TELJESÍTMÉNYELEMZÉS

HORVÁTH András

Híradástechnikai Tanszék

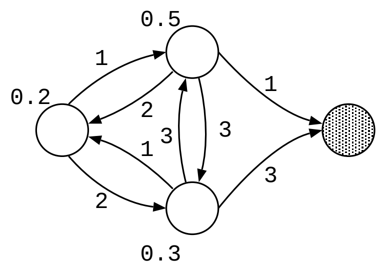
Fázis típusú eloszlások

Tartalom

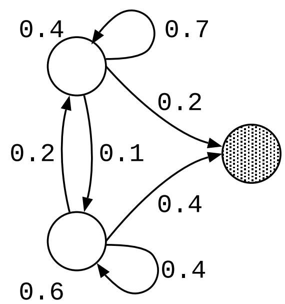
Fázis típusú eloszlások definíciója

- A fázis típusú eloszlás Markov-lánc nyelő állapotba jutásának ideje által adott.
- Ha a Markov-lánc folytonos idejű, folytonos idejű eloszlást, ha diszkrét idejű diszkrét eloszlást kapunk.
- Az eloszlást a Markov-lánc kezdeti eloszlás vektora és a tranziens állapotai közötti átmeneteket leíró mátrix egyértelműen definiálja.

Egyszerű példák:



1. ábra. Folytonos idejű fázis típusú eloszlás



2. ábra. Diszkrét idejű fázis típusú eloszlás

- Folytonos időben (3 fázissal):

$$a = \left| \begin{array}{ccc} 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{array} \right|, \qquad Q = \left| \begin{array}{ccc} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -7 \end{array} \right|$$

  Grafikusan az 1. ábrán.

- Diszkrét időben (2 fázissal):

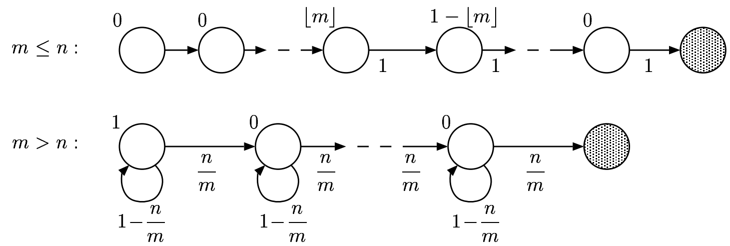
$$a = \left| \begin{array}{cc} 0.4 & 0.6 \end{array} \right|, \qquad Q = \left| \begin{array}{cc} 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{array} \right|$$

  Grafikusan a 2. ábrán.

Fázis típusú eloszlások közé tartozik

- a hyperexponenciális eloszlás,
- a hypoexponenciális eloszlás,
- az Erlang eloszlás.

A tranziens állapotokból a nyelő állapotba lépést leíró vektor:



3. ábra. Minimális relatív szórást realizáló struktúrák diszkrét idejű esetben

- Folytonos idejű esetben: $q = -Q\ e$, ahol e a csak egyeseket tartalmazó vektor
- Diszkrét idejű esetben: $q = e - Q\ e$

Fázis típusú eloszlások tulajdonságai

	Folytonos idejű	Diszkrét idejű
sűrűségfüggvény	$f(x) = a\ \exp(x\ Q)\ q$	$f_i = a\ Q^{i-1}\ q$
eloszlásfüggvény	$F(x) = 1 - a\ \exp(x\ Q)\ e$	$F_i = 1 - a\ Q^i\ e$

Minimális relatív szórás, amit fázis típusú eloszlásokkal el lehet érni:

