ANALÍZIS(1) **VIZSGADOLGOZAT** 2011. jan. 13.
Mérnök Informatikus szak — Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (21 pont)

$$a_n = \frac{2^{n+2} + 3^{n+1}}{2^{2n} + 5}$$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

b) Hogy szól a numerikus sorokra vonatkozó majoráns kritérium? Állítását bizonyítsa be!

c) Mutassa meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens!
Adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

a) $\boxed{4}$ $a_n = \dfrac{4\cdot 2^n + 3\cdot 3^n}{4^n+5} = \dfrac{4(\frac{1}{2})^n + 3(\frac{3}{4})^n}{1+5\cdot(\frac{1}{4})^n} \longrightarrow \dfrac{0+0}{1+0} = 0$

b) $\boxed{8}$

(T) Ha $0 < a_n \le c_n \quad \forall\, n$-re és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens (2)

(B) A megfelelő részletösszegek sorozatára a feltétel miatt fennáll, hogy
$$s_n^a \le s_n^c.$$
Továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergenciája miatt $s_n^c \le K \Longrightarrow s_n^a$ korlátos és pozitív tagú a sor, tehát monoton
$\Longrightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n$ konv. ■ (6)

c.) $0 < a_n < \dfrac{4\cdot 3^n + 3\cdot 3^n}{4^n} = 7\left(\frac{3}{4}\right)^n$;
$7\sum^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergens geometriai sor $(0<q=\frac{3}{4}<1)$
$\Longrightarrow$ (maj. kr.) $\sum^{\infty} a_n$ konv. (4)

$s \approx s_{100}$: $0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} a_n < 7\sum_{n=101}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 7\cdot\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{101}}{1-\frac{3}{4}}$ (5)

2. feladat (15 pont)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-5/x^2}, & \text{ha } x<0 \\ \dfrac{\sin(3\pi x)}{2x} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^3}, & \text{ha } x>0 \end{cases}$$

a) Milyen típusú szakadása van f-nek az $x=0$ pontban? Indokoljon!

b) Írja fel a deriváltfüggvényt $x \ne 0$ esetére!

c) Írja fel az $x_0 = 1$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

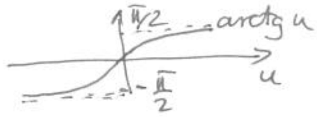
an1v110113/1.

a.) $\boxed{5}$ $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\overbrace{-\frac{5}{x^2}}^{\to -\infty}} = 0$ (1)

$x^2 \to +0$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0} \underbrace{\frac{\sin(3\pi x)}{3\pi x}}_{\to 1}\,\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\underbrace{x^3}_{\to +0}} = \frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = 2\pi \quad (3)$$

$\frac{1}{x^3} \to +\infty$



Véges ugrás van $x=0$-ban (elsőfajú szak.) (1)

b.) $\boxed{6}$

$$f'(x)=\begin{cases} e^{-\frac{5}{x^2}}\cdot(-5)(-2)x^{-3}, & \text{ha } x<0 \quad (2) \\ \dfrac{\cos(3\pi x)\cdot 3\pi\cdot 2x-\sin(3\pi x)\cdot 2}{(2x)^2}\ (2) + \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x^3}\right)^2}\,\dfrac{-3}{x^4}\ (2), & \text{ha } x>0 \end{cases}$$

c.) $\boxed{4}$

$y_é = f(1)+f'(1)(x-1)$

$f(1)=\dfrac{\underbrace{\sin 3\pi}_{=0}}{2}+\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

$f'(1) = \dfrac{-1\cdot 3\pi\cdot 2-0}{4} + \dfrac{1}{2}(-3) = -\dfrac{3}{2}(\pi+1)$

$y_é = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3}{2}(\pi+1)(x-1)$

3. feladat (20 pont)

Legyen $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$.

a) Definiálja az alábbi fogalmakat:

a1) f differenciálható x_0-ban. a2) f-nek lokális minimuma van x_0-ban.

