n)^2$ legyen kontraktív.

→ a perturbáló zajhatás $(1-cb_n)^2$-tel súlyozva jut be

$e_n = \hat{x}_n - x_n$ } az első hatás a különbséget próbálja csökkenteni, a második a perturbációt vizsgálja, a 3. a becslő perturbálódását [illegible] hiába fejezzük ki b_n-t, mivel e_n és e_{n-1} is benn van; még egy behelyettesítés szükséges

$\Rightarrow$ a korábbi lépésekből kiindult négyzetesítésbe eltéréssel jutunk a kiinduláshoz...

$$\left(b_n = c\frac{E[e_n^2]}{\sigma_n^2}\right) \Rightarrow E[e_n^2] = \frac{b_n}{c}\sigma_n^2$$

$$\frac{b_n}{c}\sigma_n^2 = b_n^2\sigma_n^2 = (1-cb_n)^2\left[a^2E[e_{n-1}^2] + \sigma_w^2\right] \quad /\cdot c^2$$

$$cb_n\sigma_n^2 - c^2b_n^2\sigma_n^2 = c^2(1-cb_n)^2\left[a^2E[e_{n-1}^2] + \sigma_w^2\right]$$

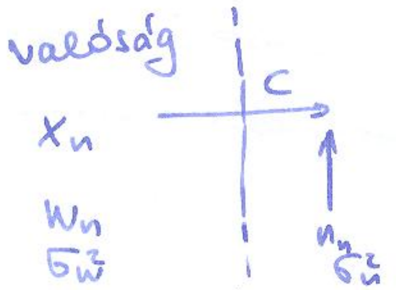
$$\cancel{c}b_n\cancel{[1-cb_n]}\sigma_n^2 = c^{\cancel{2}}(1-cb_n)^{\cancel{2}}\left[a^2E[e_{n-1}^2] + \sigma_w^2\right]$$

$$b_n\left[a^2c^2E[e_{n-1}^2] + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2\right] = c\left[a^2E[e_{n-1}^2] + \sigma_w^2\right]$$

$$\boxed{b_n = \frac{c\left[a^2E[e_{n-1}^2] + \sigma_w^2\right]}{c^2a^2E[e_{n-1}^2] + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2}}$$

A b_n-et korábban kiszámítható hibából határozza meg.

nézzük meg speciális esetekre...



- ha a megfigyelési zaj elhanyagolható (illuzórikus), azaz 0-val helyettesíthető σ_n^2

  $\Rightarrow b_n = \frac{1}{c}$

  (azaz az optimális korrekció a kicsatolás reciproka...; független a perturbáció mértékétől)

Összefoglalva: az optimális rekurzív becslő a következő egyenletekkel él:

$$\boxed{a_n = a(1-cb_n)}$$

$$\hat{x}_n = a_n\hat{x}_{n-1} + b_n y_n$$

a és c a rendszerrel kapcsolatos előzetes ismeretek.

$$\boxed{\hat{x}_n = a\hat{x}_{n-1} + b_n(y_n - ac\hat{x}_{n-1})}$$

$b_n =$

az új megfigyelés után megállapítható az új állapotbecslő, ehhez b_n kell; ezt a korábbi e_{n-1}-ből jön.

$\Rightarrow$ b_n összefüggése rekurzív!

$$E[e_n^2] = \frac{1}{c}\sigma_n^2 b_n$$

$$E[e_{n-1}^2] = \frac{1}{c}\sigma_n^2 b_{n-1}$$

Példa rekurzív becslő működésére...

$x_n = a\,x_{n-1} + w_{n-1}$ alapján generálódik x_n

$y_n = C x_n + u_n$ megfigyeléssel követjük.

$C=\underline{1}$ legyen

$y_1 = x_1 + u_1$

tfh: ismert a mechanizmus, $E[x_n]=0$

$\hat{x}_0 = 0$ (azaz 0-ról indul)

$\hat{x}_1 = b_1 y_1$

ortogonalitási egyenlet: $E[(\hat{x}_1 - x_1)y_1] = 0$

$\hat{x}_1 = b_1 x_1 + b_1 u_1$

$$E\left[\left((b_1-1)x_1 + b_1 u_1\right)(x_1+u_1)\right] =$$

$$= \underbrace{(b_1-1)\sigma_x^2 + b_1\sigma_u^2}_{\Leftrightarrow} \quad b_1 = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}$$

ha $\sigma_u^2 = \sigma_w^2$, azonos energiájú perturbáció

és $a^2 = \frac{1}{2}$

$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2} = 2\sigma_u^2$ akkor.

(az áp. egyenletből számolható)

$b_1 = \frac{2}{3}$ $\quad E[e_1^2] = \frac{2}{3}\cdot\sigma_u^2$

$$b_2 = \frac{a^2 E(e_1^2) + \sigma_w^2}{\sigma_u^2 + \sigma_w^2 + a^2 E(e_1^2)} = \frac{\frac{1}{3}+1}{1+1+\frac{1}{3}} = \frac{4}{7} = 0{,}57.$$

$E[e_2^2] = \frac{4}{7}\sigma_u^2$ és ez így folytatható.

Az első korrekciós tényező ~67%, a következő 57%

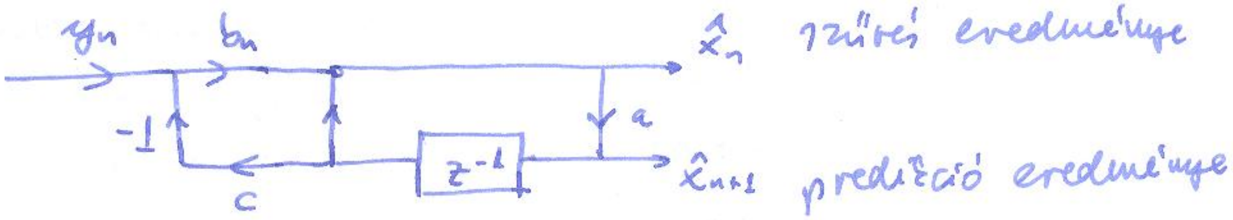
⇒ csökkenő négyzetes hiba, csökkenő eltérés

⇒ ahogy közeledünk, egyre kisebb korr. tény. és hiba

Tökéletes illeszkedés nincs, de aszimptotikusan elér egy megfelelő állapotot.

(a korábbiak prediktor struktúrájúak voltak, itt most szándékosan „szűrő" volt)

Ábra (szűrő / prediktor különbség)



A szűrt értéke n-re, a prediktált n+1-re vonatkozik. Mindkettőnél az n. időpillanatra támaszkodunk, tehát információnk mindkét lépésben ugyanakkora.

Technikai információ; az eljárások programozására.

a szűrés előtti összefüggések pontosítása (mátrixos majd ebbe...)

$$\boxed{\hat{x}_n = a x_{n-1} + b_n[y_n - a c \hat{x}_{n-1}]}$$

b_n kifejezését picit egyszerűbb formára hozzuk

$$\boxed{b_n = c \cdot p_n [c^2 p_n^2 + \sigma_n^2]^{-1}}$$

ahol $\boxed{p_n = a^2 E[e_{n-1}^2] + \sigma_w^2}$ (jelöléstechnika)

$$\boxed{E\{e_n^2\} = p_n - c b_n p_n}$$

⇒ az előzővel alternatív.

Vektoros változat ⇒ minden vektor ill. mátrix tud lenni:
⇒ zárójeles indexek.

$$X(n) = A X(n-1) + W(n-1)$$
↳ zaj állóvektor.

$$y(n) = C X(n) + N(n)$$
; C fekvő vektor, ha y skalár
↳ ha y skalár, skalár egyelemű vektor.

Összefüggések átírása:

$\sigma_N^2 \Rightarrow R(n) = E\{N(n) N^T(n)\}$
(megfigyelési zaj) → observation noise

$\sigma_w^2 \Rightarrow Q(n) = E\{W(n) W^T(n)\}$
(rendszerzaj) → plant noise

korrelációs mátrixok

skalár	mátrix
$a+b$	$A+B$
$a \cdot b$	$A \cdot B$
$a^2 b$	ABA^T
$\frac{1}{a+b}$	$(A+B)^{-1}$

a bevezetett összefüggések alapján adódik a mátrixos eset

$$\hat{x}(n) = A\hat{x}(n-1) + K(n)\left[y(n) - CA\hat{x}(n-1)\right]$$

↖ Kalman tudás elméletbe K-val jelöljük.

Kalman-erősítési vektor:

$$K(n) = P_1(n)C^T\left[CP_1(n)C^T + R(n)\right]^{-1}$$

$$P_1(n) = A\,P(n-1)\,A^T + Q(n-1)$$

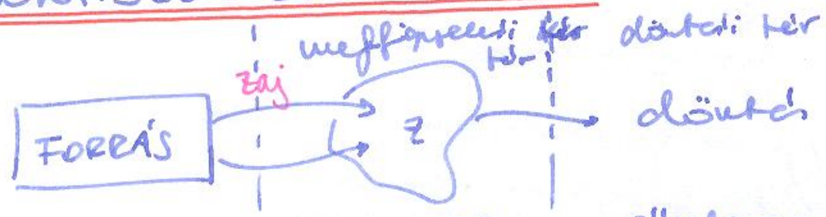
négyzetes hiba:

$$P(n) = P_1(n) - K(n)\,C\,P_1(n)$$

Ennyit az optimális szűrés néven elhíresült eljárásokról.
A továbbiakban a becsléselmélet irányába megyünk, egy szélesített elmélettel (döntéselmélet mint aleset).

↓ nem mindig egy értékre vadászunk, hanem besorolásra, clusterezés-feladatokra...
→ megfigyelésekre alapozva, melyeket zaj terhel.

DÖNTÉSELMÉLETI ALAPOK



Bináris döntési probléma: előzetesen vannak hipotéziseink arról, hogy a forrás mit küldött számunkra

⤳ radarral detektálás problémája

hipotézisek: H_0 és H_1

→ a zavarok hatására hibákat követhetünk el.

hibák: elfogadjuk H_0-t, holott H_1 igaz; valamekkora valószínűség P_M (miss probability)

van, csak nem vesszük észre

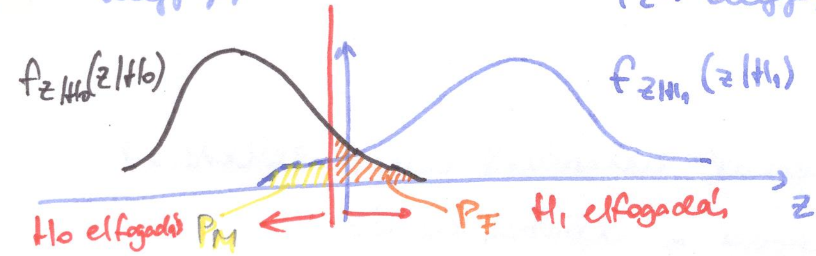
elfogadjuk H_1-t, holott H_0 igaz; valamekkora valség P_F (false alarm probability)

nincs ellenséges objektum, mégis azt mondjuk, h. van.

A zaj miatt a bizonytalanság kezelésére alkalmas eszköztár kell

A döntési probléma mibenlétének illusztrálása:

megfigyelt értékek feltételes valségsűrűsége
(Z: megfigyelt értékek)



→ a H_1 infó jön, amit perturbál a zajzavarhatás;
→ a sok küldés egy ilyen fgv mentén található meg
→ hisztogram készítéssel

nem egyértelmű, biztonságosan eldönthető a z tengelyen vételezett érték az átlapolódás miatt.

