Pótló zárthelyi dolgozat

Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Egyszer dobunk egy szabályos kockával. Jelölje PR azt az eseményt, hogy prímszámot dobunk, PS azt, hogy párosat dobunk, LN pedig azt, hogy legfeljebb 4-et (azaz 4-et vagy kevesebbet) dobunk. (Egy pozitív egész számot akkor nevezünk prímszámnak, ha 1-nél nagyobb, és csak 1-gyel és önmagával osztható.) Fejezzük ki az alábbi A, B, C, D, E eseményeket a PR, PS és LN események ill. a halmazműveletek segítségével. A kifejezések helyességének indoklása is szükséges.

$$A = \{\text{1-et dobunk}\}, \qquad B = \{\text{2-t dobunk}\}, \qquad C = \{\text{3-at dobunk}\},$$

$$D = \{\text{5-öt dobunk}\}, \qquad E = \{\text{3-nál nagyobbat dobunk}\}.$$

Megoldás:

(2 pont) Mivel az 1-es szám páratlan, és az 1, 3 és 5 páratlan számok között az egyetlen, ami nem prím, így $A = \overline{PS} \cap \overline{PR}$.

(2 pont) Mivel 2 az egyetlen pozitív páros prím, így $B = PS \cap PR$.

(2 pont) Mivel 3 az egyetlen 5-nél kisebb pozitív páratlan prím, így $C = LN \cap \overline{PS} \cap PR$.

(2 pont) Az $1, \ldots, 6$ számok közt 5 az egyetlen 4-nél nagyobb prím, így $D = \overline{LN} \cap PR$.

(2 pont) Az E eseményben azon számok szerepelnek, amik párosak, de nem prímek, továbbá az 5. Tehát $E = (PS \setminus PR) \cup (\overline{LN} \cap PR)$.

Ha nem szerepel indoklás egy adott eseménynél, akkor a 2 pontból 1 megadható, amennyiben a kifejezés helyes. A megoldások persze nem egyértelműek, és a maximális pontszámhoz nem kell feltétlenül a legrövidebb, legegyszerűbb alakot megadni. Például az E eseményre egy jó felírás adódik a következőképp. Az E komplementere az, hogy 1-et, 2-t vagy 3-at dobunk, így $E = \overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ (ahol egy de Morgan-azonosságot használtunk), a fentieket behelyettesítve ez

$$\overline{(\overline{PS} \cap \overline{PR})} \cap \overline{(PS \cap PR)} \cap \overline{(LN \cap \overline{PS} \cap PR)} = (PS \cup PR) \cap (\overline{PS} \cup \overline{PR}) \cap (\overline{LN} \cup PS \cup \overline{PR}).$$

Ez persze tovább egyszerűsíthető, hiszen $(PS \cup PR) \cap (\overline{PS} \cup \overline{PR})$ azon számokól áll, amik PS-ben benne vannak, de PR-ben nem, vagy pedig fordítva. Az első halmaz része az $\overline{LN} \cup PS \cup \overline{PR}$ halmaznak, míg a második elemei csak az utóbbi három halmazból csak $\overline{LN}$-ben lehetnek, így

$$E = (PS \setminus PR) \cup ((PR \setminus PS) \cap \overline{LN}) = (PS \setminus PR) \cup (PR \cap \overline{LN}).$$

2. Amikor Judit megérkezik a Kékszakállú herceg várába, a várban hét fekete csukott ajtót talál. Bár nem tudja pontosan, hogy mit rejtenek az ajtók, de abban biztos, hogy pontosan egy ajtó vezet a kastély virágoskertjébe, míg egy (és csak egy) másik ajtó mögött a kincseskamra rejtőzik. A Kékszakállú herceg véletlenszerűen kiválaszt hármat az ajtókhoz tartozó hét különböző kulcsból, és odaadja Juditnak, aki természetesen a virágoskertbe szeretne leginkább bejutni, de ha oda nem, akkor legalább a kincseskamrába. Mi a valószínűsége, hogy a fenti kettő közül legalább az egyik helyiségbe bejut? Mi a fenti esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy Judit az egyik kulccsal a kínzókamrába nyitott be (amelybe szintén pontosan egy ajtó vezet a hétből)?

