**Bevezetés a számításelméletbe I.**
**Zárthelyi feladatok** — pontozási útmutató
2010. április 22.

## Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletekért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

**1.** Legyen

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{41} & \sqrt{42} & \sqrt{41} & -\sqrt{42} \\ \sqrt{43} & \sqrt{44} & \sqrt{43} & -\sqrt{44} \\ \sqrt{45} & \sqrt{46} & \sqrt{45} & -\sqrt{46} \\ \sqrt{47} & \sqrt{48} & \sqrt{47} & -\sqrt{48} \end{pmatrix} \text{ és } B=\begin{pmatrix} \sqrt{51} & \sqrt{52} & \sqrt{53} & \sqrt{54} \\ \sqrt{55} & \sqrt{56} & \sqrt{57} & \sqrt{58} \\ -\sqrt{51} & -\sqrt{52} & -\sqrt{53} & -\sqrt{54} \\ \sqrt{55} & \sqrt{56} & \sqrt{57} & \sqrt{58} \end{pmatrix}.$$

a) Határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrixot!
b) Határozzuk meg a $B \cdot A$ mátrix determinánsát!

* * * * *

a) Az $A$ mátrix $i$-edik sora $\begin{pmatrix} x & y & x & -y \end{pmatrix}$, a $B$ mátrix $j$-edik oszlopa $\begin{pmatrix} u & v & -u & v \end{pmatrix}^T$ alakú minden $1 \le i, j \le 4$ esetén. (3 pont)
Ezért az $A \cdot B$ mátrix $i$-edik sorának és $j$-edik oszlopának kereszteződésében álló elem: $xu + yv + x(-u) + (-y)v = 0$. (3 pont)
Ezért $A \cdot B$ a $4 \times 4$-es (csupa) 0 mátrix. (1 pont)
b) $\det A = 0$, hiszen $A$-ban két oszlop egyenlő. (Hasonló okokból – azonos sorok miatt – $\det B = 0$ is igaz.) (1 pont)
Így a determinánsok szorzástétele miatt $\det(B \cdot A) = (\det B) \cdot (\det A) = 0$. (2 pont)

Az a) feladat indoklását nem szükséges a fenti részletességgel leírni; világosan kell látszania a megoldásból, hogy a megoldó tisztában van a mátrixszorzással és látja, hogy az adott esetben miért a nullmátrix az eredmény.

**2.** Legyen $A$ egy $(2010 \times 2010)$-es mátrix. Tegyük fel, hogy léteznek az $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{2010}$ oszlopvektorok, melyekre $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$, de $A\underline{x}_1 = A\underline{x}_2$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor léteznek olyan $\underline{x}_3, \underline{x}_4, \ldots, \underline{x}_{2010}$ oszlopvektorok úgy, hogy $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \ldots, \underline{x}_{2010}$ páronként különbözők és $A\underline{x}_1 = A\underline{x}_2 = A\underline{x}_3 = \ldots = A\underline{x}_{2010}$.

* * * * *

Jelöljük $A\underline{x}_1$ és $A\underline{x}_2$ közös értékét $\underline{b}$-vel. Ekkor tehát $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer különböző megoldásai. (4 pont)
Ismert, hogy egy lineáris egyenletrendszer megoldásainak száma 0, 1 vagy végtelen. Az $A\underline{x} = \underline{b}$ esetében tehát végtelen sok megoldás van (hiszen két különböző megoldása már van).(3 pont)
Így a végtelen sok megoldásból tetszőlegesen további 2008 különbözőt választva kaphatjuk az $\underline{x}_3, \underline{x}_4, \ldots, \underline{x}_{2010}$ oszlopvektorokat. (3 pont)

**3.** Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi $A$ mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki $A$ inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 6 \\ 2 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A Gauss-elimináció lépéseit alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 10 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 8 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1/8 & 0 & 0 & 1/8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/8 & 0 & 0 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & -1/4 & 1/8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/8 & 0 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & -1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Így $A$ inverze létezik; nem más, mint a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix.

A 10 ponthoz képest minden számolási hiba 1 pont levonást jelent. Ha valaki csak annyit állapít meg, hogy $\det A = -128 \neq 0$, ezért az inverz létezik, de nem számolja ki, az 3 pontot ér. (Nem jár pontlevonás azért, ha valaki a fenti számolás után nem tér ki arra, hogy az inverz miért létezik – hiszen ez a módszer helyes működéséből implicite következik.) Ha látszik, hogy a megoldó a módszert elvileg ismeri, de nem tudja kivitelezni, az legföljebb 2-3 pontot érhet.