⇒ a döntési eljárás célja egy olyan küszöbérték megállapítása, hogy a fölött H_1, az alatt H_0.

⇒ ekkor véges valsége lesz annak, h. rosszat mondunk...

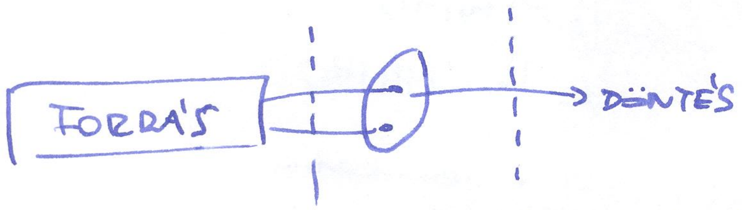
P_F és P_M leolvasható, a küszöbön túli görbe alatti területekből

A tévesztési irányától függően más és más lehet a konzekvencia, ezért nem csupán területekből, hanem költség optimalizálásból is beszélünk. (P_F és P_M ktsg.-e más!)

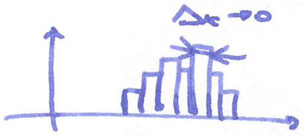
⇒ a z tengely mentén valamelyik tartományhoz eljutunk.

2009. 04. 22.

DÖNTÉSELMÉLETI ALAPOK



sűrűségfgv. → kísérletek lefuttatása, kiismerés a forrásoldalról
⇒ hisztogramsűrűséget generálunk, normálás...

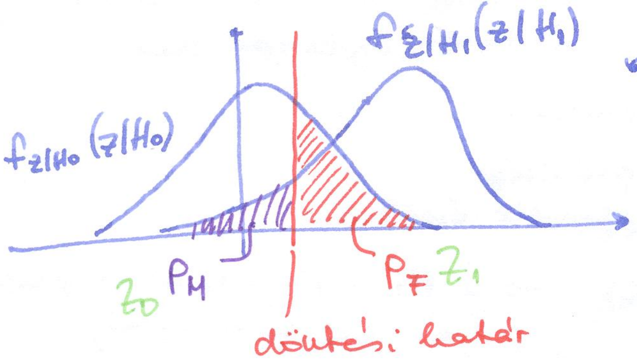


Két hipotézis van: H_0 és H_1; ezek közül az egyiket elfogadjuk.
Milyen hibákat követünk el, ha nem azt fogadjuk el, ami valóban bekövetkezett?

hibák: H_0, holott H_2 köv. be
H_1, holott H_0 köv. be
} nem egyforma a következmény.

P_M
miss probability

P_F: false probability
(felesleges)



óhatatlanul átlapolódnak!
→ két csoportra bonthatók.
→ P_F és P_M a görbe alatti.

Mi az apparátus a választóvonal helyének megtalálására?
A lehető legkisebb költségű legyen a döntés hibája.

KÉT HIPOTÉZISES BAYES DÖNTÉS → költségfaktorokat értelmezünk.

C_{ij} i-t fogadtuk el, de j-t kellett volna (a j. igaz)
↳ ez egy költség   itt: $i, j = \{0, 1\}$

bekövetkezési valószínűség:
$$P(H_i|H_j)$$
H_i-t döntünk, H_j köv. be

cél: költség minimalizálása $\boxed{\min R}$ $R \equiv$ risk, kockázat.

H_0 apriori valsége P_0
H_1 apriori valsége P_1

apriori valószínűség: előzetes ismeret, mekkora valséggel van/nincs ellenséges obj.!

$$R = C_{00} P_0 P(H_0|H_0) + C_{10} P_0 P(H_1|H_0) + C_{01} P_1 P(H_0|H_1) + C_{11} P_1 P(H_1|H_1)$$

változtatható paraméter: hová tegyük a vonalat...

$$\boxed{P(H_i|H_j) = \int_{Z_i} f_{z|H_j}(z|H_j)\,dz}$$

sűrűségfgv. alatti terület (integrál!)

$$R = C_{00} P_0 \int_{Z_0} f_{z|H_0}(z|H_0)\,dz + C_{01} P_1 \int_{Z_0} f_{z|H_1}(z|H_1)\,dz + C_{10} P_0 \underbrace{\int_{Z_1} f_{z|H_0}(z|H_0)\,dz}_{1-\int_{Z_0}} + C_{11} P_1 \underbrace{\int_{Z_1} f_{z|H_1}(z|H_1)\,dz}_{1-\int_{Z_0}}$$

hiszen sűrűségfgv. alatti terület 1

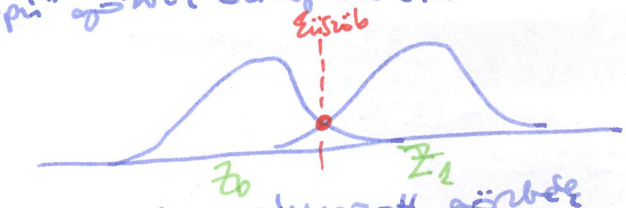
$$R = C_{10}P_0 + C_{11}P_1 + \int_{z_0} \underbrace{(C_{00}P_0 - C_{10}P_0)}_{P_0(C_{00}-C_{10})} f_{z|H_0}(z|H_0)\,dz + \int_{z_0} \underbrace{(C_{01}P_1 - C_{11}P_1)}_{P_1(C_{01}-C_{11})} f_{z|H_1}(z|H_1)\,dz$$

<u>tfh</u>: $C_{10} > C_{00}$ hibás döntés drágább!...
$C_{01} > C_{11}$

minimális, ha a két integrál ~~egyenlő~~ összege nullával egyenlő...

$$P_0(C_{10}-C_{00}) f_{z|H_0}(z|H_0) = P_1 C_{01}-C_{11}) f_{z|H_1}(z|H_1)$$

a „kétpúpú" görbét súlyozzuk!... görbe alatti terület már nem 1



ahol a súlyozott görbék metszenek, ott lesz a küszöb.
bármerre tolnánk el, költségnövekedés következik be...

a z függvényében értelmezzünk egy arányfgv.-t!

$$\boxed{\Lambda(z) = \frac{f_{z|H_1}(z|H_1)}{f_{z|H_0}(z|H_0)}} \gtrless \boxed{\frac{P_0(C_{10}-C_{00})}{P_1(C_{01}-C_{11})} = \eta}$$ ~~Bayes~~

likelihood függvény (arány)

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{ha} & \Lambda(z) > \eta & \Rightarrow H_1 \\ \text{ha} & \Lambda(z) < \eta & \Rightarrow H_0 \end{array}}$$

Bayes döntési szabály.

Speciális eset: $\boxed{\begin{array}{l} C_{01} = C_{10} = 1 \\ C_{11} = C_{00} = 0 \end{array}}$ ekkor $\eta = \frac{P_0}{P_1}$

$$P_1 f_{z|H_1}(z|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P_0 f_{z|H_0}(z|H_0)$$

Bayes összefüggés (felt. valségre)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$P_{H_1|z}(H_1|z) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P_{H_0|z}(H_0|z)$$

a-posteriori valószínűségek!

a speciális esetben az a-posteriori ~~döst~~ valségek alapján döntünk ⇒ MAXIMUM A-POSTERIORI DÖNTÉS.

pl. ① konstans jelet detektálunk.

H_0 $\quad z_k = n_k$ egy zajérték $\qquad k = \underbrace{1, 2, \dots, N}_{N \text{ megfigyelés!}}$

H_1 $\quad z_k = a + n_k$ konstans és zaj

tfh: a megfigyelések függetlenek (nem cibálják egymást)
Gauss eloszlású valószí változókat feltételezünk
↳ 0 várható értékű, σ_n^2 varianciájú...

$$f_{z|H_0}(z|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_n^2}}$$

} ez a viselkedést írja le, milyen értékeket kapunk... a csatorna kimenetén!

$$f_{z|H_1}(z|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_n^2}}$$

együttes sűrűségfgv aránya!

$\Lambda(z)$ - t N megfigyelésre írjuk fel!

$$\Lambda(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{f_{z|H_1}(z|H_1)}{f_{z|H_0}(z|H_0)} = \prod_{k=1}^{N} \frac{e^{-\frac{(z_k-a)^2}{2\sigma_n^2}}}{e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

Lehet ennél, ha nem tudunk egyszerűbb formában
vinni a kitevőt → logaritmusfüggvény.

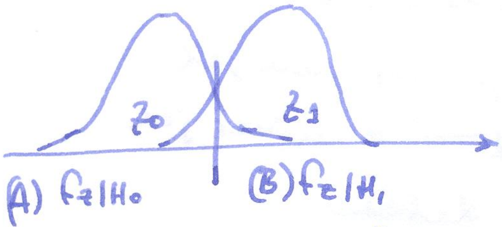
$$\ln \Lambda(z) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{(z_k-a)^2}{2\sigma_n^2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{z_k^2}{2\sigma_n^2} = \frac{a}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{N} z_k - \frac{a^2 N}{2\sigma_n^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\eta$$

$$-(z_k^2 - 2z_k a + a^2)$$

kiesik!

átrendezés: $\displaystyle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} z_k \gtrless \frac{\sigma_n^2}{N \cdot a} \ln\eta + \frac{a}{2}$

Ha a megfigyelésünk küszöb feletti ⇒ H_1
———"——— küszöb alatti ⇒ H_0



$$\Lambda(z) = \frac{f_{z|H_1}}{f_{z|H_0}} \overset{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \frac{A}{B} = \eta$$

$$\ln \Lambda(z) \qquad = \ln \eta$$

több megfigyelésből szeretnénk döntést hozni
⇓
együttes sűrűségfgv.

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{matrix}\right\} N \text{ db}$$

⇙
függetlenség esetén a gaussiak szorzata.

az átlagérték:

$$\frac{1}{N}\sum_i z_n \gtrless \frac{\sigma_n^2}{N \cdot a} \ln \eta + \frac{a}{2}$$

pl. ② Változó amplitúdójú jel detektálása.

hipotézis: H_0 nincs jelen $z_k = n_k$ $\qquad k = 1, 2, \dots N$
H_1 jelen van $z_k = a_k + n_k$

a detektor választhat megfigyeléseinket

$$f_{z|H_0}(z|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}$$

$$f_{z|H_1}(z|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(z_k - a_k)^2}{2\sigma_n^2}}$$

az előző analógiájára...

$$\ln \Lambda(z) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\overbrace{(z_k - a_k)^2}^{z_k^2 - 2z_k a_k + a_k^2}}{2\sigma_n^2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}$$

z_k^2 kiesik!

$$\ln \Lambda(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{z_k a_k}{\sigma_n^2} - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2}{2\sigma_n^2} \overset{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \ln \eta$$

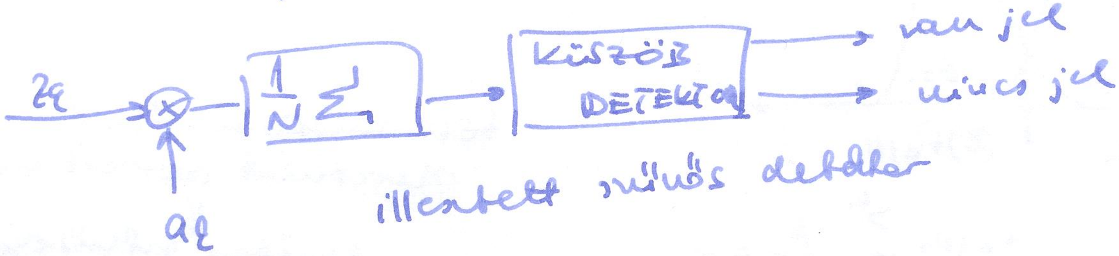
variálva...

