ZH1 + Zh2 összpont	... VIZSGA PONT ...	..... ÖSSZES PONT	.... Jegy ....

NÉV: .... NEPTUN-KÓD: ....

Gyakorlatvezető neve: ....

Matematika A4, (Valszám), 2016.06.01

Munkaidő: 90 perc. Kalkulátor nem használható.

1.(a) Tegyük fel, hogy az, hogy egy almafán hány virág van, geometriai eloszlású 1/5 paraméterrel. Minden virágból 2/3 valószínűséggel lesz alma. Mi a valószínűsége annak, hogy 30 alma lesz a fán? (*elég a eredményt összeg alakban megadni*)

(b) **(**elmélet**)** Definiálja az örökifjú tulajdonság fogalmát és mutassa meg, hogy ha X exponenciális eloszlású, akkor rendelkezik ezzel a tulajdonsággal!

2.(a) Egy forgalmas postahivatalban az egy hét alatt (öt nap alatt) érkezett rosszul címzett levelek számának átlaga 12. Mi a valószínűsége annak, hogy a hét egy adott hétköznapján nem érkezik rosszul címzett levél? (*készítsen modellt a feladatra)*

(b) (elmélet) Fogalmazza meg a nagy számok, szórásra vonatkozó (erős) törvényét!

3.(a) Egy téglalap oldalainak hosszát, X-t és Y-t, egyenletes eloszlás szerint, és egymástól függetlenül választjuk a $(0, 2)$ intervallumban. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap területe kisebb, mint 1? (*elég az eredményt integrál alakban megadni*)

(b) **(**elmélet**)** Fogalmazzon meg egy tételt a binomiális és a normális eloszlás kapcsolatáról!

4.(a) Két üzemből érkezik egy ugyanolyan típusú termékre egy-egy 50 elemű minta. Az egyik mintánál az átlagos súlyra 1,51 kg-t mértek, itt a súly pontos szórása 0,5kg, a másiknál pedig átlag 1,68kg-t mértek, 0,35 pontos szórással. Van- e különbség 0,95 biztonsági szinten a két üzemből érkező termékek súlyai között? (a súlyokra normális eloszlást tételezhetünk fel) Állítását indokolja!

(b) Hétszer dobunk fel egy kockát. Jelentse X az 1-es dobások számát, Y pedig a páros (2,4 vagy 6) dobások számát. Melyek (X, Y) lehetséges értékei és mi ezeken (X, Y) eloszlása?

5.(a) (elmélet) A következő adatokat mértük: $(3, 1)$, $(-1, 2)$, $(0, 2)$, $(-1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, -1)$, $(2, 2)$, $(-1, 4)$, $(2, 2)$, $(-1, 7)$. Adja meg táblázattal az adatokhoz tartozó tapasztalati eloszlást, valamint az $M(Y \mid X = -1)$ feltételes várható értéket.

(b) Az (X, Y)-nak az $Y = y$ -ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye: $l(x \mid y) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-y)}$ ha $0 \le y \le 1$ és $y^2 \le x \le 1$. Határozza meg az $M(X \mid Y = y)$ feltételes várható érték függvényt!

6.(a) Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 14x^{13}$ ha $0 \le x \le 1$. Határozza meg X^2 sűrűségfüggvényét.

(b) (X, Y) sűrűségfüggvénye $h(x, y) = 24xy$ ha $0 \le x \le 1$ és $x+y \le 1$, továbbá $M(X) = M(Y) = 1/5$. Határozza meg $cov(X, Y)$-t. Független-e X és Y?

Megoldások

1. a) Teljes vsz. tétel alkalmazható, tehát $P(A) = \sum_{i=30}^{\infty} P(A_i)P(A \mid A_i)$, ahol

$P(A_i) = p(1-\frac{1}{5})^{i-1}\frac{1}{5}$, $i = 1, 2, \ldots$és

$P(A \mid A_i) = \binom{i}{30}(\frac{2}{3})^i(\frac{1}{3})^{30-i}$ ahol $i \geq 30$ (pl. a binomiális eloszlásból).

(*lehet kétdimenziós eloszlással is dolgozni, ahol* $X =$ a virágok száma a fán, $Y =$ az almák száma)

b) $P(Z \geq u+v \mid Z \geq v) = P(Z \geq u)$ bármely $u, v \geq 0$ -ra.

Használjuk az exponenciális eloszlás $F(x) = 1 - e^{\lambda x}$ eloszlásfüggvényét.

