ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

2011. március 24.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)
Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' + \frac{y}{x^2} = 2x\,e^{\frac{1}{x}}, \qquad x \neq 0$$

(H) $y' = -\frac{1}{x^2}\,y$ $y_H = C \cdot \varphi(x)$ alakú, ezért ...

$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = e^{\frac{1}{x}} = \varphi(x)$

$\Rightarrow y_H = C \cdot e^{\frac{1}{x}}$ 5 $C \in \mathbb{R}$

(I) $y_{ip} = c(x)\,e^{\frac{1}{x}}$

$y_{ip}' = c'\,e^{\frac{1}{x}} + c\,e^{\frac{1}{x}}\,\frac{-1}{x^2}$

$\left(c'e^{\frac{1}{x}} + c\,e^{\frac{1}{x}}\,\frac{-1}{x^2}\right) + c\,e^{\frac{1}{x}}\,\frac{1}{x^2} = 2x\,e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow c' = 2x$

$\Rightarrow c = x^2 \Rightarrow y_{ip} = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ 5

$y_{ iá} = y_H + y_{ip} = \ldots$ 2

2. feladat (11 pont)
Adja meg az

$$y' = \frac{(y^2 - 16)}{y\,\sqrt{1+x^2}\,(\operatorname{arsh} x)^4}, \qquad x\,y \neq 0$$

differenciálegyenlet összes megoldását! (Elég az implicit alak.)
Van-e az $y(1) = -4$ kezdeti értékhez tartozó megoldása?

$y' = \frac{y^2-16}{y}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(\operatorname{arsh} x)^4}$

$y \equiv 4$ ill. $y \equiv -4$ megoldás (x>0 vagy x<0 része) 2

Ha $|y| \neq 4$

$\int \frac{y}{y^2-16}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(\operatorname{arsh} x)^4}\,dx$ 3

an2 z1p 110324/1.

$$\frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2-16}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,(\operatorname{arsh} x)^{-4}\,dx$$

f'/f $\qquad\qquad$ $f'f^{-4}$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-16| = \frac{(\operatorname{arsh} x)^{-3}}{-3} + C$$

(2) (2) (1)

$y(1)=-4$: $y\equiv -4$, $x>0$ (1)

3. feladat (15 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet az $u = y^3$ helyettesítéssel!

$$3y' - 2y = \frac{2+e^{3x}}{y^2}$$

$3y'y^2 - 2y^3 = 2+e^{3x}$

$u = y^3 \Rightarrow y' = 3y^2y'$

Behelyettesítve: $u' - 2u = 2 + e^{3x}$ (4)

(H): $u' - 2u = 0$ $\qquad u_H = C\cdot\varphi(x)$ (állandó együtthatójú, ezért $u=e^{\lambda x}$ alakban is kereshetnénk.)

$\int \frac{1}{u}\,du = 2\int dx$

$\ln u = 2x \Rightarrow u = e^{2x} = \varphi(x)$

$u_H = C\cdot e^{2x}$ (4) $\qquad C\in\mathbb{R}$

(I): $u_{ip} = c(x)e^{2x}$ (Kísérletezéssel is lehetne.)

$u_{ip}' = c'e^{2x} + c\cdot 2e^{2x}$

$(c'e^{2x} + c\cdot 2xe^{2x}) - 2ce^{2x} = 2+e^{3x} \Rightarrow c' = 2e^{-2x} + e^{x}$

$\Rightarrow c = 2\,\frac{e^{-2x}}{-2} + e^{x} \Rightarrow u_{ip} = (-e^{-2x}+e^{x})e^{2x} = -1 + e^{3x}$ (4)

$u_{id} = u_H + u_{ip} = Ce^{2x} - 1 + e^{3x}$ (2)

$y^3 = Ce^{2x} - 1 + e^{3x}$ (1)

