2. Gyakorlat

Szita-formula, események függetlensége, feltételes valószínűség

1. Jelölje A azt az eseményt, hogy az ötöslottón minden kihúzott szám kisebb 50-nél, legyen továbbá B az az esemény, hogy minden húzott szám páros. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ és $\mathbb{P}(A \cup B)$ valószínűségeket.

2. Egy termék próbagyártása során két szempontból vizsgálják a késztermékeket. Az A esemény azt jelenti, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott mintadarab anyaghibás, a B pedig az az esemény, hogy a kiválasztott gyártmány mérethibás. Tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A) = 0{,}15$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}3$ és $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}08$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

   a) egy termék anyaghibás, de nem mérethibás? b) egy termék hibátlan?

---

3. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Állapítsuk meg, független-e A és B.

4. Két szabályos kockával dobunk. Tekintsük a következő eseményeket:

$$A = \{\text{a dobott számok összege páros}\},$$
$$B = \{\text{a dobott számok különbségének abszolút értéke legalább három}\}.$$

   Független-e A és B?

5. Az A, B és C események mindegyike $\frac{1}{3}$ valószínűséggel következik be, továbbá az A és B, valamint a B és C események egymást kizáróak. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(A \cap C)$ valószínűséget, ha tudjuk, hogy $\frac{1}{9}$ annak a valószínűsége, hogy az A, B és C események egyike sem következik be. Függetlenek-e az A és C események?

6. Tegyük fel, hogy az A, B és C együttesen független eseményekre $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}4$, és $\mathbb{P}(C) = 0{,}8$. Számoljuk ki a következő események valószínűségeit:

   a) mindhárom esemény bekövetkezik, b) legalább az egyik esemény bekövetkezik,
   c) egyik esemény sem következik be.

7. Legyenek A és B független események, C pedig mindkettőjüket kizáró esemény. Mennyi $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$, ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$?

8. Legyenek A, B és C események. Tegyük fel, hogy C független A-tól, illetve B-től, továbbá azt, hogy $A \cap B$ valószínűsége éppen 0,2-vel kisebb, mint B valószínűsége. Emellett tudjuk, hogy $A \cap C$ kizárja B-t, $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$ és $\mathbb{P}(C) = 0{,}5$. Határozzuk meg $\mathbb{P}(B)$-t, ha tudjuk, hogy 0,75 annak a valószínűsége, hogy a három közül valamelyik esemény bekövetkezik.

---

9. Számoljuk ki a 4. feladatban szereplő A és B eseményekre a A valószínűségét, feltéve, hogy B bekövetkezik.

10. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy két kockával dobva mindkét érték páros, feltéve, hogy összegük legalább tíz.

11. Tegyük fel, hogy az A és B eseményekre $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$ és $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{10}$. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(A \mid B)$, $\mathbb{P}(B \mid A)$, $\mathbb{P}(\overline{A} \mid B)$ és $\mathbb{P}(A \mid \overline{B})$ valószínűségeket.

12. Egy osztályban 30 diák van, közülük kisorsolunk 5-öt, akik dolgozatot írnak. Mi a valószínűsége, hogy a legrosszabb tanuló ír, feltéve, hogy a legjobb ír?

13. Tegyük fel, hogy az A és a B események közül legalább az egyik mindig bekövetkezik. Ha $\mathbb{P}(A \mid B) = 0{,}2$ és $\mathbb{P}(B \mid A) = 0{,}5$, akkor mennyi $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ illetve $\mathbb{P}(A \mid \overline{B})$? Független-e A és B?