Megoldás:

(0 pont) Jelölje A azt az eseméynt, hogy Judit megkapja a virágoskert vagy a kincseskamra kulcsát (vagy mindkettőt). Az első kérdés tehát $\mathbb{P}(A)$ értéke.

(1 pont) Mivel $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$, így elég a komplementer esemény valószínűséget meghatározni.

(1 pont) $\overline{A}$ éppen azt jelenti, hogy sem a virágoskert, sem a kincseskamra kulcsát nem kapja meg, tehát a maradék 5 kulcsból kap 3-at, ez pedig $\binom{5}{3} = 10$ féleképp lehetséges.

(1 pont) Mivel összesen $\binom{7}{3} = 35$ féleképp kaphat 3 kulcsot (azaz az Ω eseménytér elemszáma 35), így

(1 pont) a klasszikus valószínűség képlete szerint

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{10}{35} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7} \approx 0{,}7143.$$

A komplementer eseményre való áttérés helyett az első két pont úgy is megszerezhető, ha valaki meghatározza az A elemszámát pl. a következőképp. Az A esemény háromféleképp következhet be, vagy csak a virágoskert kulcsát kapja meg Judit, vagy csak a kincseskamráét, vagy pedig mindkettőt. Az első két esetben a maradék 5 kulcsból kettőt, míg utóbbi esetben a maradék 5-ből egyet kap, ez pedig $2 \cdot \binom{5}{2} + \binom{5}{1} = 2 \cdot 10 + 5 = 25$ lehetséges esetet jelent.

(1 pont) Jelölje B azt az eseményt, hogy Judit megkapja a kínzókamra kulcsát, ekkor a második kérdés $\mathbb{P}(A \mid B)$ értéke.

(1 pont) Mivel a $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ feltételes valószínűség valószínűségi mérték, így

$$\mathbb{P}(A \mid B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \mid B).$$

(1 pont) A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$\mathbb{P}(\overline{A} \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

(1 pont) Az $\overline{A} \cap B$ esemény éppen azt jelenti, hogy Judit megkapja a kínzókamra kulcsát, míg a virágoskertét és a kincseskamráét nem, vagyis két kulcsot a maradék 4-ből kap, ez pedig $\binom{4}{2} = 6$ különböző módon fordulhat elő. Tehát $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 6/35$.

(1 pont) Ha Judit megkapja a kínzókamra kulcsát, akkor a maradék két kulcs a maradék 6 kulcs közül kerül ki, tehát a B esemény $\binom{6}{2} = 15$ különböző kimenetel esetén következik be, ezért $\mathbb{P}(B) = 15/35$.

(1 pont) Behelyettesítve

$$\mathbb{P}(A \mid B) = 1 - \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \frac{6/35}{15/35} = 1 - \frac{6}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

A komplementerre való áttérés és $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$ meghatározása helyett a következőképp is megoldható a feladat második része: alkalmazható egyből a feltételes valószínűség definíciója (1 pont), és a $\mathbb{P}(A \cap B)$ valószínűség meghatározható (2 pont).

3. Egy urnában 1 darab piros golyó van. Feldobunk egy érmét, és ha fejet dobunk, akkor 1 darab, egyébként pedig 2 darab fehér golyót rakunk a piros golyó mellé az urnába. Ezután összekeverjük őket, majd kihúznuk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy piros golyót húzunk? Feltéve, hogy piros golyót húztunk, mi a valószínűsége, hogy fejet dobtunk?

   Megoldás:

   (0 pont) Jelölje P azt az eseményt, hogy piros golyót húznuk, F pedig azt, hogy fejet dobunk.

   (1 pont) Mivel F és $\overline{F}$ teljes eseményrendszert alkot,

   (1 pont) ezért ezekre alkalmazva a teljes valószínűség tételét

   (1 pont)
$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P \mid F)\,\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(P \mid \overline{F})\,\mathbb{P}(\overline{F})$$

   adódik.