$\left(y = \sqrt[3]{Ce^{2x} - 1 + e^{3x}}\right)$

4. feladat (16 pont)

a) Írja fel az

$$y' = \sqrt[3]{y} - x + 5$$

differenciálegyenlet izoklináinak egyenletét!
Rajzolja fel a fenti differenciálegyenletnek azt az izoklináját, amelynek pontjaiban teljesül a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele! Jelölje be az iránymezőt ezen izoklina néhány pontjában!

b) Az $y = y(x),\ x \in \mathbb{R}$ megoldása a fenti differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy az $x_0 = 1\ y_0 = -1$ ponton.
Számítsa ki ezen függvény következő deriváltjait: $y'(1) =?,\ y''(1) =?,\ y'''(1) =?$
Van-e ennek a megoldásnak inflexiós pontja az $x_0 = 1$ helyen?

a) Izoklinák: $\sqrt[3]{y} - x + 5 = K$ (2)

$\boxed{5}$ Lok. szé. létezéséhez $K = 0$ kell: $\sqrt[3]{y} = x - 5$

$\Rightarrow y = (x-5)^3$

(3)

b) $y(1) = -1$

$\boxed{11}$ $y'(1) = \sqrt[3]{y} - x + 5\Big|_{\substack{x=1\\ y=-1}} = -1 - 1 + 5 = 3$ (1)

$y''(x) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} y' - 1$ (3) $y''(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 - 1 = 0$ (1)

$y'''(x) = -\frac{2}{9} y^{-\frac{5}{3}} y' \cdot y' + \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} y''$ (3) $y'''(1) = -\frac{2}{9}(-1) \cdot 3\, 3 + 0 =$ (1)

$y''(1) = 0$ és $y'''(1) \neq 0 \Rightarrow x_0 = 1$-ben infl. pont van (2)

5. feladat (10 pont)

Az α paraméter függvényében oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'' - 4y' + \alpha y = 0$$

$\lambda^2 - 4\lambda + \alpha = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\alpha}}{2} = 2 \pm \sqrt{4 - \alpha}$ (2)

$D = 0$: $\alpha = 4$, ekkor $\lambda_{1,2} = 2$:

$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ (2)

$D>0$: $\alpha<4$: 2 különböző valós gyök :

$y = C_1 e^{(2+\sqrt{4-\alpha})x} + C_2 e^{(2-\sqrt{4-\alpha})x}$ 3

$D<0$: $\alpha>4$: $\lambda_{1,2} = 2 \pm j\sqrt{\alpha-4}$

$y = C_1 e^{2x} \cos\sqrt{\alpha-4}\,x + C_2 e^{2x} \sin\sqrt{\alpha-4}\,x$ 3

6. feladat (18 pont)

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' - 8\,y' + 12\,y = 24\,x \;+\; 8\,\mathrm{e}^{2x}$$

b) Milyen alakban keresheti az alábbi differenciálegyenlet egyik megoldását:

$$y'' - 8y' + 12y \;=\; 2\cos x \;-\; 4e^{3x}$$

(Nem kell megkeresnie!)

a.) $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda-2)(\lambda-6) = 0 \implies \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 6$

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x}$ 5

$12\cdot \mid y_{ip} = Ax + B + Cx\,e^{2x}$ (külső rez.) 3

$-8\cdot \mid y_{ip}' = A + Ce^{2x} + 2Cxe^{2x}$

$1\cdot \mid y_{ip}'' = 2Ce^{2x} + 2Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}$

$x(12A) + (12B - 8A) + xe^{2x}(\underbrace{12C - 16C + 4C}_{=0}) + e^{2x}(-8C + 4C) =$
$= 24x + 8e^{2x}$

$12A = 24 \implies A = 2$

$12B - 8A = 0 \implies B = \frac{4}{3}$ $\qquad y_{ip} = 2x + \frac{4}{3} - 2xe^{2x}$ 5

$-4C = 8 \implies C = -2$

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = \ldots$ 2

b) $f(x) = (2\cos x) + (-4e^{3x})$

$y_{ip} = A\cos x + B\sin x + Ce^{3x}$ 3

an2-21p1103 24/4.