**4.** A $(100 \times 100)$-as $A$ mátrix $i$-edik sorának és $j$-edik oszlopának kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 + j^3$. Határozzuk meg $A$ rangját, $\mathrm{r}(A)$-t.

* * * * *

Vonjuk ki az első sort a mátrix összes többi sorából. Ekkor $i \geq 2$ esetén az $i$-edik sor minden eleme $i^2 - 1$. (3 pont)
Most minden $i \geq 3$ esetén az $i$-edik sorból a második sor alkalmas számszorosát $\left(\left(\frac{i^2-1}{3}\right)\right.$-szorosát) kivonva az $i$-edik sor csupa 0 lesz. Így ezek a sorok elhagyhatók. (3 pont)
A maradék kettő sorú mátrix rangja 2, hiszen a két sora lineárisan független (nem többszörösei egymásnak). (2 pont)
Mivel a fenti lépések (a Gauss-elimináció lépései) a mátrix rangját nem változtatják, ezért az eredeti $A$ mátrix rangja is 2. (2 pont)

**5.** Csigaházán a falunapon csigafuttató versenyt rendeznek. Hét csiga indul (akiket a jobb megkülönböztethetőség érdekében 1-től 7-ig meg is számoznak), ám a versenyt egymás után kétszer megismétlik (azonos mezőnnyel). Akiknek a szálkás bőrizomtömlők látványa nem elegendő izgalom, fogadhatnak is az eredményre. A fogadószelvényen mindkét verseny első három helyezettjét kell megjelölni (természetesen sorrendben); azt azonban nem kell megjelölni, hogy melyik tipp melyik versenyre vonatkozik. (Így például az 1,2,3 – 2,3,4 tipp akkor számít telitalálatnak, ha a két verseny közül valamelyik eredménye 1,2,3, a másiké pedig 2,3,4.) Hány fogadószelvényt kell kitölteni a biztos telitalálathoz?

* * * * *

Egy versenyen az első három helyezettre $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ lehetőség van („ismétlés nélküli variáció"). (4 pont)
Ebből a 210 lehetőségből kell 2-t kiválasztani a sorrendre tekintet nélkül, de úgy, hogy a két kiválasztott versenyeredmény azonos is lehet. (3 pont)
Így a lehetőségek száma (az „ismétléses kombinációra" tanult képlet miatt) $\binom{211}{2}$. (3 pont)

A feladat az ismétléses kombinációra vonatkozó képlet használata nélkül is megoldható: a lehetőségek száma $\binom{210}{2}$, ha a két versenyeredmény különbözik, illetve 210, ha azonosak; ennek a kettőnek az összege az összes lehetőségek száma. Az a megoldó, aki megfeledkezik arról, hogy a két versenyeredmény azonos is lehet, ezért a $\binom{210}{2}$ eredményt adja (de egyébként a megoldása jó), összesen 3 pontot veszítsen.

**6.** Legyen $V$ a síkvektorok, $W$ a térvektorok szokásos vektortere. $V$-ben a $B$ bázis álljon a $\underline{b}_1 = (1,1)$, $\underline{b}_2 = (1,2)$ vektorokból, míg $W$-ben a $C$ bázis álljon a $\underline{c}_1 = (\sqrt{2},1,1)$, $\underline{c}_2 = (1,\sqrt{2},1)$, $\underline{c}_3 = (1,1,\sqrt{2})$ vektorokból. Az $\mathcal{A} : V \mapsto W$ lineáris leképezés mátrixa a $B$ és $C$ bázis szerint a jobb oldalon látható $A$ mátrix. Mit rendel $\mathcal{A}$ a $\underline{v} = (4,6)$ vektorhoz (vagyis mi $\mathcal{A}(\underline{v})$ értéke)?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

* * * * *

$\underline{v} = 2 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2$, így $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. (2 pont)
Az előadáson tanult tétel szerint

$$[\mathcal{A}(\underline{v})]_C = [\mathcal{A}]_{B,C} \cdot [\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{(4 pont)}$$

Ezért $\mathcal{A}(\underline{v}) = 0 \cdot \underline{c}_1 + 2 \cdot \underline{c}_2 + 0 \cdot \underline{c}_3 = \left(2, 2 \cdot \sqrt{2}, 2\right)$. (4 pont)