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k z_k \overset{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N} a_k^2 + \frac{\sigma_n^2}{N} \ln \eta$$

A [illegible] úgy működjön, hogy

z_k szorozódjon a_k-val,

majd átlagoljuk → küszöbdetektor...



illesztett szűrős detektor

③ Véletlen zaj detektálása zajban

(a két zaj eltérő viselkedésű)

Két sztochasztikus folyamat.

~~[illegible]~~ a jellel kapcsolatosan: σ_a^2

a zajjal kapcsolatban: σ_n^2

k = adott megfigyelt érték

$$f_{z|H_0}(z|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}$$

$$f_{z|H_1}(z|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_a^2+\sigma_n^2}}e^{-\frac{z_k^2}{2(\sigma_n^2+\sigma_a^2)}}$$

→ a két szórás együttes hatását rögzíti.

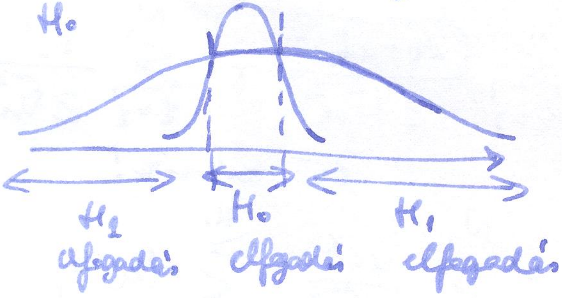
$$\ln\Lambda(z)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}-\frac{z_k^2}{2(\sigma_n^2+\sigma_a^2)}\right]}_{\text{korábbi}}+\underbrace{\frac{N}{2}\ln\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2+\sigma_a^2}}\ \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ \ln\eta$$

(N megfigyelés)

N esetben képezzük a hányadost, és a négyzetgyök miatt adódik az $\frac{1}{2}$...

Átalakítás; ~~az~~ a megfigyelések négyzetösszegére utazunk...

$$\sum_{k=1}^{N}z_k^2\ \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ \frac{2\sigma_n^2(\sigma_n^2+\sigma_a^2)}{\sigma_a^2}\left[\frac{N}{2}\ln\frac{\sigma_n^2+\sigma_a^2}{\sigma_a^2}+\ln\eta\right]$$



üzenet: a hamis jel jelenlétében (H_1) szélesedést tapasztalunk...

ha nincs hamis jel, kevésbé van szélesedve...

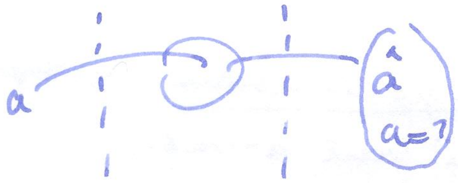
⇒ azaz a hamis tartomány „két részre szakad"

becsléselmélet: <u>folytonos</u> értéktartomány! → ez következik.

BECSLÉSELMÉLETI ALAPOK

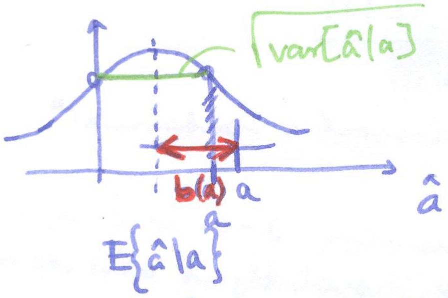
nem lét/nemlét típusú probléma, hanem adott értékekre, értéktartományra kívánunk becsléssel eldönteni...

a kerettörténet ugyanaz, rajzos csatornán megy át.
a feltételes sűrűségfgv.-ek itt is markánsan szerepelnek.



$\hat{a}$ és a viszonya?...

a-t soha nem tudjuk pontosan meghatározni:



megint hisztogramot rajzoltunk le...

↓

várhatóértékhelyes, átlagosan becslő.

szétszórtságát a varianciajellemző adja meg.

$$\sqrt{var[\hat{a}|a]}$$

torzítás (nem találunk telibe)

$$b(a)$$

BECSLÉS JÓSÁGA (mértéke)

$$f_{\hat{a}|a}(\hat{a}|a)$$

① elsőrendű...

$$E\{\hat{a}|a\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}\, f_{\hat{a}|a}(\hat{a}|a)\, d\hat{a}$$

feltételes várható érték képlete

② varianciával (kovarianciával) kapcsolatos; átlagtól képzett eltérés

$$\mathrm{cov}\{\hat{a},\hat{a}|a\} = E\left[(\hat{a}-E(\hat{a}|a))(\hat{a}-E(\hat{a}|a))^T \,\middle|\, a\right]$$

feltételes kovariancia mátrix.

③ feltételes torzítás

$$b(a) = E[\hat{a}|a] - a$$

④ átlagos négyzetes hiba (Mean Square Error ≡ MSE)

$$E\left[(\hat{a}-a)(\hat{a}-a)^T \,\middle|\, a\right] = \mathrm{cov}[\hat{a},\hat{a}|a] + b(a)\,b^T(a)$$

⑤ feltétel nélküli várható érték ≡ a feltételes v. é. v. értéke.

$$E[\hat{a}] = E_a\{E\{\hat{a}|a\}\}$$

az összes előfordulásra átlagolunk...

⑥ feltétel nélküli kovariancia

$$\mathrm{Cov}[\hat{a},\hat{a}] = E_a\{\mathrm{cov}(\hat{a},\hat{a}|a)\}$$

BAYES BECSLŐK

ismert $\boxed{f_a(a)}$ → a megfigyelt ennel jellemezhető.

paraméter megnevezése

függő változó

igazából max.

→ átlaga, szórása stb. minden meghatározható.

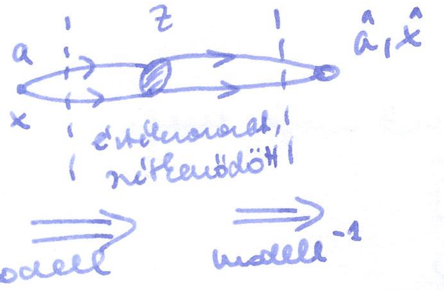
amit még tudni kell: a csatornát jellemző felt. sűr. fgv.

$$\boxed{f_{z|a}(z|a)}$$

→ kapcsolatot tudunk teremteni a <u>megfigyelés utáni</u> viszonyokra.
Képesek vagyunk megmondani, ekkor mi van a-val.

$$f_{a|z}(a|z) = \frac{f_a(a)\, f_{z|a}(z|a)}{f(z)}$$

„mit csinál az „a" paraméterrel a csatorna?"



ha ismerem z-t, mondjak valamit a-ról, próbáljuk visszacsinálni, ami történt...

f(z) kiszámítása:
$$f(z) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_z(a)\, f_{z|a}(z|a)\, da}_{\text{mit csinál az eredeti értékegyüttessel a csatorna....}}$$

⇒ ezt hordozza a működéses gondolat.

<u>de</u>! az a-nak is van szétmaszatolódása, amit a csatorna még jobban szétmaszatol, ezt tudjuk jellemezni f(z)-vel.

Minket a visszacsinálás, az ilyen előállítása foglalkoztat.
A legjobb becslőt, a legkisebb hibát előállítani képes becslőt keressük.
⇒ költségfüggvényre van szükségünk. (RISK)

$$R(\hat{a}, a) = E\{C(\hat{a}, a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C(\hat{a}, z)\, f_{a|z}(a|z)\, da$$

várható érték

→ szélsőértékkereséssel áll elő az optimális beállítás.

$$R_B = \min_{\hat{a}} R(\hat{a}, a) = \min_{\hat{a}} E\{\underbrace{C(\hat{a}, a)}_{\text{Költségfgv.}}\}$$

Konkrét módszerek a minimalizálásra…

$$R = E_z\{E_a\{C(\hat{a},a)\}\} = \int_z\int_a C(\hat{a},a) f_{z,a}(z|a)\, da\, dz =$$

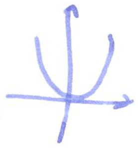
Kritériumfgv.-ből átlagos hiba. ⇒ ezt minimalizáljuk…

$$= \int_z \Big[\underset{\uparrow}{f_z(z)} \underbrace{\int_a C(\hat{a},a) f_{a|z}(a|z)\, dz}_{} \Big] dz$$

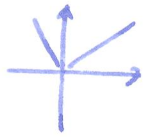
nem negatív → a feltételes átlagos hiba minimalizálása elegendő!

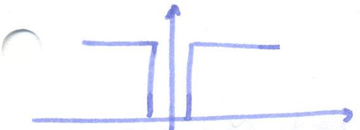
Kritériumfgv.-ek:

- $C(\hat{a},a) = \sum_{i=1}^{m}(\hat{a}_i - a_i)^2$ négyzetes eltérések Σ



- $C(\hat{a},a) = \sum_{i=1}^{m}(|\hat{a}_i - a_i|)^1$ abszolút eltérések Σ





Egy intervallumban nem büntet, egyébként nagyon.

- $C(\hat{a},a) = \begin{cases} 0 & |\hat{a}_i - a_i| \le \frac{\Delta}{2} \quad \forall_i\text{-re.} \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}$

→ a kritériumokhoz tartozó becslési eljárások előállítása

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}} \int C(\hat{a},a) f_{a|z} = 0 \quad \text{alapján.}$$

① Minimális átlagos négyzetes hibájú becslés. (MS)
(Mean-square ≡ MS)

$$R_{MS} = \int_z\int_a (\hat{a}-a)^T(\hat{a}-a)\underbrace{f_{z,a}(z,a)}_{}\, da\, dz$$

együttváltozós, nem feltételes!

→ $\frac{\partial}{\partial \hat{a}} R_{MS} = 0$ legyen!… $\quad \frac{\partial}{\partial \hat{a}} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{a}-a)^T(\hat{a}-a) f_{a|z}(a|z)\, da = 0$

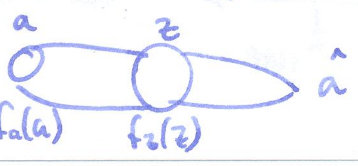
$$\Downarrow$$

a deriválás eredménye:

$$\boxed{\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} a\, f_{a|z}(a|z)\, da}$$

a-posteriori sűrűségfgv.

négyzetes értelemben optimális becslő..



a z ismeretében a-ra előállítható ismeretlen, mint sűrűségfgv.-gyel jellemzett adatunk várható értékét képezzük.

② Minimális átlagos abszolút hibájú becslés... (ABS)

→ ugyanez...

$$R_{ABS} = \iint\limits_{z\ a} |\hat{a} - a|\, f_{z,a}(z,a)\, da\, dz$$

$\hat{a}$ ~~minimalizálás~~ állításával ennek minimalizálása.

feltételes sűrűségfgv. alkalmazása

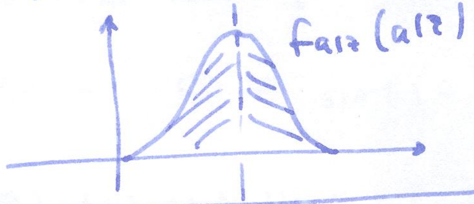
$$R_{ABS}(\hat{a}|z) = -\int_{-\infty}^{\hat{a}} (\hat{a}-a)\, f_{a|z}(a|z)\, da + \int_{\hat{a}}^{\infty} (\hat{a}-a)\, f_{a|z}(a|z)\, da$$

abszolútérték miatt 2 lépésben végrehajtandó integrálás

deriválás után a minimum beállása:

$$\int_{-\infty}^{\hat{a}_{ABS}} f_{a|z}(a|z)\, da = \int_{\hat{a}_{ABS}}^{\infty} f_{a|z}(a|z)\, da$$

Az a-posteriori sűrűségfgv. mediánjára $f_{a|z}(a|z)$ legyen a beállítás; a két terület egyezzen meg.



$$\boxed{\hat{a}_{ABS} \quad f_{a|z}(a|z) \text{ mediánja legyen.}}$$

A két becslési eljárás adhat eltérő eredményt. Csak akkor azonosak, ha a fgv. szimmetrikus, ami a csat. zaj miatt ritkán fordul elő.