7. feladat (9 pont)

Írjon fel egy olyan legalacsonyabbrendű lineáris konstans együtthatós homogén differenciálegyenletet, melynek megoldása:

$$7x - 1 \quad \text{és} \quad 5\,\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$$

Mi a kapott differenciálegyenlet általános megoldása?

$7x-1$ miatt: $\lambda_{1,2} = 0$ (2)

$5e^{-x}\cos 2x$ miatt: $\lambda_{3,4} = -1 \pm j2$ (2)

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 \underbrace{(\lambda - (-1+j2))(\lambda - (-1-j2))}_{((\lambda+1)-j2)((\lambda+1)+j2)=(\lambda+1)^2-(j2)^2} = \lambda^2(\lambda^2+2\lambda+1+4) = \lambda^4+2\lambda^3+5\lambda^2 = 0$$

(3)

A differenciálegyenlet:

$$y^{IV} + 2y''' + 5y'' = 0$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}\cos 2x + C_4 e^{-x}\sin 2x \,; \quad C_i \in \mathbb{R}$$

(2)

8. feladat (9 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\,(n+1)!\,(n-1)!}{(2n-1)!}$$

a) $a_n > 0$ és $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c$.

Ha $c < 1$: $\sum\limits^{\infty} a_n$ konv.

Ha $c > 1$ vagy $c = \infty$: $\sum\limits^{\infty} a_n$ div. (3)

(Ha $c = 1$: ?)

b.)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+2)!\,n!\,(2n-1)!}{(2n+1)!\,3^n\,(n+1)!\,(n-1)!} \ (2) = \frac{3(n+2)\cdot n}{(2n+1)\cdot 2n} = \frac{3}{2}\,\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} < 1 \implies \text{a } \sum^{\infty} a_n \text{ sor konv.} \quad (4)$$

an2 z1p 110324/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (11 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y' - 6x^2 y = 2x^2$$

A megoldást explicit alakban adja meg!

szétválasztható változójú de. (egyébként lin. er. is)

$y' = 2x^2(1+3y)$: $y \equiv -\frac{1}{3}$ megoldás

$y \neq -\frac{1}{3}$ $\int \frac{1}{1+3y}\,dy = \int 2x^2\,dx$

$\frac{1}{3}\int \underbrace{\frac{3}{1+3y}}_{f'/f}\,dy = \int 2x^2\,dx$

$\frac{1}{3}\ln|1+3y| = 2\frac{x^3}{3} + c_1$

$\ln|1+3y| = 2x^3 + 3c_1$

$|1+3y| = e^{2x^3}e^{3c_1}$

$1+3y = \pm e^{3c_1}e^{2x^3}$

$y = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}e^{3c_1}e^{2x^3}$

és $y \equiv -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{3} + Ce^{2x^3}$, $C \in \mathbb{R}$

10. feladat (9 pont)

a) Írja föl az

$$f(n) = -2\,f(n-1) + 8\,f(n-2)$$

rekurzió általános megoldását!

b) Adja meg azt a megoldást, melyre $f(0) = 1$, és $f(1) = 8$.

a.) $f(n) = q^n$: $q^n = -2q^{n-1} + 8q^{n-2}$; $q \neq 0$

$\Rightarrow q^2 = -2q + 8 \Rightarrow q^2 + 2q - 8 = 0 \Rightarrow q_1 = 2,\ q_2 = -4$ 3

$f(n) = c_1 \cdot 2^n + c_2(-4)^n$ 3 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b.) $f(0) = 1$: $c_1 + c_2 = 1$

$f(1) = 8$: $2c_1 + (-4)c_2 = 8$

$\Rightarrow c_1 = 2,\ c_2 = -1$

Tehát $f(n) = 2 \cdot 2^n - (-4)^n$ 3

an2 zh p 110324/6.