ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI β **változat**

2008. okt. 14
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

a) Definiálja a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ fogalmat!

b) A definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+8n+101}{n^2+5n} = 2 \qquad (N(\varepsilon)=?)$$

a.) D $\forall\ \varepsilon>0$-hoz $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ $\exists\ N(\varepsilon)\in \mathbb{N}$:
$|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ 2

b.) $|a_n - A| = \left|\frac{2n^2+8n+101}{n^2+5n} - 2\right| = \left|\frac{2n^2+8n+101-2n^2-10n}{n^2+5n}\right| =$ 2

$= \left|\frac{101-2n}{n^2+5n}\right| \underset{n>50}{=} \frac{2n-101}{n^2+5n} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon$ 3

$n > \frac{2}{\varepsilon}$

$N(\varepsilon) = \max\left\{\left[\frac{2}{\varepsilon}\right], 50\right\}$ 3

2. feladat (20 pont)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[5]{\dfrac{32\,n^5+3}{n^5+2n^3+1}} = ?$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{32\,n^5+3}{n^5+2n^3+1}} = ?$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^4+7n^2} - \sqrt{4n^4+3n^2-5}\right) = ?$

a.) $\boxed{4}$ $a_n = \sqrt[5]{\frac{\cancel{n^5}}{\cancel{n^5}}\underbrace{\frac{32+\frac{3}{n^5}}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^5}}}_{:=\beta_n\to 32}} \to \sqrt[5]{\frac{32+0}{1+0+0}} = 2$

b.) $\boxed{8}$ $\frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{4}}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^5} = \sqrt[n]{\frac{3}{n^5+2n^5+n^5}} < b_n < \sqrt[n]{\frac{32n^5+3n^5}{1}} = \sqrt[n]{35}\,(\sqrt[n]{n})^5 \to 1$

$\sqrt[n]{3}\to 1$, $\sqrt[n]{4}\to 1$, $\sqrt[n]{n}\to 1$; $\to 1$ $\qquad \sqrt[n]{35}\to 1$, $\sqrt[n]{n}\to 1$

$\underset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow}$ $b_n \to 1$

an1-z1 081014/1.

Második megoldás:

$b_n = \sqrt[n]{\beta_n}$ $\quad \beta_n \to 32$ (az előző feladatban volt)

$\Rightarrow \quad 31 < \beta_n < 33$, ha $n > N_1$

$\Rightarrow \quad \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{31}} < b_n = \sqrt[n]{\beta_n} < \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{33}} \quad \underset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow} b_n \to 1$

c.) $\boxed{8}$ $c_n = \left(\sqrt{4n^4+7n^2} - \sqrt{4n^4+3n^2-5}\right) \dfrac{\sqrt{4n^4+7n^2}+\sqrt{4n^4+3n^2-5}}{\sqrt{4n^4+7n^2}+\sqrt{4n^4+3n^2-5}} =$

$= \dfrac{\overbrace{4n^4+7n^2-(4n^4+3n^2-5)}^{=4n^2+5}}{\sqrt{4n^4+7n^2}+\sqrt{4n^4+3n^2-5}} = \underbrace{\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4}}}_{=1} \dfrac{4+\frac{5}{n^2}}{\sqrt{4+\frac{7}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^4}}} \to$

$\to \dfrac{4+0}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4+0+0}} = \dfrac{4}{2+2} = 1$.

3. feladat (16 pont)

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 8}{9}, \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad \text{és} \qquad a_1 = 4$$

$$(a_n) = (4,\ 2.67,\ 1.68, \cdots)$$

a) Mely valós számok jöhetnek szóba a sorozat határértékeként?

b) Bizonyítsa be, hogy a sorozat konvergens! $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

a.) $\boxed{2}$ Ha (a_n) konvergens, akkor A kielégíti a rekurziós összefüggést:

$A = \dfrac{A^2+8}{9} \Rightarrow A^2 - 9A + 8 = 0 \Rightarrow A_1 = 1,\ A_2 = 8$ jöhet szóba

b.) Most valószínűleg a_n monoton csökkenően tart 1-hez.

Először belátjuk, hogy $a_n > 1$.

Teljes indukcióval bizonyítjuk be:

1.) $a_i > 1$ $\quad i = 1, 2, 3$ teljesül

2.) Tegyük fel, hogy $a_n > 1$

3.) Igaz-e, hogy $a_{n+1} > 1$?

an1z1081014/2.

2.) miatt $a_n>1 \Rightarrow a_n^2>1 \Rightarrow a_n^2+8>1+8=9$

$\Rightarrow a_{n+1}=\frac{a_n^2+8}{9}>\frac{9}{9}=1$

Tehát $a_n>1$ $\forall$ n-re teljesül (5)

Állítás: (a_n) monoton csökkenő

Biz.: teljes indukcióval:

1.) $a_1>a_2>a_3$ teljesül

2.) Tegyük fel, hogy $a_{n-1}>a_n$

3.) Igaz-e: $a_n=\frac{a_{n-1}^2+8}{9} \overset{?}{>} \frac{a_n^2+8}{9}=a_{n+1}$

2.) miatt: $a_{n-1}>\underbrace{a_n>1}_{\text{Már beláttuk}}$ $\quad | \, ()^2$

$\Rightarrow a_{n-1}^2>a_n^2 \quad |+8$

$\Rightarrow a_{n-1}^2+8>a_n^2+8 \quad |:9$

$\Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}^2+8}{9}>\frac{a_n^2+8}{9}=a_{n+1}$ (6)

(2) Tehát a sorozat monoton csökken és alulról korlátos, így konvergens.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ $\quad$ ($A=8$ nem jöhet szóba.)