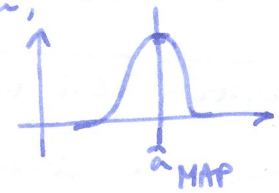
③ Maximum a-posteriori becslés. (MAP)

$$R_{MAP} = \int_{-\infty} \underset{\uparrow}{f(z)} \cdot \underbrace{\Big[1 - \int_{\hat{a}-\frac{\Delta}{2}}^{\hat{a}+\frac{\Delta}{2}} f_{a|z}(a|z)\, da \Big]}_{\text{tartományon kívül lévő dolgok.}} dz .$$

eloszlásfgv.

A [...] minimumát keressük... ha Δ kicsi, de Δ ≠ 0

optimális beállítás az a-p. sűrűségfgv. maximumhelye (az integrál akkor lesz a legnagyobb, ha a legmagasabbig megyünk el)



Mit láttunk ma?

→ döntési szituációban (igen/nem) a csatorna hatására a hipotéziseket alapul véve kaptunk javaslatot, hogy hogyan kell eljárni a döntési küszöb meghatározásánál ehhez tartománykijelölés kellett...

→ a költségeket kellett minimalizálni:

$$\Lambda(z) = \frac{f_{z|H_1}(z|H_1)}{f_{z|H_0}(z|H_0)} \leftleftarrows \text{csatorna karakterisztikája}$$

$$\Lambda(z) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

← küszöbhöz viszonyítva.

több minta együttes figyelembevétele...

küszöb { átlag ← – konstans; illesztett szűrő ← – változó; szétkent sűrűségfgv. ← – zaj } jelentett problémák.

→ teljesen folytonos hipotézissorozat.

a paraméterre vonatkozó teljes leírást, a sűrűségfgv.-t ism.

$f_a(a)$

ezután a csatorna hatását vizsgáltuk (a-ból z)

$f_{z|a}(z|a)$

utána visszafordítottuk (z-ből a)

$f_{a|z}(a|z)$

nem döntési küszöb a cél, hanem $\hat{a}$ előállítása.

⇒ az a-posteriorit alapul véve 3 módszert néztünk

- négyzetes kritérium ⇒ várhatóérték-képzés
- abszolútért. krit. ⇒ mediánképzés
- MAP krit. ⇒ csúcsérték-pozíció meghatározása.

(becsléselméleti alaptechnikák)

csak annyiban újszerű, hogy valószínűségi leírással jól jellemezhető reprezentációt alkalmaztunk...

jövő hét: becsléselméleti példák, gyak. alk.

2 hét: megismert dolgok öf., kitekintés. címszavak.

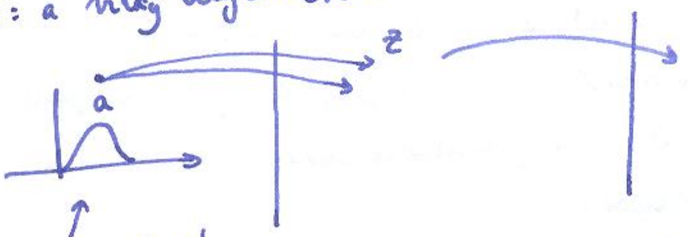
3 hét: utolsó ZH, zárás... → az elhanyagoltakból számadás

egyszerű példák és elvi eredmények

2009.04.29.

BECSLÉSELMÉLET

cél: a világ megismerése



mondjuk valamit az a-ról!
becslési stratégiák.

véletlen viselkedés
hisztogram előáll.
$f_a(a)$
→ sűrűségfüggvény, normalizált

az ismeretségünk
korlátozott, torzított

tapasztalat: a eredetileg nem volt,
a megfigyelés mégis valót.
⇒ a csatorna leképezés is véletlen.
⇒ valségi apparátus kell is

csatornakar. jellemző: felt sűrfgv.
$f_{z|a}(z|a)$

fejezetek: Bayes-becslés
$f_a(a)$ ismert és $f_{z|a}(z|a)$ ismert
ez nem tipikus, de ha ismertek, vannak előnyei

kitüntetett szerepe van annak a sűrfgv.-nek, ami a megfigyelés utáni helyzetet tükrözi ⇒ a-posteriori

$$f_{a|z}(a|z)$$

valamilyen paraméterben optimális becslés ezen a-posteriorihoz kapcs.

Bayes ⇒ 3 kritérium, az $\hat{a}$ és a eltérésének megragadására.

MS mean square $\boxed{1}$ $\hat{a} - a$ ⇒ négyzetes

ABS $\boxed{2}$ $\hat{a} - a$ ⇒ abszolútérték

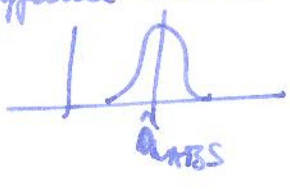
MAP $\boxed{3}$ $\hat{a} - a$  keskeny sávon belül ⇒ 0 büntetés
kívül ⇒ 1 büntetés.

↳ maximum a-posteriori

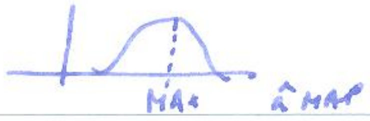
$f_{a|z}(a|z)$ → $\boxed{1}$ feltételes várható érték
$\hat{a}_{MS}$ = várható érték.

→ $\boxed{2}$ medián $\hat{a}_{ABS}$ ⇒ medián

a sűrűségfgv. azon pozíciójához rendeljük $\hat{a}_{ABS}$-t, ahol 2 egyforma részre bomlott



$\boxed{3}$ MAP
⇒ a sűrűségfgv.
maximumhelye adja
a becslési pozíciót



Két irányban folytatódik:

I. → Gauss sűrűségfüggvények

II. → nonszensz, hogy előzetesen ismerjük ;(azaz a sűrűségfgv.-t)
~> nem ismert az a-priori sűrűségfgv.-t,
a csatornakarakterisztikát stb. stb. $f_a(a)$ nem ismert
→ mit lehet tenni?

II. ffj-két lépésben csak utalunk korábbiakra; ezzel nem törődünk!!

I. NEMREKURZÍV BAYES BECSLŐ GAUSS ELOSZLÁSOK ESETÉN

kiindulási feltételezés: minden Gauss
- a keresett paraméter
- a megfigyelési zaj

$$\left.\begin{aligned} E[a] &= \mu_a \\ \mathrm{cov}[a,a] &= \Sigma_{aa} \text{ ismert} \end{aligned}\right\}\text{ paraméter}$$

$$\left.\begin{aligned} E[n] &= 0 \\ \mathrm{cov}[n,n] &= \Sigma_{nn} \end{aligned}\right\}\text{ zaj}$$

az, hogy Gauss, azért előnyös, mert az a-posteriori sűrűségfgv. momentumai explicit módon megadhatóak

U: megfigyelő csatorna

mérési elrend.: $\boxed{z = \underset{\overset{m}{n}}{U}\,\underset{n}{a} + \underset{n}{n}}$

vektoros esetben:
dim a = m
dim z = n
dim U = n * m

többváltozós „a" jellemző, több mérőcsatorna (U)

amit átugrunk: hogyan generálódik a felt. sűrűségfgv.?
eredmény: explicit módon származik belőle az első és második momentum
↳ várható érték.

$$\bullet\ \hat{a}_{MS} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{feltételes}\\ \text{sűrűségfgv-hez}\\ \text{rendelt várható érték}}}{\mu_{a|z}} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{a-priori}\\ \text{ismeret}}}{\mu_a} + \underbrace{\left\{\left[U^T\Sigma_{nn}^{-1}U + \Sigma_{aa}^{-1}\right]^{-1}U^T\Sigma_{nn}^{-1}\left(z - U\mu_a\right)\right\}}_{\text{korrekció}} \quad ⊛$$

konkrét egy példán keresztül szemléltethető.
nullát ad, ha a megfigy. U·a
⇒ ha nem, korrigáljuk az előzetes ismeretet.

A 2. és 3. esetre:

$\hat{a}_{MS} = \hat{a}_{ABS} = \hat{a}_{MAP}$ mivel az a-posteriori sűrűségfgv. egy csúcsú, szimmetrikus
⇒ ugyanazt eredményezi mindre

(pl.) mérendő egy ellenállás; ismert áram által ejtett fesz. mérésével.

$$U = I \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{az „a" paraméter}}}{R} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zaj}}}{n}$$

N db megfigyelés ⇒ z_k adatok

$$z_k = a + n_k \qquad k = 1, 2, \dots, N$$

ha feltételezhetjük az ellenállásról, hogy Gauss reprezentációja és „n" is Gauss van μ_a-val, σ_a^2-tel, $\mu_n = 0$, ismertük, $\mathrm{cov}[n_k, n_j] = \sigma_n^2 \delta_{kj}$

megfigyelési vektor: $z = U \cdot a + n$

$$z^T = [z_1, z_2, \dots, z_N]$$
$$n^T = [n_1, n_2, \dots, n_N]$$
$$u^T = [1\ 1\ 1\ 1\ \dots]$$
$$\Sigma_{nn} = \sigma_n^2 \cdot \underline{\underline{I}} \leftarrow \text{egységmátrix}$$

becslés: $\hat{a}_{MS} =$ ← a többire is így

behelyettesítés ⊛-ba: a nevező skalár lesz stb. átírjuk, végeredményt jelöljük:

$$\boxed{\hat{a}_{MS} = \frac{\mu_a + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2 \sum_{k=1}^{N} z_k}{1 + N\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2}}$$

ha az összes megfigyelés μ_a-ra szerződik, akkor $N\mu_a$, ami kiemelhető.

Gauss-eset: kedvező helyzet, a másodikmomentum felírása is reális célkitűzés.

$$\mathrm{var}[\hat{a}] = \frac{\sigma_a^2}{1 + N\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2}$$

jellegzetessége: ha a szórások nem térnek el jelentős mértékben, több megfigyelés átlagolása szerinti csökkenti a varianciát.

{ hagytuk a lépéseket, utána kell nézni!... :) }

A végeredményről:

1. megjegyzés → amit kaptunk, feltételesen torzított becslés.

várható értéke:

$$E\{\hat{a}_{MS}|a\} = \frac{\mu_a + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2 \cdot N \cdot a}{1 + N\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2}$$

eltér egymástól a becslő és az eredeti érték, meghatározható egy torzítási érték.

