VIII. előadás 2010. XI. 18.

Markov-láncok (folytatás)

Def: Egy ekvivalenciaosztály zárt, ha nem megy ki belőle pozitív valószínűség.

pl C_1 zárt a múltkoriból, a másik kettő nem.

- Visszatérőség (folytatás)

A két osztálytulajdonságot van: periodicitás és visszatérőség. */

Def: $$f_{ij}^{(n)} = P(\exists k : 1 \le k \le n,\ X_k = j \mid X_0 = i)$$

meglátogatja a k időben a j-t, feltéve, hogy a 0 időben i-ben volt.

$$f_{ij} = \lim_{n\to\infty} f_{ij}^{(n)} = P(\exists k : k \ge 1\ \ X_k = j \mid X_0 = i) =$$

$$= P(\text{véges időben eljut } i\text{-ből } j\text{-be}).$$

Def: Egy ~~állapot~~ i állapot visszatérő, ha annak a valószínűsége, hogy véges idő alatt visszatér önmagába 1:

$$f_{ii} = 1$$

$$P(\exists n : X_n = i \mid X_0 = i) = 1$$

Def: Egy i állapot átmeneti, ha $f_{ii} < 1$.

(pozitív valószínűséggel sosem tér vissza a kezdeti állapotba).

A példában: 6-os átmeneti, mert

~~$P(X_1 \in \{4,5\})$~~

$$P(X_1 \in C_3 \mid X_0 = 6) = 1 - p_{61} < 1$$

~~Def.~~:

__Áll:__ A visszatérőség osztálytulajdonság. Azaz: ha van egy eleminek (i): $i \in C$ és visszatérő $(f_{ii} = 1)$,

$\uparrow$ valamilyen osztály

valamint $j \in C$, akkor j is visszatérő $(f_{jj} = 1)$

__Megjegyzés:__ Az előbbi nem a klasszikus definíció. A klasszikus definíció ez volt:

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_1, \dots, X_{n-1} \neq j \mid X_0 = i)$$

Ekkor viszont

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

Pl. C_1 visszatérő, C_3 átmeneti.

__Áll:__ Ha véges elemszámú és zárt egy osztály, akkor visszatérő.

$\Downarrow$

Ha C elemszáma véges, akkor C zárt, akkor visszatérő.

Ha C nem zárt (megy ki belőle valamilyen pozitív valószínűségi nyíl), akkor átmeneti.

Sőt!

$\downarrow$

<u>Áll</u>: Ha ~~nem~~ C véges, átmeneti, akkor annak a valószínűsége, hogy az n-edik lépés C-ben találja a C-ben indítottat:

$$i \in C,\quad P(X_n \in C \mid X_0 = i) \le \text{konst.}\, \delta^n \quad \delta < 1$$

(1)

exponenciálisan gyorsan elhagyja.

Van csúnya példa is („ez egyszerűen borzasztó")

pl: $(1) \xrightarrow{1} (2) \xrightarrow{1} (3) \xrightarrow{1} \ldots$

ez egy nem visszatérő osztály, de nem is véges.

<u>Def</u>: Ha egy visszatérő osztály egyelemű, akkor azt az elemet elnyelőnek nevezzük.

~~A Markov~~

<u>Tétel</u>: Az állapottér felbontható $S = \underbrace{T_1 \cup T_2 \cup \ldots}_{\text{átmeneti osztályok}} \cup \underbrace{C_1 \cup C_2 \cup \ldots}_{\text{visszatérő osztályok, ezek zártak}}$

~~visszatérő~~

A visszatérő osztályok uniója: T

Ha $i \in T$ (i-ből indítunk.) (átmeneti osztályból indítunk) és a Markov-lánc tisztességesen viselkedik, akkor véges idő múlva belekerül egy visszatérő (zárt) osztályba és ott is marad örökre.

Ha $i \in C_j$ i-ből indítjuk, akkor C_j-ben marad.

Ez a Markov-lánc állapotteres felbontása.

Ennek megfelelően át lehet rendezni az átmenet-valószínűségmátrixot:

rekurrens osztályok

$$P = \begin{array}{c|cccc} & T & C_1 & C_2 & C_3 \\ \hline T & Q & \multicolumn{3}{c}{R} \\ C_1 & & P_1 & & \\ C_2 & \emptyset & & P_2 & \emptyset \\ C_3 & & & & P_3 \end{array}$$

tranziens osztály T

R (maradékot): a tranziensből egy lépésben hogy léphet át valamelyik rekurrens osztályba.