b) Differenciálható függvény esetén mondja ki és bizonyítsa be f lokális szélsőértéke létezésének szükséges feltételét!

c) Adjon két különböző elégséges feltételt a differenciálható $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ függvény lokális minimumának létezésére!

d) Hol és milyen lokális szélsőértéke van az alábbi függvénynek?

$$f(x)=e^{x^4-4x^3}$$

a.) $\boxed{4}$ x_0 D_f belső pontja

a1) (D) $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (2)

a2) (D) f-nek lokális minimuma van x_0-ban, ha $\exists K_{x_0,\delta}$: $f(x)\geq f(x_0)$, ha $x\in K_{x_0,\delta}$ (2)

an1v 110113/2.

b.) $\boxed{7}$

(T) Ha f a c helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$.
$(K_{c,\delta} \subset D_f)$

(2)

(B) Pl. lokális maximumra:

$$\lim_{h\to -0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\frac{-}{-}} = \underbrace{f'_-(c) = f'(c)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \geq 0$$

$$\lim_{h\to +0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\frac{-}{+}} = f'_+(c) = f'(c) \leq 0$$

(5)

$\Longrightarrow \quad f'(c) = 0 \quad$ (vízszintes érintő) ■

c.) $\boxed{4}$

(T) $K(x_0, \delta) \subset D_f$ (belső pont); $\quad K(x_0,\delta) \subset D_{f'}$
Differenciálható függvény esetén *lokális szélsőérték* létezésének

(1. szükséges feltétele: $f'(x_0) = 0$)

2. elégséges feltétele:

a) $f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált x_0-ban ~~(tehát f' lokálisan csökken vagy lokálisan nő x_0-ban)~~

b) Ha f kétszer differenciálható x_0-ban: $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$
~~$(f''(x_0) > 0$: lok. min.; $f''(x_0) < 0$: lok. max.)~~

d.) $\boxed{5}$

$f(x) = e^{x^4 - 4x^3}$

$f'(x) = e^{x^4-4x^3} \cdot (4x^3 - 4\cdot 3x^2) = \underbrace{e^{x^4-4x^3}}_{>0} \; 4x^2(x-3) = 0$

(2)

$\Rightarrow x=0$ ill. $x=3$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

(3)

Tehát $x=3$-ban lok. min. van. Máshol nincs lok. szé.

an10110113/3.

4. feladat (10 pont)*

$$f(t) = \begin{cases} t^2\,, & \text{ha } |t| \le 3 \\ 9\,, & \text{ha } |t| > 3 \end{cases}$$

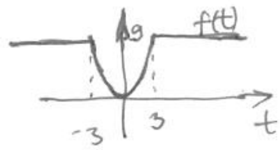
a) Határozza meg a

$$F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad x > -3$$

függvényt!

b) Hol differenciálható a F függvény? $F'(x) = ?$

a.) Ha $-3 < x \le 3$:



$\boxed{7}$ $F(x) = \int_{-3}^{x} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-3}^{x} = \frac{x^3}{3} + 9$

Ha $x > 3$:

$F(x) = \int_{-3}^{3} t^2\,dt + \int_{3}^{x} 9\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-3}^{3} + 9t\Big|_{3}^{x} = 2\cdot\frac{27}{3} + 9(x-3) = 18 + 9(x-3)$

b.) $\boxed{3}$ f folytonos $x > -3$-ra $\Rightarrow$ F differenciálható $x > -3$-ra és

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in (-3,3] \\ 9, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$$

(Integrálszámítás II. alaptétele.)

5. feladat (5+8=13 pont)*

a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x = ?$

a.) $\boxed{5}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x\,dx = \frac{\arcsin^2 x}{2}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\arcsin^2\frac{1}{2} - \arcsin^2 0\right) =$

$f'\ f^1$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0\right) = \frac{\pi^2}{72}$

b.) $\boxed{8}$ $\displaystyle\int 1\cdot\arcsin 3x\,dx = x\cdot\arcsin 3x - \int \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx =$ 2

$u' = 1 \quad v = \arcsin 3x$

$u = x \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3$ 2

$= x\cdot\arcsin 3x - \frac{-1}{6}\int -6\cdot 3x\,(1-9x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = x\cdot\arcsin 3x + \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{1-9x^2}}{\frac{1}{2}} + C$

$f'\ f^{-\frac{1}{2}}$ 3 1

an1v110113/4.