→ ~~ez~~: $b(a) = \frac{\mu_a - a}{1 + N\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2}$

mi történt? néztünk egy „a" jellemzőt. konkrét értékei részt vettek a megfigyelésben (feltettük, hogy mindig mért. láttuk)

→ ha „a" eltér az átlagtól, a becslő eltérést mutat a várható értéktől, ezzel a torzítással (feltételesen torzított)

2. megjegyzés:

- ha ~~p.~~ σ_a és σ_n nem azonos nagyságrendű,

$\frac{\sigma_a}{\sigma_n} \ll 1$, akkor a megfigyelések súlya kicsike.

→ akkor egy ideig nincs értelmes kimenet. (megfigyelés nem hat)

⇒ ha a megfigyelések száma a végtelenig nő, a másik tag elhanyagolható,
Σ-ban végtelen sok tag lesz, a másik tag,
$\boxed{N \to \infty}$ miatt ugyanis elhagyható a másik tag,
és eljutunk az átlagoláshoz

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z_k$$

- ha sokáig figyelünk, érdektelen az előzetes ismeret!
- sok mérés, az [illegible] számunkra ismeretekkel számolunk tovább.

variancia: ha $\frac{\sigma_a}{\sigma_n}$ kicsi, a görbénk szélesed.

⇒ ha N megnő, kellőképpen megnöveljük, értelmesre jut, hogy kisebb varianciát kapunk.

This part of the page was left intentionally blank.

Következő becslési feladat (pl.)

3 féle ugyanoda vezet gauss esetén ⇒ használhatjuk azt, ami egyszerűbben ad eredményt

ismert alakú jel, ismeretlen amplitúdója

megfigyelések:

$$z_k = \underset{\text{ismeretlen ampl.}}{a} \cdot \underset{\text{ismert jel mintái}}{s} + \overset{\text{megfigyelési zaj}}{n_k}$$

Megint minden Gauss.

$$\begin{cases} E[a] = \mu_a & \text{variancia: } var(a) = \sigma_a^2 \\ E[n] = 0 & \text{kovariancia } cov(n_i, n_j) = \sigma_n^2 \delta_{ij} \end{cases}$$

$cov[a, n_i] = 0$ ∀i-re, tehát korrelálatlanok, nem zavarják egymást.

⇒ használjuk MAP becslést.
szélsőértékkeresés.

$$\left.\frac{\partial f_{a|z}(a|z)}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0 \quad \text{(teteje)}$$

a Gauss miatt $\hat{a}_{MAP} = \hat{a}_{MS} = \hat{a}_{ABS}$ is.

Bayes-szabály alkalmazásával az a-posteriori eloszlás.

$$\left.\frac{\partial \ln f_a(a)}{\partial a} + \frac{\partial \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a}\right|_{\hat{a}=\hat{a}_{MAP}} = 0$$

$$f_a(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} \cdot e^{-\frac{(a-\mu_a)^2}{2\sigma_a^2}}$$

$$\underset{\text{csatorna}}{f_{z|a}(z|a)} = \frac{1}{2\pi(\sigma_n^2)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{N} \underbrace{(z_k - a s_k)}_{n_k}^2}$$

N db megfigyelés
⇒ N db gauss
együttese.

$$\frac{\partial \ln f(a)}{\partial a} = -\frac{a-\mu_a}{\sigma_a^2}$$

$$\frac{\partial \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{N} s_k (z_k - a s_k)$$

$\oplus = 0$?

$$\boxed{\hat{a}_{MAP} = \frac{\mu_a + (\sigma_a/\sigma_n)^2 \sum_{k=1}^{N} s_k z_k}{1 + (\sigma_a/\sigma_n)^2 \sum_{k=1}^{N} s_k^2}}$$

$$var[\tilde{a}_{MAP}] = \frac{\sigma_a^2}{1 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2 \sum_{k=1}^{N} s_k^2}$$

$$\tilde{a} = a - \hat{a}_{MAP}$$

Megjegyzések:

① $S_k = 1$ ∀ k-ra

⇒ a Σ_1 értéke N, visszakapjuk az előző példát

⇒ az ismert jel konstans volt.

⇒ az ~~[illegible]~~ erre kapott becslés megfelel

② értelmeztük korábban az illesztett szűrőt, ez itt is előállítható.

③ $\hat{a}_{MAP} = \hat{a}_{MS}$ fennáll.

---

mi van akkor, ha nincs ismeretünk a véletlen folyamatról?

II. $f_a(a)$ nem ismert!

→ a gondolkodás ugyanaz, mint eddig, csak nincs apriori sűrűségfgv.-ünk.

MAXIMUM LIKELYHOOD BECSLŐ

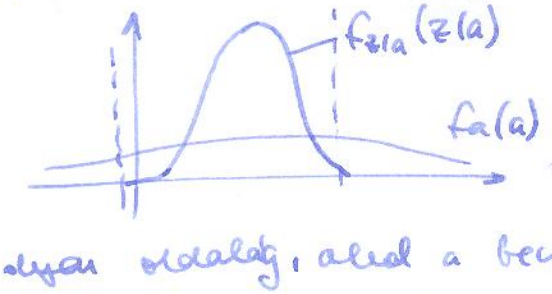
- Úgy ad választ, h. nem ismerjük az apriori sűrűségfgv-t.
- az a feltételezésünk lehet, hogy ez egy nagyon szélesen elkenődött sűrűségfüggvény.

⇒ meglépjük a csatornakarakterisztikával a MAP-ot.

⇒ ahol 0, ott kapunk olyan becslőt, amit maximum likelyhood becslőnek nevezünk.

$$\left.\frac{\partial f_{z|a}(z|a)}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{ML}} = 0 \qquad \left.\frac{\partial \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{ML}} = 0$$

ha lapos $f_a(a)$, és ehhez képest valahol elhelyezkedik $f_{z|a}(z|a)$, akkor a szétkenődött mivolta feljogosít minket arra, hogy az a-posteriorit a csatornakarakterisztikával azonosítsuk.



a nem ismert, a nem tudás, az információhiány ilyen értelemben is értelmezhető.

van olyan oldalág, ahol a becslés alapja Gauss

⇒ Gauss-Markov becslő.

Gauss-Markov becslő: az a maximum likelihood becslő, amikor Gauss a csatornák.

↓ a megfigyelési csatorna lineáris $(z = Ua + n)$

Akkor a $E[n]=0$ $\quad \mathrm{cov}(n,n) = \Sigma_{nn}$

$$f(n) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\left|\Sigma_{nn}\right|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} n^T \Sigma_{nn}^{-1} n}$$

a sűrűségfgv.

$z = Ua + n$ alakú; a csatornakarakterisztika sűrűségfüggvénye:

$$f_{z|a}(z|a) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\left|\Sigma_{nn}\right|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(z-Ua)^T \Sigma_{nn}^{-1}(z-Ua)}$$

⇒ ha ebből előállítjuk a szélsőértéket az előző technikával

$$\frac{\partial \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\underbrace{\left[-\frac{1}{2}(z-Ua)^T \Sigma_{nn}^{-1}(z-Ua)\right]}_{\text{deriváljuk!..}}\Bigg|_{a=\hat{a}_{ML}} = 0$$

eredmény:

$$U^T \Sigma_{nn}^{-1} U a - U^T \Sigma_{nn}^{-1} z = 0$$

Gauss-Markov: $\boxed{\hat{a}_{GM} = \left[U^T \Sigma_{nn} U\right]^{-1} \cdot U^T \Sigma_{nn}^{-1} z}$

olyan ML becslő, ahol Gauss eloszlású a csatornákon.
az eredmény hasonlít a Gauss esetben alkalmazott Bayes-becslésre, az a paramétervektor kovariancia-mátrixának feltételezésével, hogy végtelen.

⇒ inverze 0!

(az értékek között nagy korreláció)

Megjegyzés: $\Sigma_{aa}^{-1} = 0$ helyettesítéssel u.az; mint a Bayes

Nézzünk erre is egy példát.

Példa: van egy ilyen megfigyelésünk:

$$z_k = a + n_k \qquad k = 1, 2, \dots N \quad \text{, függetlenek.}$$

$$E(n_k) = 0$$
$$\mathrm{cov}(n_k, n_j) = \sigma_n^2 \delta_{kj}$$

a feltételes sűrűségfgv. (csatorna kar.):

$$f_{z|a}(z|a) = \prod_{k=1}^{N} f_{z_k|a}(z_k|a) = \underbrace{\frac{1}{[2\pi \sigma_n^2]^{N/2}} e^{-\sum_{k=1}^{N} (z_k - a)^2 \frac{1}{2\sigma_n^2}}}_{\text{az eddigiekkel összhangban}}$$

Maximum likelihood Gauss esetben (GM-becslés)

$$\left.\frac{\partial \ln f_{z|a}(z|a)}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{ML}} = \left.\frac{N}{\sigma_n^2}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(z_k - a)\right]\right|_{a=\hat{a}_{ML}} = 0$$

$$\boxed{\hat{a}_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z_k}$$ a GM-becslő az ideális átlagolás.

Amikor ideális átlagolást csinálunk, feltételezünk egy Gauss-csatornát, és a paraméterről nem feltételezünk. Akkor optimális az átlagolás (és akkor GM), ha a világról azt feltételezzük, hogy a csatorna Gauss és mást nem tudunk.

Rekurzív → N-1 megfigyelés:

$$\hat{a}_{N-1} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} z_k$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{a}_N = \frac{1}{N}\left[N-1\; \hat{a}_{N-1} + z_N\right] = \underline{\hat{a}_{N-1} + \frac{1}{N}\left[z_N - \hat{a}_{N-1}\right]}}$$

az új megfigyelés akkor korrigálja a korábbit, ha becsléstől eltérő értéket mutat.

Már csak egy lépés van, ez visszavezet oda, ahol már jártunk.
(Legkisebb négyzetes hibájú becslő, ahol
minden valószínűségi dologtól megszabadulunk
ismert zaj esetén)

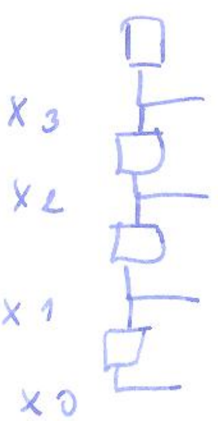
Hf: 1 feladvány mátrix kitöltés

elemeit tekintve végtelen mintasorozat
korrelációértékeit tartalmazza
⇒ diadikus szorzatok átlaga

előáll. módja: mikor annyi minta bejött, hogy már nem üres

9-10... ⇒ 1. diadikus elem
⇒ csak a maradék szorzatra kell átlagolni

késleltetővel előállított súlyozott értékek



ettől függően kell az $E(x_i, x_j)$-t előállítani;
a beléptető szakaszban nem
kell vele foglalkozni.

Legkisebb négyzetes hibájú becslők

$z_k = f_k(a) + n_k$ $\quad k = 1, 2, \dots, N$

kritérium: négyzetes $\quad C(a, \hat{a}) = \sum_{k=1}^{N} \left(\underset{\uparrow\ \text{megfigyelés}}{z_k} - \underbrace{f_k(\hat{a})}_{\text{modell}}\right)^2$

ha a megfigyelés...

$z = Ua + n$ struktúrájú, akkor

$$C(a, \hat{a}) = z^T z + (U\hat{a})^T (U\hat{a}) - z^T U\hat{a} - (U\hat{a})^T z$$

behelyettesítettük, amit ismerünk, és vektorosan
kifejtettük a négyzetes kifejezést.

↓

$\underbrace{z_k = f_k(a) + n_k}_{\text{megfigyelési struktúrája}}$ $\quad \underbrace{\text{kritérium}}$ regressziós feladat!

szeretnénk egy olyan eljárást találni,
ami minden konstrukción keresztül előálló
legkisebb hibájú becslést állít elő.