4. feladat (14 pont)

Határozza meg az alábbi sorozatok limeszét (ha létezik), valamint a limesz szuperiorját és a limesz inferiorját:

$$a_n=\frac{(-3)^n+n+1}{5+7^n} \qquad\qquad b_n=\frac{3^n+(-4)^{n+1}}{2^{2n}+6}$$

$a_n=\frac{\left(-\frac{3}{7}\right)^n+n\left(\frac{1}{7}\right)^n+\left(\frac{1}{7}\right)^n}{5\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^n+1} \longrightarrow \frac{0+0+0}{0+1}=0$ (4)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\overline{\lim}\, a_n=\underline{\lim}\, a_n=0$ (2)

Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0$, ha $|a|<1$ és

$\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n=0$, ha $|a|<1$, $k\in\mathbb{N}^+$

an1z1081014/3.

$$b_n = \frac{3^n - 4(-4)^n}{4^n + 6} = \frac{3^n - 4(-1)^n 4^n}{4^n+6}$$

5 $\begin{cases} \text{Ha } n \text{ páros: } b_n = \dfrac{3^n - 4\cdot 4^n}{4^n+6} = \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4}{1+6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n} \to \dfrac{0-4}{1+0} = -4 \\ \text{Ha } n \text{ páratlan: } b_n = \dfrac{3^n + 4\cdot 4^n}{4^n+6} = \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4}{1+6\left(\frac{1}{4}\right)^n} \to \dfrac{0+4}{1+0} = 4 \end{cases}$

3 $\overline{\lim}\, b_n = 4$, $\underline{\lim}\, b_n = -4$, $\lim_{n\to\infty} b_n \nexists$ (több torlódási pont)

5. feladat (10 pont)

Mikor mondjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor összege s-sel egyenlő?

A definícióval határozza meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = ?$$

$$s = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{s_n}$$ 2

$$s_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-3}} - \cancel{\frac{1}{n-1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \frac{1}{n}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$ 6

$$s = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}$$ 2

6. feladat (20 pont)

$$a_n = \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^n, \qquad b_n = \left(\frac{3n-2}{6n+1}\right)^n$$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$ $\qquad \lim_{n\to\infty} b_n = ?$

b) Konvergens-e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor?

Amelyik konvergens, annál adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

a.) $a_n = \frac{\left(1+\frac{-2/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1/3}{n}\right)^n} \to \frac{e^{-2/3}}{e^{1/3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ 5

$b_n = \underbrace{\left(\frac{3n}{6n}\right)^n}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0} \frac{\left(1+\frac{-2/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1/6}{n}\right)^n} \to 0 \cdot \frac{e^{-2/3}}{e^{1/6}} = 0$ 5

Vagy: $\underset{\downarrow 0}{0} < b_n < \underset{\downarrow 0}{\left(\frac{3n}{6n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n} \implies b_n \to 0$

b.) $a_n \to \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ divergens, mert nem teljesül a konv. szükséges ~~feltétele~~ feltétele ($a_n \not\to 0$) 2

$0 < b_n < \left(\frac{3n}{6n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ és $\sum^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konv. geom. sor

$\left(0<q<1,\ q=\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[\text{maj. kr.}]{} \sum^{\infty} b_n$ konv. 4

$s \approx s_{100}$ $\quad 0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{6n+1}\right)^n < \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{3n}{6n}\right)^n =$

$= \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{101}}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ 4

Tehát $0 < H < \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

7. feladat (10 pont)

Abszolút konvergens vagy feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-5}{3n^5-n^3+4n^2}$ $\qquad$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2+\sqrt[n]{n}}$

a.) $|a_n| = \frac{n^2+3n-5}{3n^5-n^3+4n^2} < \frac{n^2+3n^2-0}{3n^5-n^5+0} = \frac{2}{n^3}$

$\boxed{6}$ $2\sum^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konv. $(\alpha = 3 > 1) \xrightarrow[\text{maj. kr.}]{} \sum^{\infty} |a_n|$ konv.

Tehát a sor absz. konv.

b) $|b_n| = \frac{1}{2+\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow b_n \not\to 0$

$\boxed{4}$ $\Rightarrow \sum^{\infty} b_n$ div., mert nem teljesül a konv. szükséges feltétele.

an1z108101415.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (12 pont)

Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = \left(\dfrac{n+8}{n-3}\right)^n$

b) $b_n = \dfrac{2^{n+1}+5}{3^n+4^n}$

c) $c_n = \dfrac{(n+2)^2}{3n^2+4n+7}$

a.) $a_n = \dfrac{\left(1+\frac{8}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-3}{n}\right)^n} \to \dfrac{e^8}{e^{-3}} = e^{11}$ 4

b.) $b_n = \dfrac{2\cdot 2^n+5}{3^n+4^n} = \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)^n+5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1} \to \dfrac{0+0}{0+1} = 0$ 4

c.) $c_n = \underbrace{\dfrac{n^2}{n^2}}_{=1} \dfrac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}} \to \dfrac{(1+0)^2}{3+0+0} = \dfrac{1}{3}$ 4

9. feladat (8 pont)

Adja meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}+(-3)^{n-1}}{6^n} = ?$$

Két konvergens geometriai sor összegéről van szó.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4^n - \frac{1}{3}(-3)^n}{6^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad 2 =$$

$q_1 = \frac{2}{3},\ |q_1| < 1 \qquad q_2 = -\frac{1}{2},\ |q_2| < 1$ 2

$$= 2\cdot \underbrace{\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}}_{2} - \frac{1}{3}\underbrace{\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}}_{2}$$

an1z1081014/6 .