6. feladat (12 pont)*

$$\int \frac{e^x + 2}{e^{2x} + 1}\, dx = ?\,, \qquad (e^x = t \text{ helyettesítéssel dolgozzon!})$$

$e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\, dt$

$\int \frac{t+2}{(t^2+1)} \frac{1}{t}\, dt = \int \left(\frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t} \right) dt$ 3 1

$t+2 = (At+B)t + C(t^2+1) \Rightarrow t+2 = (A+C)t^2 + Bt + C$

$C = 2,\ B = 1$ és $A + C = 0 \Rightarrow A = -2$

$\int \Big(\underbrace{-\frac{2t}{t^2+1}}_{f'/f} + \frac{1}{t^2+1} + 2\frac{1}{t} \Big) dt = -\ln(t^2+1) + \operatorname{arctg} t + 2\ln|t| + C$ 4 3

A keresett integrál:

$I = -\ln(e^{2x}+1) + \operatorname{arctg} e^x + 2 \underbrace{\ln e^x}_{=x} + C$ 1

7. feladat (9 pont)*

Milyen α-ra konvergens az alábbi integrál? Állítását bizonyítsa be!

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

$\alpha = 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\delta \to +0} \int_\delta^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\delta \to +0} \ln x \Big|_\delta^1 = \lim_{\delta \to +0} (\ln 1 - \ln \delta) = \infty, \qquad \text{divergens}$$

3

$\alpha \neq 1$:

$$\lim_{\delta \to +0} \int_\delta^1 x^{-\alpha}\, dx = \lim_{\delta \to +0} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_\delta^1 = \lim_{\delta \to +0} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]$$

Konvergens, ha $1 - \alpha > 0$, tehát $\alpha < 1$

Divergens, ha $1 - \alpha < 0$, tehát $\alpha > 1$ 6

Figyelem! A *-gal jelölt feladatokból legalább 12 pontot el kell érni!

an1v110113/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (11 pont)

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+n+1}{n^5+2}} = ?$

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+n+1}{n^5+2}}$$

a.) $\boxed{8}$ $\underbrace{\underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{\tfrac{1}{3}}}\, \frac{1}{\underset{\downarrow 1}{(\sqrt[n]{n})^5}}}_{\downarrow 1} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^5+2n^5}} \leq \sqrt[n]{\dfrac{n^2+n+1}{n^5+2}} < \sqrt[n]{\dfrac{n^2+n^2+n^2}{2}} = \sqrt[n]{\tfrac{3}{2}n^2} = \underbrace{\underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{\tfrac{3}{2}}}\,\underset{\downarrow 1}{(\sqrt[n]{n})^2}}_{\downarrow 1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+n+1}{n^5+2}} = 1$

b.) $\sum^{\infty} a_n$

$\boxed{3}$ Mivel $a_n \to 1 \neq 0$, a $\sum^{\infty} a_n$ sor divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

9. feladat (9 pont)

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(-2x)}{\operatorname{arctg}(5x)} = ?$ b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2e^{5x} - 3e^{4x}}{2e^{-3x} + 7e^{5x}} = ?$

a.) $\boxed{3}$ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(-2x)}{\operatorname{arctg}(5x)} = \dfrac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = -1$

b.) $\boxed{6}$ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2e^{5x} - 3e^{4x}}{2e^{-3x} + 7e^{5x}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{e^{5x}}{e^{5x}}}_{=1} \dfrac{2 - 3\overset{\to 0}{e^{-x}}}{2\underset{\to 0}{e^{-8x}} + 7} = \dfrac{2}{7}$

an1o110113/6.