A kritériumfgv. állítható par. szerinti deriváltja legyen 0:

$$\left.\frac{\partial C(a,\hat{a})}{\partial \hat{a}}\right|_{\hat{a}_{LS}} = 0$$

$$\boxed{g(u,u)}$$

$$\boxed{\hat{g}(u)}$$

$\hat{g} := \cancel{g_0} + \cancel{g_1} u$ elképzelés, általunk beállítható paraméter

hasonló elrendezésben keressük a szélsőértéket itt is.

felhasználjuk: $[U\hat{a}]^T = \hat{a}^T U^T \Rightarrow U^T U \hat{a} - U^T z = 0$

$$\boxed{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{least square}}}{\hat{a}_{LS}} = [U^T U]^{-1} U^T z}$$

(itt: $\Sigma_{nn}^{-1} = I$ paraméteres GM becslés)

Statisztikai jell. miatt, a regressziós feladat filozófiájának megfelelően

A kritérium módosítása (súly is benne):

$$C(a,\hat{a}) = \sum_{i,k}^{N} [z_i - f_i(\hat{a})] \underbrace{q_{ik}}_{\text{súlytényező}} [z_k - f_k(\hat{a})]$$

négyzetes kritériumfgv. $Q = [q_{ik}]$ mátrix.

$$\boxed{\hat{a}_{LS} = [U^T Q U]^{-1} U^T Q z}$$

Súlyozott least square becslés.

ha Q megegyezik, ha $\underbrace{Q = \Sigma_{nn}^{-1}}_{\text{G-M becslő!}}$ (Gauss-Markov, csatornakarakterisztika)

Sokféle variáció, interpretáció, mutáció...

Függvénykapcsolat érzékeltetésére bemutatott példa jön.

Példa:

$$z_k = f_k(a) + n_k = e^{-a t_k} + n_k$$ exponenciálisan lecsengő valaminek a mintái

$k = 1, 2, \dots, N$

$\hat{a} = ?$

$C(a, \hat{a})$ kritériumfgv.

$$C(a, \hat{a}) = \sum_{k=1}^{N} \left[z_k - f_k(\hat{a}) \right]^2$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left[z_k - f_k(\hat{a}) \right] \frac{\partial f_k(\hat{a})}{\partial \hat{a}} \Bigg|_{\hat{a} = \hat{a}_{LS}} = 0$$

$$\frac{\partial f_k(\hat{a})}{\partial \hat{a}} = -t_k e^{-\hat{a} t_k}$$ behelyettesítés

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \left[z_k t_k e^{-\hat{a} t_k} \right] - \sum_{i=1}^{N} t_i e^{-2\hat{a} t_i} \Bigg|_{\hat{a} = \hat{a}_{LS}} = 0}$$

megoldása általában nem könnyű!.

$\hat{a}$ kibogozása...

Utoljára, ami még ennek az apparátusnak a használatát illusztrálja...

<u>Mozgóablakos szűrés (MA ≡ Moving Average) paraméterek LS becslése</u>

Egy y_n kimeneti értéket úgy állítunk elő: (lin. komb.)

$$y_n = \sum_{k=0}^{p} b_k x_{n-k}$$ ennek keressük a paraméterek LS becslését. (b-t keressük)

megfigyelési mátrix

~~$z = Ub$~~ $z = Ub + n$

$$z^T = [z_1, z_2 \dots z_N]$$

$$b^T = [b_0, b_1, \dots, b_p]$$

időben diszkrét megfigyelések:

$$z_n = y_n + n$$

$$\boxed{\hat{b}_{LS} = \left[U^T U \right]^{-1} U^T z}$$

bevezetjük egy mátrix képzését...

$$U^T U = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\begin{bmatrix} x_n^2 \dots & & x_{n-p} x_n \\ x_n x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \\ \vdots & & \\ x_n x_{n-p} & & x_{n-p}^2 \end{bmatrix}}_{\text{bemeneti mintából becsült autokorreláció!!}} ; \quad U^T z = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\begin{bmatrix} x_n z_n \\ x_{n-1} z_n \\ \vdots \\ x_{n-p} z_n \end{bmatrix}}_{\text{bem. minta és megf. között}} = \hat{R}_{xz}$$

$\hat{R}_{xx}$

korreláció

$$\boxed{\hat{b}_{LS} = \hat{R}_{xx}^{-1} \cdot \hat{R}_{xz}}$$

(Wiener-Hopf-hoz hasonló)

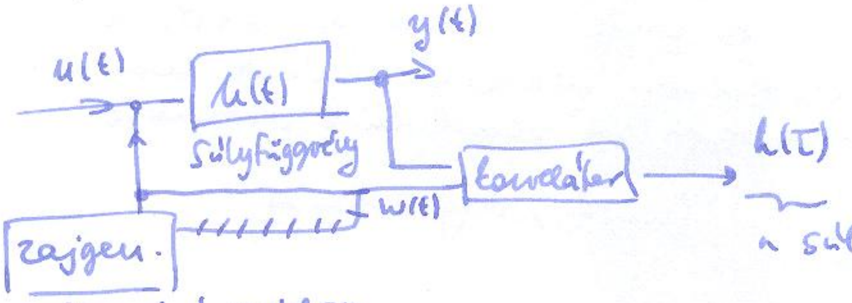
rizikó : amit meg tudunk figyelni, azzal kapcsolatosan
egészen biztos, hogy az LS technika valamit kezdeni tud.
→ lényegében hasonló apparátust igényel mint
amit a regressziószám. kapcsán feltételeztünk.
→ úgy jutottunk ide, h. egyre kevesebb dolgot feltételeztünk.

Kiindulás: mérendő: véletlen, apriori ismert
nincs összekötve olyasmivel, ami a
való életben borzasztóan fontos.

törekedni kell annak figyelésére, hogy a korrelált értékek mit mutatnak

Megjegyzés:

Korrelációs méréstech.: egy olyan eszköz, amivel az átviteli tulajdonságokat úgy lehet mérni, hogy minimálisan perturbáljuk a rendszert,
alapgondolat: abban, hogy [illegible] nevezzük, a forrástól feltételezni kell,
hogy produkál aktivitást, vagy csillapodni kell
korr. méréstech.



a súlyfgv. értékét produkálja

szélessávú módon perturbáljuk a bemenetet

$$R_{uw}(\tau)=0$$
$$R_{ww}(\tau)=\sigma_w^2\,\delta(t)\ ;\quad \sigma_w=1$$
$$R_{yw}(\tau)=E\left[y(t+\tau)\,w(t)\right]=$$
$$=E\left[h(t+\tau)*u(t+\tau)\cdot w(t)\right]+$$
$$+E\left[\left[h(t+\tau)*w(t+\tau)\right]\cdot w(t)\right]=$$
$$=E\left\{w(t)\int_{-\infty}^{\infty}w(v)\,h(t+\tau-v)\,dv\right\}=h(\tau)$$

ha $v=t$

$\sigma_w=1$
egységre normált.

a zaj nem csupán kezeli a mérési feladatot végrehajtott
a korr. méréstech. szép példája annak, hogy a determinisztikus működést minimális mértékben de széles sávban [illegible].
ortogonális kiegészítés. ([illegible])

2009.05.06. •116•

Jövő héten 2. zh ugyanabban a felállásban

30 perc ráhangolódás
2×60 perc munkaidő.

Felépítése az előzőhöz hasonló, de az 1. zh. utáni részből
optimális szűrés
döntéselmélet.
becsléselmélet.
+ mai témák.

– egyszerű feladatmegoldás
→ ezt a stílust igyekszünk megtartani.

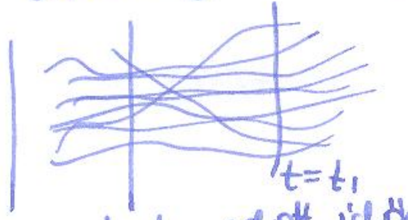
——— o ———

Ma: megjegyzés szintű téma, jelreprezentációs lehetőség a sztochasztikus jelekhez ⇒ analógiára hoz példát.
ortogonális rendszerek preferenciája
→ térbeli pontok koordinátáinak megadása.

FŐKOMPONENS ANALÍZIS / FAKTORANALÍZIS / KARHUNEN-LOÉVE TRANSZFORMÁCIÓ

sztochasztikus jelek ~> erről még nem beszéltünk

$x(t,\omega)$ kétváltozósak; az egyik változó az idő, a másik a véletlenség modellezésének használt ω; sokaságokhoz rendeltünk valamit.



időfüggvény-sokaság

$t=t_0$ adott időpillanatban vizsgálva valvál.

⇒ különféle időpillanatokban megismételhető, a véletlenség nem feltétlenül ugyanaz;

⇒ ezekhez momentumok rendelhetőek, amik az időben változnak.

egy fgv.-t véve: $\omega=\omega_0$ → szokásos vizsgálati technikák.

Hogyan generáljunk ehhez ortogonális rendszert?

megválasztásának szempont, ill. optimális egyben valamelyik szempontból.

~> általános négyzetes értelemben optimális reprezentáció

szeretnénk olyat is látni, hogy a közelítő leírás sokat spóroljon. ⇒ adatredukció.

pl. Fourier-sorfejtésnél első néhány komp. domináns.

Jó reprezentációt keresünk. Egy x sztochasztikus jelvektorhoz olyan T trafót rendelünk, ami y-t ad.

$$x^T = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$$

$$\boxed{y = Tx}$$

$$y^T = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]$$

T trafó felírása:

$$T^T = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}]$$

ortogonális trafótól elvárjuk, hogy

- $\varphi_i^T \varphi_j = \delta_{ij}$ (csak $i=j$ esetben $\neq 0$)
- $T^T T = I \Rightarrow \underbrace{T^T = T^{-1}}_{\text{transzponált egyezik az inverzzel.}}$

Hogyan áll elő x a trafó elemeiből?

$$x = T^T y = \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} y_i \varphi_i}_{\text{lineáris kombináció.}}$$

Legyen egy olyan $\hat{x}$ reprezentációnk, ami annyiban tér el, hogy $M-1$-ig halad, ahol $M < N$ (adatredukció)

$$\hat{x} = \underbrace{\sum_{i=0}^{M-1} y_i \varphi_i}_{\text{nem vesszük igénybe az összeset, csak M-et.}} + \sum_{i=M}^{N-1} b_i \varphi_i$$

Vágy: Legyenek olyan φ-k, amikből az első M érdemben hozzájárul, a többi pedig nem jelentős
$\Rightarrow$ az elhagyottak nem befolyásolnak.

Milyen eltérést, különbséget hoznak létre?

$$\Delta x = x - \hat{x} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \varphi_i - \sum_{i=0}^{M-1} y_i \varphi_i - \sum_{i=M}^{N-1} b_i \varphi_i$$

de, ehelyett egy másik megközelítést alkalmazunk...

$\underline{M \dots N-1}$ közötti tagokra → fix, előre megadott értékekkel építjük tovább.

ezt hozzávéve, a Δx megközelítése:

$$\boxed{\Delta x = \sum_{i=M}^{N-1} (y_i - b_i) \varphi_i}$$ a hiba felépülése.

ennek átlagos négyz. értelemben keressük a legjobb beállítását két dologra: b_i-re és φ_i-re.

négyzetes hiba: (b_i-re)

$$\varepsilon = E\left[|\Delta x|^2\right] = E\left[\Delta x^T \Delta x\right] = \cancel{\left[\sum_{i=M}^{N-1} E\left[(y_i-b_i)^2\right]\right]}$$

$\varphi_i^T\varphi_j = \delta_{ij}$

$$= \sum_{i=M}^{N-1} E\left[(y_i-b_i)^2\right]$$

deriválás, minimumkeresés: $\boxed{b_i = E[y_i]}$

az egyik fajta minimalizálási lépés.