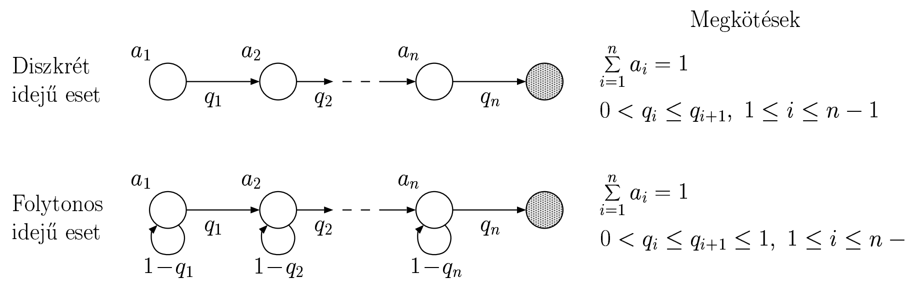
- Folytonos idejű eset: n fázisú eloszlással a minimális relatív szórás $1/n$. A minimális relatív szórást az Erlang-eloszlás valósítja meg.
- Diszkrét idejű esetben az elérhető minimális relatív szórás függ a várható értéktől is: n fázis és m várható érték esetén.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{(m-\lfloor m \rfloor)(1-m+\lfloor m \rfloor)}{m^2} & \text{ha } m \leq n\ , \\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} & \text{ha } m > n\ , \end{array}$$

  ahol $\lfloor m \rfloor$ jelöli m egész részét. A minimális relatív szórást a 3. ábrán látható struktúrák valósítják meg.

Az eloszlás tartójának szempontjából:

- Folytonos idejű esetben a fázis típusú eloszlás mindig végtelen tartójú.



4. ábra. Folytonos illetve diszkrét idejű fázis típusú eloszlások kanonikus alakja

- Diszkrét idejű fázis típusú eloszlással véges tartójú eloszlás is megvalósítható.

Általános eloszlás illesztése fázis típusú eloszlással

Olyan fázis típusú eloszlást próbálunk létrehozni, ami minél pontosabban közelíti az illesztendő eloszlást. Az eljárások két csoportba oszthatók:

- Az illesztendő eloszlásnak csak bizonyos paramétereit veszi figyelembe, pl. momentumait, és olyan fázis típusú eloszlást ad, ami pontosan ezekkel a paraméterekkel rendelkezik.
- Az eloszlás egészét figyelembe vevő távolságmérték minimalizálásán keresztűl határozza meg a paramétereket. Távolság mérték lehet:
  - kölcsönös entrópia (megfelel a maximum likelihood becslésnek),
  - sűrűségfüggvények közötti négyzetes eltérés integrálja,
  - eloszlásfüggvények közötti négyzetes eltérés integrálja.

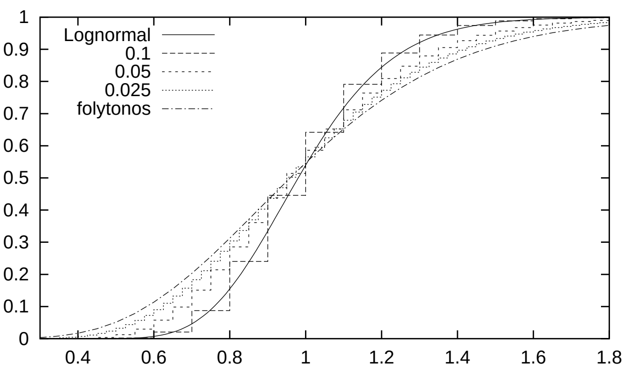
Illesztés aciklikus fázis típusú eloszlásokkal:

- Aciklikusnak nevezünk egy fázis típusú eloszlás, ha a hozzátartozó Markov-lánc körmentes.
- Minden aciklikus fázis típusú eloszlás átalakítható egy ugyanannyi fázisú, a 4. ábrán látható struktúrájú fázis típusú eloszlásba.
- Illesztő eljárásokban gyakran aciklikus formában keresik a közelítő fázis típusú eloszlást, mert ennek $2n-1$ paramétere van n fázis esetén, míg a nem aciklikus osztálynak n^2+n-1.

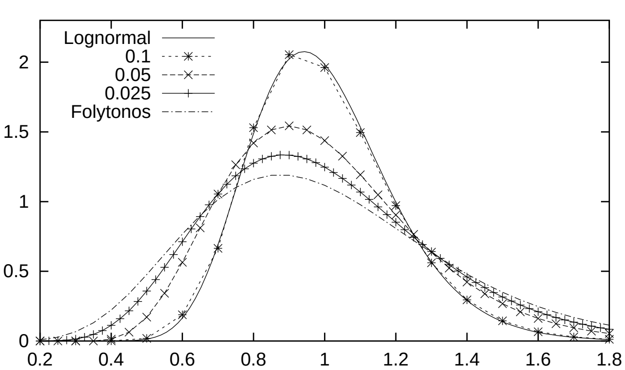
Folytonos eloszlás közelítése diszkrét idejű fázis típusú eloszlással:

- A folytonos eloszlást diszkretizálni kell az illesztés előtt.