   (1 pont) Itt
$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\overline{F}) = \frac{1}{2},$$

   (1 pont) továbbá mivel F bekövetkezése esetén 1 piros és 1 fehér, $\overline{F}$ bekövetkezése esetén pedig 1 piros és 2 fehér golyó közül húzunk, így
$$\mathbb{P}(P \mid F) = \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad \mathbb{P}(P \mid \overline{F}) = \frac{1}{3}.$$

   (1 pont) Azaz
$$\mathbb{P}(P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} = 0{,}4167.$$

   (1 pont) A második kérdés a $\mathbb{P}(F \mid P)$ feltételes valószínűség.

   (1 pont) A(z egyszerű) Bayes-tételt alkalmazva

   (1 pont)
$$\mathbb{P}(F \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid F)\,\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(P)}$$

   (1 pont)
$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

4. Választunk egy pontot véletlenszerűen az $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;-1)$ és $(-1;1)$ pontok által meghatározott négyzeten. Legyen A az az esemény, hogy a választott pont az origó középpontú, 1 sugarú körre esik, továbbá legyen B az az esemény, hogy a választott pont mindkét koordinátája pozitív. Döntsük el, hogy függetlenek-e az A és B események.

   Megoldás:

   (1 pont) Az eseménytér az $N = [-1;1] \times [-1;1]$ négyzet (innen választunk egy pontot).

   (1 pont) Az A esemény, hogy az origó középpontú, 1 sugarú K körre esik a pont, ekkor (mivel egy geometriai valószínűségi mezőről van szó)
$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(K)}{T(N)},$$

   ahol $T(\cdot)$ a területet jelöli.

   (1 pont) A négyzet területe $T(N) = 2 \cdot 2 = 4$,

   (1 pont) a K kör területe $T(K) = 1^2 \cdot \pi = \pi$, így $\mathbb{P}(A) = \frac{\pi}{4}$.

   (1 pont) Jelölje P azon pontok halmazát, melyek mindkét koordinátája pozitív, ekkor $P = (0;1] \times (0;1]$ az egységnégyzet (amelybe két oldalát nem vesszük bele),

(1 pont) így $\mathbb{P}(B) = \frac{T(P)}{T(N)} = \frac{1}{4}$.

(1 pont) Továbbá $P \cap K$ az első síknegyedbe eső negyedkör,

(1 pont) ezért $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{T(P \cap K)}{T(N)} = \frac{\pi/4}{4} = \frac{\pi}{16}$.

(1 pont) mivel $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\pi}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$,

(1 pont) így definíció szerint a két esemény független.

5. Svindler Sándor jól jövedelmező kártyajátékokkal keresi kenyerét. A mai nap a következő játékot játssza: ha valaki kockára tesz 2000 forintot, akkor összekever négy kártyalapot, melyeknek pontosan egyike piros, és lefordítva leteszi őket az asztalra. A másik játékos ezután választhat egyet a négy lapból, ha eltalálja a pirosat, megduplázza a feltett összeget, egyéb esetben elveszti azt. A vállalkozószelleműbb játékosok azonban feltehetnek 5000 forintot is, a nagyobb összeg kockáztatásáért cserébe viszont ekkor a következő szabályok érvényesek: ha elsőre eltalálja a piros lapot a játékos, akkor a feltett összeg duplázódik, azonban ha nem, akkor van egy második tippelési lehetősége is, választhat még egyet a maradék 3 lefordított kártyából. Ha másodjára találja el a piros lapot, akkor 6000 forintot kap vissza (azaz nyer 1000 forintot). Ha ekkor sem találja el a pirosat, akkor persze a tétet elveszíti. A kettő közül melyik verziónál nagyobb Sándor játékonkénti profitjának várható értéke? (A játékonkénti profit Sándor bevételének és kiadásának különbsége egy játéknál, amely természetesen negatív szám is lehet.)

Megoldás:

(1 pont) Jelölje X_1 ill. X_2 Sándor profitját az első ill. a második játékverziónál. Ekkor X_1 és X_2 valószínűségi változók.