A bal oldalra: $P(Z \geq u+v \mid Z \geq v) = \frac{P(Z \geq u+v \,\cap\, Z \geq v)}{P(Z \geq v)} = \frac{P(Z \geq u+v)}{P(Z \geq v)} = \frac{e^{-\lambda(u+v)}}{e^{-\lambda v}} = e^{-\lambda u}$

A jobb oldalra: $P(Z \geq u) = e^{-\lambda u}$

2. a) Az öt nap alatt érkezett rosszul címezett levelek száma Poisson eloszlásúnak tekinthető, mert a sok levél között a rossz címzés kis vsz.-gel és a többi címzéstől függetlenül fordul elő. $M = 12$, $\lambda = M$ miatt $\lambda = 12$. A kérdés egy napra (egy hétköznapra) vonatkozik. Egy napra nyilván $M = \frac{12}{5}$, ezért 1 napra $\lambda = \frac{12}{5}$. A kérdés a Poisson eloszlás 0-dik tagja, azaz $e^{-\lambda}$. A végeredmény: $e^{-\frac{12}{5}}$.

b) Ha létezik $D(X)$, akkor a tapasztalati szórások sorozata 1 vsz.-gel konvergál $D(X)-$hez.

(*Hiba lehagyni az "1 vsz.-gel"-t, mert nem biztos, hogy a sorozat konvergál! Ki lehet egészíteni az állítást arra az esetre is, ha* $D(X)$ *nem létezik)*

3. a) Ez egy "geometriai probléma", mivel X és Y függetlenek, egyenletes eloszlásúak. Ezért (normált) területtel számolhatunk az $N = (0,2)x(0,2)$ négyzeteten. A kedvező tartomány: $\{(x,y) : x \cdot y < 1, (x,y) \in N\}$. Ez a tartomány egy téglalapból áll, melynek területe 1 és egy hiperbola alatti részből áll, amelynek területe: $\int_{0,5}^{1} \frac{1}{x} dx = -\ln 0,5 = \ln 2$. A végeredmény: $\frac{1+\ln 2}{4}$.

b) $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-m)^2}{2\sigma^2}} \,|_{m=n \cdot p,\ \sigma=\sqrt{npq}}$ ha n nagy és $\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ korlátos.

(*ki lehet még mondani a Moivre-Laplace tételt is)*

4. a) 2 mintás u-próba, tehát a $H_0 : m_1 = m_2$.

Adatok: $x_1 = 1,51, x_2 = 1,68, \sigma_1 = 0,5, \sigma_2 = 0,35, n_1 = n_2 = 50$

A tanult döntési szabály:

$-u_p\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq x_1 - x_2 \leq u_p\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

esetén elfogadjuk a null hipotézist, egyébként elvetjük. u_p-t a $2\Phi(u_p) - 1 = 0,95$ - ből számoljuk táblázat segítségével. Így $u_p \sim 2$.

(*nem egymintás u-próbáról van szó, tehát* H_0 *nem az* $m = m_0$*!)*

b) Lehetséges értékek: $0 \leq X \leq 6, Y \leq 6 - X$ (az $X + Y \leq 6$ -ból)

$P(X = k, Y = m) = (\frac{1}{6})^k(\frac{1}{2})^m(\frac{1}{3})^{7-k-m}\frac{7!}{k!m!(7-k-m)!}$

(*Szükséges a* $(\frac{1}{3})^{7-k-m}$ *faktor! Valamint a* $\frac{7!}{k!m!(7-k-m)!}$ *szorzó is, ismétléses permutáció, hiszen a dobások bármilyen sorrendben előfordulhatnak)*

5. a) A $(-1,2)$ -n $\frac{2}{10}$,a $(2,2)$-n $\frac{3}{10}$, a többi ponton pedig $\frac{1}{10}$ vsz. található.

Az $Y \mid X = -1$ feltételes eloszlás: a $2, 4,$ és 7 értékeken rendre $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ és $\frac{1}{4}$ valószínűségek. Ezért a feltételes várható érték: $2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{4}$.

b) Az $l(x \mid y)$ sűrűségfüggvény várható értékét kell számolni:

$$\int_{y^2}^{1} x \frac{1}{2\sqrt{x}(1-y)} dx = \frac{1}{2(1-y)} \int_{y^2}^{1} \sqrt{x} dx = \frac{1}{2(1-y)} [\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}]_{y^2}^{1} = \frac{1}{3(1-y)}(1-y^3),$$

$0 \leq y \leq 1$.

6. a) A $g(y) = f(t^{-1}(y))\ (t^{-1}(y))'$ sűrűségfüggvény transzformáció képletet használjuk, mivel a $t(x) = x^2$ függvény monoton nő. $t^{-1}(y) = \sqrt{y}$, ezért behelyettesítéssel: $g(y) = 14x^{13}\ _{|x=\sqrt{y}} (\sqrt{y})' = 14y^{\frac{13}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}}$, $0 \leq y \leq 1$.

b) $cov(X,Y) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)$.Elegendő ezért $M(X \cdot Y)$-t kiszámolni.

$$M(X \cdot Y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\ 24xy\ dy dx.$$

X és Y nem lehetnek függetlenek, mivel az eloszlás nem téglatartományra koncentrálódik.