- A diszkretizálás lépésköze lényeges az illesztés pontosságának szempontjából.
- Az 5. és 6. ábra egy alacsony relatív szórású lognormális eloszlás különböző lépésközű diszkrét idejű és a folytonos idejű illesztésének eloszlás- és sűrűségfüggvényét mutatja. Minden illesztés 8 fázisú. A diszkrét idejű illesztés romlik a diszkretizálás lépésközének csökkentésével, mert csökken az illesztendő diszkrét eloszlás relatív szórása. A folytonos idejű eloszlás adja a legrosszabb illesztést, mert diszkrét idejű eloszlással kisebb relatív szórás érhető el (lásd az elérhető minimális relatív szórást az előző fejezetben). (A sűrűségfüggvények ábrázolásakor, a diszkrét idejű illesztések „visszafolytonosított” változatát rajzoltuk meg.)



5. ábra. Különböző lépésközű diszkrét idejű és a folytonos idejű illesztés eloszlásfüggvénye



6. ábra. Különböző lépésközű diszkrét idejű és a folytonos idejű illesztés sűrűségfüggvénye

1. M/PH/1 sor

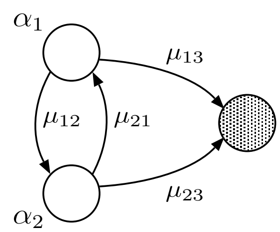
M/PH/1 sor:

- az igények Poisson-folyamat szerint érkeznek
- a kiszolgálási idő fázis típusú eloszlást követ
- egy kiszolgáló
- végtelen buffer

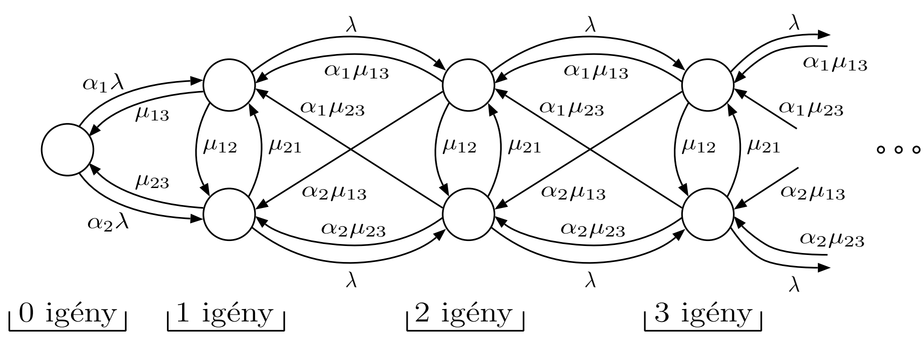
Feltéve, hogy

- az érkezési intenzitás λ
- a kiszolgálási idő a 7. ábrán látható fázis típusú eloszlást követi

a sor viselkedését leíró Markov-lánc a 8. ábrán látható formájú.



7. ábra. Kiszolgálási időt leíró fázis típusú eloszlás



8. ábra. M/PH/1 sor Markov-lánca

Általános esetben, feltéve, hogy

- az érkezési intenzitás λ
- a fázis típusú eloszlás kezdeti eloszlás vektora a
- a fázis típusú eloszlás tranziens állapotai közötti átmeneteket leíró mátrix Q
- a tranziens állapotokból a nyelő állapotba lépést leíró vektor q

a sor viselkedését leíró Markov-lánc generátor mátrixa:

$-\lambda$	λa			
q	$Q-\lambda\mathbf{I}$	$\lambda\mathbf{I}$		
	qa	$Q-\lambda\mathbf{I}$	$\lambda\mathbf{I}$	
		qa	$Q-\lambda\mathbf{I}$	$\lambda\mathbf{I}$
			$\ddots$	$\ddots$

ahol **I** az egységmátrix.