(1 pont) Mivel az első játékverziónál 1/4 valószínűséggel nyer a játékos, és ekkor a saját tétje mellé még 2000 Ft-ot kell neki kifizetni, azaz Sándor profitja ekkor -2000 Ft. Így tehát $\mathbb{P}(X_1 = -2000) = \frac{1}{4}$.

(1 pont) Ugyanennél a játékverziónál 3/4 valószínűséggel veszít a játékos, és így Sándor megtartja a tétet, azaz $\mathbb{P}(X_1 = 2000) = 3/4$.

(1 pont) Más értéket nem vehet fel X_1, tehát

$$\mathbb{E}(X_1) = -2000 \cdot \frac{1}{4} + 2000 \cdot \frac{3}{4} = -500 + 1500 = 1000 \text{ Ft.}$$

(1 pont) A második játékverziónál 1/4 valószínűséggel duplázza a tétet a játékos, azaz a saját tétje mellé még nyer 5000 Ft-ot, azaz Sándor profitja ekkor -5000 Ft. Így $\mathbb{P}(X_2 = -5000) = \frac{1}{4}$.

(1 pont) Ha csak másodikra találja el a piros lapot a játékos, akkor 1000 Ft-ot kell Sándornak kifizetnie, így ekkor $X_2 = -1000$.

(1 pont) Ennek valószínűsége a szorzási szabály szerint

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{\text{elsőre nem piros}\} \cap \{\text{másodikra piros}\}) = \\ &\quad = \mathbb{P}(\{\text{elsőre nem piros}\})\,\mathbb{P}(\{\text{másodikra piros}\} \mid \{\text{elsőre nem piros}\}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

azaz

$$\mathbb{P}(X_2 = -1000) = \frac{1}{4}.$$

(1 pont) Végül egyéb esetben Sándor elteszi az 5000 Ft tétet, így $\mathbb{P}(X_2 = 5000) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

(1 pont) Tehát

$$\mathbb{E}(X_2) = -5000 \cdot \frac{1}{4} - 1000 \cdot \frac{1}{4} + 5000 \cdot \frac{1}{2} = -1250 - 250 + 2500 = 1000 \text{ Ft.}$$

(1 pont) Sándor játékonkénti profitjának várható értéke tehát mindkét játéktípusnál ugyanannyi.

6. Kétszer feldobunk egy szabályos érmét, jelölje X a dobott fejek számát. Határozzuk meg és ábrázoljuk az X eloszlásfüggvényét.

Megoldás:

(1 pont) Az X lehetséges értékei 0, 1 és 2.

(1 pont) Így az X eloszlása

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(2 \text{ írást dobunk})=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4},\quad \mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(2 \text{ fejet dobunk})=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(X=1)=1-(\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=2))=\tfrac{1}{2}.$$

(2 pont) Az X változó F_X eloszlásfüggvényének értéke a $t\in\mathbb{R}$ helyen $F_X(t)=\mathbb{P}(X<t)$.

(1 pont) X nem lehet t-nél kisebb, ha $t\le 0$, ezen t-kre tehát $F_X(t)=0$.

(1 pont) Ha $0<t\le 1$, akkor $\{X<t\}=\{X=0\}$, így tehát ezen t-kre $F_X(t)=\mathbb{P}(X=0)=\dfrac{1}{4}$.

(1 pont) Ha $1<t\le 2$, akkor $\{X<t\}=\{X=0\}\cup\{X=1\}$, így ezen t-kre

$$F_X(t)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

(1 pont) Ha $2<t$, akkor $\{X<t\}$ biztosan teljesül, így tehát ezen t-kre $F_X(t)=1$.

Összefoglalva (0 pont) és árbázolva (2 pont):

$$F_X(t)=\begin{cases}0, & \text{ha } t\le 0,\\ \frac{1}{4}, & \text{ha } 0<t\le 1,\\ \frac{3}{4}, & \text{ha } 1<t\le 2,\\ 1, & \text{ha } 2<t.\end{cases}$$