Mivel az y_i-ről azt tudjuk mondani, hogy a képzési szabály szerint $\varphi_i^T x$

trafó szabály $$y_i = \varphi_i^T x \Rightarrow b_i = \varphi_i^T E[x] = \varphi_i^T \overset{\text{átlag.}}{\bar{x}}$$

A kifejtett ε négyzetes hiba:

$$\varepsilon = \sum_{i=M}^{N-1} \underbrace{\varphi_i^T\, E\Big[(x-\bar{x})}_{E[\varphi_i^T (x-\bar{x})]}\underbrace{(x-\bar{x})^T\Big]\varphi_i}_{E[(x-\bar{x})^T\varphi_i]} = \sum_{i=M}^{N-1} \varphi_i^T C_{xx} \varphi_i$$

x kovariancia mátrix (átlagtól való eltérés négyzetesen)

A négyzetes hiba függvénye az x sztoch. foly. kovarianciamátrixának és a még mindig ismeretlen φ báziselemeknek...

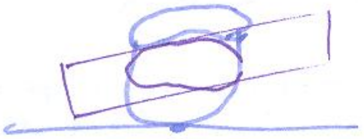
Minimális négyzetes hibát alapul véve hogyan válasszuk meg φ-t? ⇒ <u>2. lépés</u>.

$\varphi_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ feltételes szélsőérték-probléma

↳ $\varphi_i^T\varphi_j = \delta_{ij}$

$\varphi_i^T\varphi_i = 1$

illusztráció: paraboloid



gradiens 0.

→ itt egyidejű feltétel: síkon lévőt ír elő.

→ ezen a síkon, metszetben lévő legkisebb közös pontot keressük ⇒ $\hat{\varepsilon}$

Lagrange multiplikátoros módszer alkalmazása.

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \sum_{i=M}^{N-1} \beta_i \left[\underbrace{\varphi_i^T \varphi_i - 1}_{\text{a kötést belevesszük!}} \right]$$

⇒ ennek keressük a minimumát.

⇒ ismeretlen báziselemek szerinti derivált.

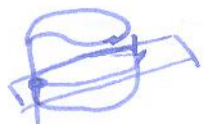
$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \varphi_i} = 2 C_{xx} \varphi_i - 2 \beta_i \varphi_i$$

↑ multiplikátor tényező

ε fenti értékét használjuk

$$\varepsilon = \sum_{i=M}^{N-1} \varphi_i^T C_{xx} \varphi_i$$

} ezt deriválva (négyzetes)



ide akarunk lejutni, ez legyen 0.

⇓

$$\boxed{C_{xx} \varphi_i = \beta_i \varphi_i}$$

az eredmény.

↑ sajátvektor ↑ sajátérték.

Ezt visszahelyettesítjük:

$$\boxed{\varepsilon_{min} = \sum_{i=M}^{N-1} \beta_i}$$

Megkaptuk az átlagos négyzetes értelemben legjobb megoldást.

kov. mátrix ⇒ sajátvektor, sajátérték ⇒ opt. beállítás.

y kovariancia mátrixa:

$$\boxed{C_{yy} = \underbrace{T C_{xx} T^T}_{} = diag < \beta_0, \beta_1, \dots \beta_{N-1} >}$$

diagonálmátrix, elemei a sajátértékek.

A T transzformáció olyan együtthatókészletet állít elő, ami diagonálmátrix; azaz a keresztkorrelációk nullák, egyi-k korrelálatlanok.

Σ: arra szólít fel minket, hogy válasszuk ki az első N sajátértékét, nagyság szerint sorba rendezve válasszuk az első M-et, ~~ezeket~~ a legkisebbeket figyelmen kívül hagyhatjuk (M … N−1)

⇒ periodikus fiziológiai jelek, pl. EKG tömörítése.

⇒ az EKG M olyan bázisból épül fel, ami a fő jellegzetességeit megadja, az elkövetett hiba pedig kiküszöbölhető.

utóbb: a sajátvekt. / sajátért. problémával már nem foglalkoztunk, mikor a Wiener-Hopf korrelációt felírtuk akartuk jól megoldani ⇒ tengelyirányok, mat. koord. rendszer. (lényegében ugyanaz a megoldás)

— ○ —

még pár szó a zárthelyiről.

- adott sztoch. foly. ⇒ azonosítása: x
  ennek van egy kov. mátrixa
  sajátért., sajátvekt.-okkal

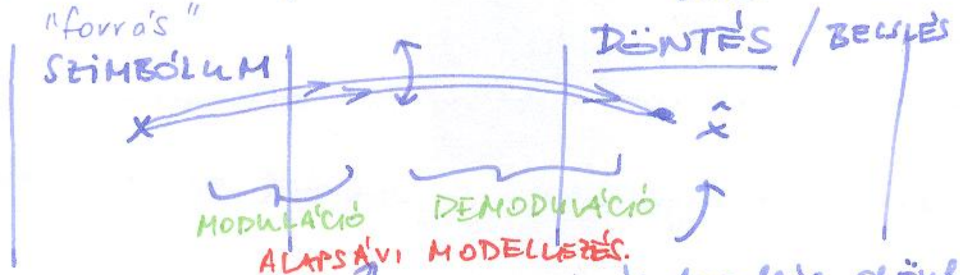
?: ha elspóroljuk ennyi elemet, mennyi lesz a négyzetes hiba minimuma
⇒ összeadás, kész.

— ○ —

Kitekintés jellegű ügyek.

1. JELÁTVITELI RENDSZEREK

- felettébb szoros :) ; analógia jól kiépíthető.
- itt is 3 részre tagozódik



x becslése döntésen alapul amiatt, h. detektálásban fix készletből választódik.

csatorna, ami általában zajos! ⇒ ezt kell visszaállítani

az átviteli csatorna és a vétel oldalán is vannak specialitások: moduláció és demoduláció formájában

- hatékonyság növelése
- jobbára frekvenciatranszpozíció (vivőre ültetés)

⇒ a csatorna modellezése sokkal szélesebb kör, mint az itt tárgyaltak; a távközléselméletben a csatorna modellezése a nagyobb fejezet!.

⇒ minél jobb csatornakihasználtság is fontos; méréselméletben ez másképp jelenik meg.

modellezés: jelátviteli rendszereknél kiemelt az alapsávi modellezés; a mod/demod. ritkább szakirodalomban szerepel.

2. NEMLINEÁRIS

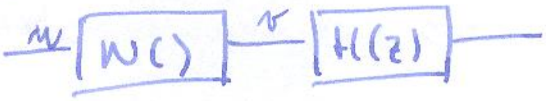
→ a való világ nemlin.
→ ezért a gyakorlati probléma, ahol megmaradhatunk a lineáris közelítésnél.
→ szakaszosan lineáris.
→ a méréselm. ~~[illegible]~~ a nemlin. dolgok kezelése nélkül.
→ sok óra, akár nehéz ~~tárgy~~ tárgy.
→ csak egy-két dologra térünk ki.

- a szuperpozíció hiánya. ⇒ szintfüggő.
  a probléma nem dekomponálható.
  ⇒ semmi nem mindegy.

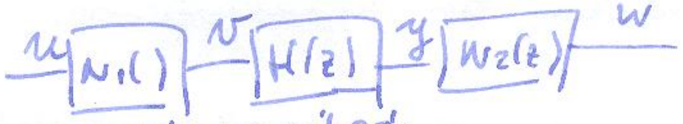
⇒ nincsen jó, általános elmélet!

- próbálkozások: Speciális bemenő jelek alkalmazása
  szinuszos, leíró függvények
  ⇒ pl. dióda – folyási áram.

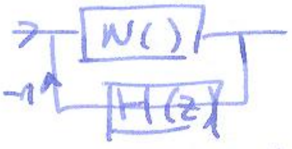
Speciális struktúrák ⇒ stat. és din. szétválasztása
nemlin. ↲ ↳ lin.



változatai:

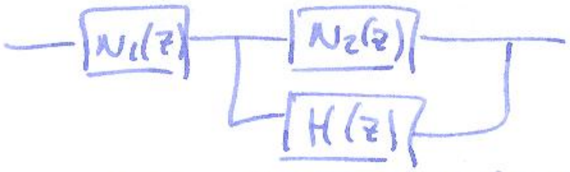


két nemlinearitás.
ezeket visszacsatolás is



lineáris a visszacsat. ágban.

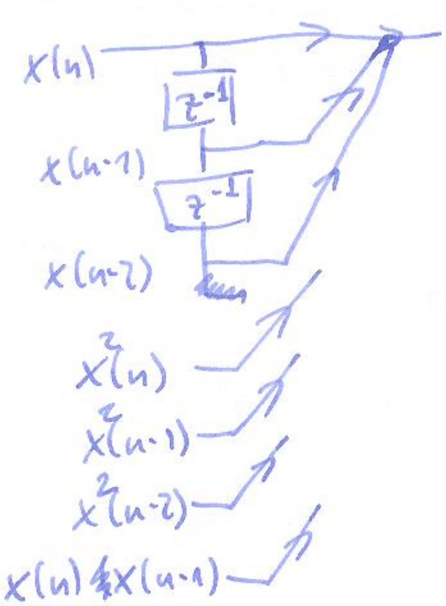
⇒ a kettő kiegészíthető:



Sorfejtések ⇒ munkaponti linearizálás.
⇒ szakaszosan lineáris megragadása.

konvolúció általánosítása → Volterra-sorok.

Volterra-sorok (elkorcsosult változat)



bővíthető úgy, hogy nem csak lin. komb.-ot, hanem különféle szorzatokat is előállítunk.
→ egyértelműen látszik a mintfüggőség.

Nemlineáris szűrés

medián szűrő → ptlan. hosszúságú ablak. (N=2K-1)
↳ a beérkezett mintákat nagyság szerint rendezi sorba, és a középsőt adja kimenetnek.

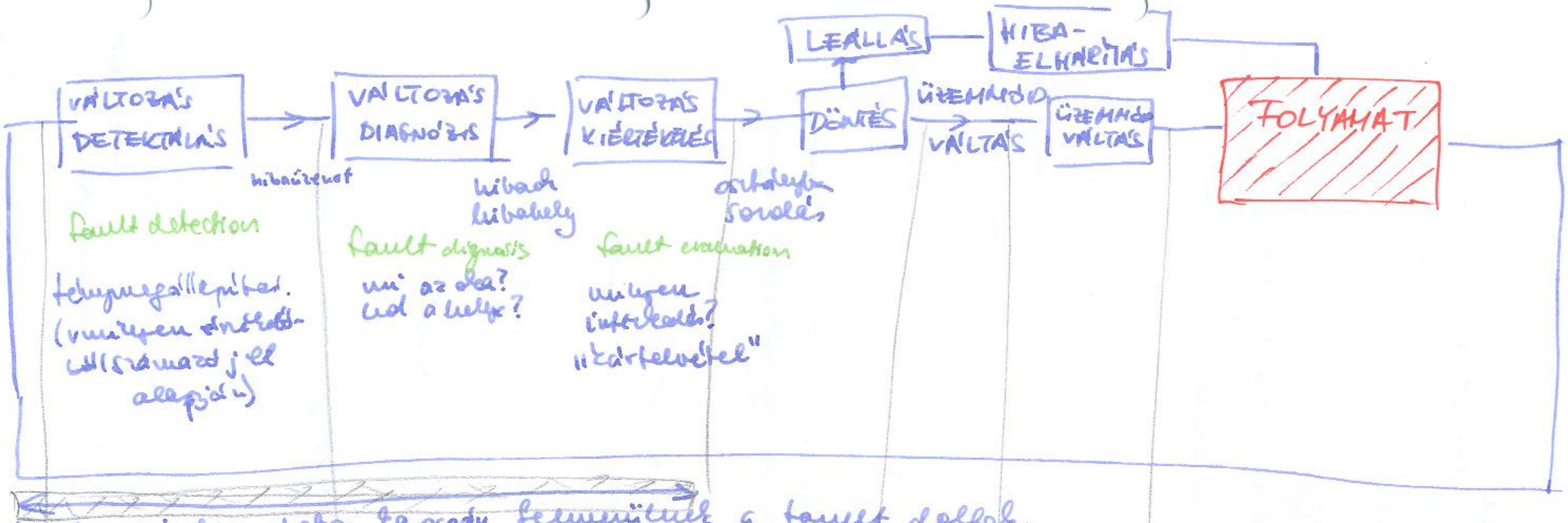
multiplikatív rendszerek: a·b ⇒ log a + log b
nemlin → lineáris.

$$\frac{a(\omega)}{b(\omega)} \Rightarrow \log a(\omega) - \log b(\omega)$$

logaritmikus kar. alkalmazása;

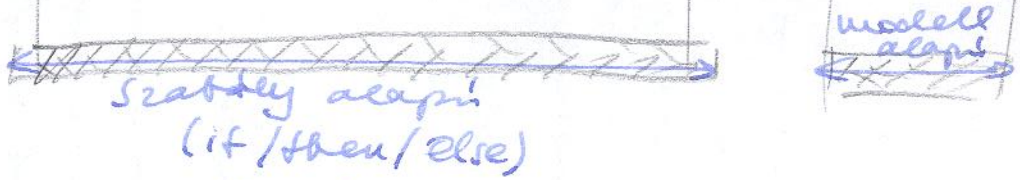
3. VÁLTOZÁSDETEKTÁLÁS, FOLYAMAT FELÜGYELETI HUROK

technológiai folyamat.; nagy modellján halad előre.; komoly valósz. mérés.
⇒ hibajelenség
⇒ kényszerű megállítása.
felrajzolunk egy ÁBRÁT.



Szinte minden doboz kapcsán felmerülnek a tanult dolgok.

első 3: modell alapú megközelítés { ismeret, rendszer, felépítés és működtetés mechanizmusa
és az üzemmódváltás is



bonyolultabb: megfigyelőt igényel; a benne élő modell mennyire illeszkedik a valósághoz? ha eltér, kimutatható.

⇒ változásdiagnózis továbbfejlesztése úgy, hogy az ok és a hely is megállapítható legyen belőle; fontos, hogy azonnal tudjunk lépni.

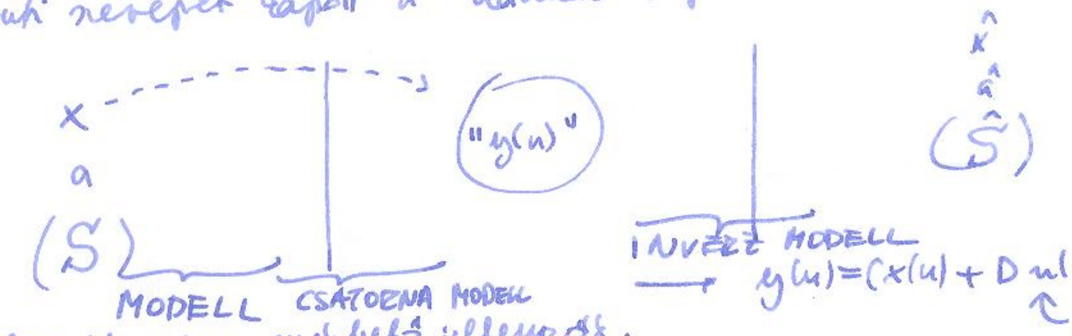
a változásdetektálás esetére nem elegendő, hogy gyakorlatban jó legyen.

⇒ a nagyobb rendelkezésre állás a hibatűrésre tételek igénylése:

⇒ a hiba/változásdetektálás eredménye redundancián alapuló eljárását eredményezi.

Összefoglalás.

Központi szerepet kapott a hármas tagozódás.



$y(n) = Cx(n) + Dn(n) +$ det + stoch.

Közvetlenül nem mérhető jellemzők.

⇒ kellettek előzetes ismeretek.

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

állapotátmeneti mátrix

külső gerjesztés. → determinisztikus + sztochasztikus.

⇒ egyszerűsített diszkrét, lineáris modell.

$$x(n+1) = f(x(n), u(n))$$

PERTURBÁCIÓ → ahhoz, hogy a kimenet info kellő mélységű legyen, alaposan meg kell csiklandozni a rendszert; olyan gerjesztést kell tenni, ami a rendszer összes tulajdonságát feltérképezi.

⇒ a csiklandozás komplexitása a rendszer komplexitásával kell összemérhető legyen.

„trükkös játék"

pl. másodrendű jelnek olyan gerjesztőjelet kell eltalálni, ami elsőrendű rendszert mutat.

KORRELÁCIÓS MÉRÉSTECH

⇒ működésben lévő folyamatba nem volt szabad perturbációt bevinni!

Az y(n) értékek a zavaró hatások környezetében nem egyformák ⇒ többszöri mérés.

⇒ az ismereteink birtokában próbáljuk visszaállítani: (y-ból x ; inverz modell)

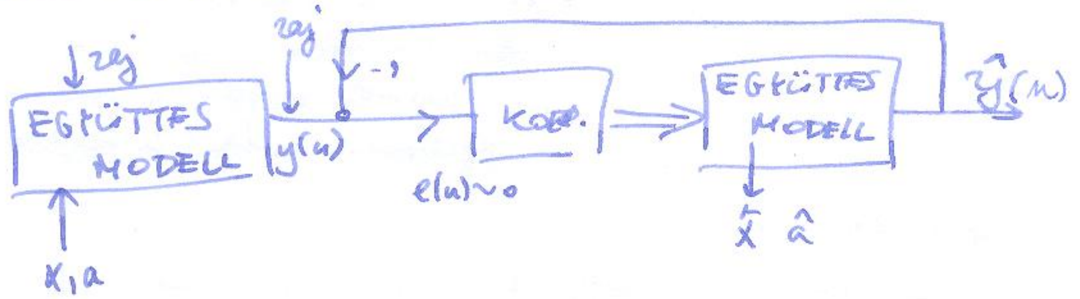
↓

MEGFIGYELŐ SÉMA
KALMAN PREDIKTOR
PARAMÉTER ADAPTÁCIÓ

$a \cdot x$ (konstans)·(á.p.vált.) ha ilyen a struktúra, mindegy melyiket keresem!

par.=? állapot (regressziós vektor) ⇒ Közös séma.

A feldállított együttes modell valamilyen $y(n)$-t produkál ⇒ megcsináljuk a számítógépben: $\hat{y}(n)$
⇒ előáll a különbség, ami addig szabályozza az együttes modellt, míg az elért hiba kb. Ø nem lesz.



ha van sztochasztikus hatás, nem az $e(n)$ minimalizálása, hanem az $E[e^2(n)]$ minimalizálása a cél.

feltételezzük, hogy valamilyen zajperturbációt kap az együttes modell és a megfigyelés
⇒ Kalman-prediktor

alternatíva: Kalman-szűrő.
→ az $x(n)$-et állította elő az $x(n-1)$ és $u(n)$ segítségével.

$$\boxed{x(n) = f[x(n-1); u(n)]}$$

korábbi becslés finomítása.

Speciális dolgok:

- rekurzív transzformációk.
  - → megfigyelő filozófiával jelreprezentáció
  - → komponensekből lin. komb.-bal jel előállítása
  - → transzformáció: súlytényezők előállítása
  - → mindezt rekurzívan!
  - → (megfigyelő séma)
- adaptív eljárások
  - → megfigyelősémába LMS eljárás.
  - → különbségrendszer analógiát mutatott.

$$x(n+1) - \hat{x}(n+1) = (A-GC)(x(n) - \hat{x}(n))$$

paraméterhiba:

$$V(n+1) = (\qquad) V(n)$$

Módszerek adott regisztrátumokra.

→ blokkos feldolgozások
  - → eltároljuk és azt transzformáljuk. (jeltranszformáció)
    - • Wiener-szűrő. ⇒ adaptív lineáris kombinátorral kapcs.
      - → ez a FIR-szűrővel is kapcsolatba hozható a regressziós vektor megfelelő kifejtése révén (tesztelhető)

→ rekurzív előállítások
  - → lényege mindig az hogy a köv. időpillanat az aktuálisnak valamilyen direkt/súlyozott értéke. v. korrekció, új mérés figyelembevétele

$$x(n+1) = (\quad)\,x(n) + \text{KORR.}(\text{új mérés})$$

  - → optimális szűrő származtatási módja (Kalman-szűrő, Kalman-prediktor)

ZH:
- jelreprezentáció, Wiener-Hopf már nem!
- adaptív eljárások tulajdonságai; hibarendszerek

μ megválasztása, stabilitáselméleti megközelítés.

⇓

belső energia csökkenése

$$V^T(n+1)\,V(n+1) = (\ \mu\ )\,V^T(n)\,V(n)$$

~~$\mu \le 0$~~ $0<\mu<\frac{1}{x^T(n)x(n)}$ minden n-re!

- Kalman-prediktor formája
  - → a levezetés komplikált volt, de adatok megadásával működése visszakövethető.
- döntéselméleti összefoglaló.
  - → távközlés, híradástechnika alapproblémái
  - → igen/nem; 0/1
  - → eldöntés zajos körülmények között
  - → likelihood-arány számítás kellő adattal
  - → döntési küszöb meghatározása.
- becsléselmélet.
  - → Bayes-becslési világ; 3 esetben néztük.
    - négyzetes krit.
    - abszolút
    - „csúcs"

a posteriori sűrűségfv.-re alapozva adtunk optimális becslőt. $f_{a|z}(a|z)$

→ ha az a-posteriori meghatározható...

1.) E[ ]
2.) medián
3.) maximum
} adja az optimális becslési paramétert

⇒ egyszerű átlagszámítás /medián /maximum a becslőhöz

⇒ egyszerű sűrűségfgv alapján visszakeresés, demo

⇒ max likelihood ⇒ jól közelíti a csatorna paramétert

a ~~p~~ sűrfgv.: széles – lapos

⇒ Bayes sűrfgv. ⟺ normális.

megegyezik

⇒ 3 krit. szerinti becslő.

pl. lépcsős, egyetlen kiemelkedő a-posteriori-ból kiindulva

⇒ E( ), medián, max. meghat.

ha szimm., a 3 egybeesik;

ha nem , a 3 nem esik egybe

→ korrelációs méréstechnika

- sztochasztikus jelek optimális reprezentációja (faktoranalízis)
  - ⇒ Covxx sajátérték / sajátvekt. probléma!
  - ⇒ értelmes módon adatredukció, opt. értelemben.
- kitekintés ZH-példát <u>nem</u> generál (robotikai / analógia; változásdetektálás)