Ahol nincs betű, ott mindenhol $\emptyset$.

P_3 egy átmenet-valószínűségmátrix, ha ide beléptünk, akkor ez itt marad meg (ha C_3-ban indult el).

C_1-en P_1 meghatároz egy irreducibilis Markov-láncot.

__Köv:__ Elég irreducibilis Markov-láncokkal foglalkozni.

(4.) Stacionárius Markov-láncok

__Def.__ Egy $X_0, X_1, \dots$ sztochasztikus folyamat (erősen) stacionárius, ha $\forall\, n, m \geq 1$ egészre $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ eloszlása $\equiv (X_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+n})$ eloszlása.

bármelyik időben kezdjük el megfigyelni a Markov-láncot, ugyanúgy viselkedik.

Felhasználói viselkedés modellezésére ez alkalmas.

Def: Stacionárius eloszlás

Egy $\pi = (\pi_i, i \in S)$ sorvektor stacionárius eloszlása a P átmenet-valószínűségmátrixszal megadott Markov-láncnak, ha $\pi P = \pi$.

Ebből az is következik, hogy $\pi P^n = \pi$.

Ha π-t veszünk valamilyen kezdeti eloszlásnak, akkor:

$$P(X_0 = i) = \pi_i$$

illetve ~~ekk~~

$$P_\pi(X_n = i) = [\pi \cdot P^n]_i$$

a sorvektor i-edik eleme.

$\forall$ időben egy valószínűségre ugyanazt a képet kapjuk.

Ebből következik: X_0 eloszlása $= X_n$ eloszlása.

Ez még nem stacionaritás, mert tetsz. hosszú darabra teljesülnie kell.

Áll: Ha a kezdeti eloszlás stacionárius, akkor a Markov-lánc erősen stacionárius.

Biz:

Kell:

$$(X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m) = (X_n = i_0, \dots, X_{m+n} = i_m) \quad \forall n\text{-re.}$$

véges trajektória: $i_0, i_1, \dots, i_m$

valamilyen n időtől kezdve figyeljük meg)

A jobb oldal:

$$\underbrace{\mathbb{P}(X_n = i_0)}\, p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} =$$

ugrásokkal megy át.

definíció szerint ez $\left[\pi P^n\right]_{i_0}$

az i_0-adik koordináta.

π stacionárius, így

$$\left[\pi P^n\right]_{i_0} = \pi_{i_0} = \mathbb{P}(X_0 = i_0)$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = i_0)\, p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n} = \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots X_n = i_n)$$

= bal oldal

<u>Megjegyzés:</u>

<u>Áll</u>: Ha a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}_a(X_n = i) = l_i$ (határeloszlás) létezik $\forall i$-re és $l = (l_i, i \in S)$ továbbá egy eloszlás ($l_i \geq 0$ és $\sum_i l_i = 1$), akkor l egy stacionárius eloszlás.

<u>Biz:</u> Kell: $l \cdot P = l$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{a P^n}_{\left(\mathbb{P}_a(X_n = i),\ i \in S\right)} = l$$

X_n-nek az eloszlása.

$$\underline{l} \cdot P = \left(\lim_{n\to\infty} \underline{a} P^n\right) \cdot P \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \underline{a} P^{n+1} = \underline{l}$$

a mátrixszal való szorzás folytonos

Tétel: Tegyük fel, hogy a Markov-lánc irreducibilis
↓ legyen P egy irreducibilis Markov-lánc átmeneti-valószínűségmátrixa.

Ekkor a következő sajátérték-egyenletnek van egyértelmű megoldása:

$\underline{y} = \underline{y}P$ sajátértékegyenlet megoldása egyértelmű.

(multiplikatív konstanstól eltekintve)

y egy sorvektor: $\underline{y} = (y_i,\ i \in S)$

Akkor jó a megoldás, ha π egy eloszlás. De lehet olyan Markov-lánc is, ahol nem 1.

Két eset van:

- Ha a koordináták összege véges, akkor létezik egyetlen stacionárius eloszlás. Jelöljük ezt

$$\pi_i = \frac{y_i}{\sum_{j\in S} y_j} \qquad i \in S$$

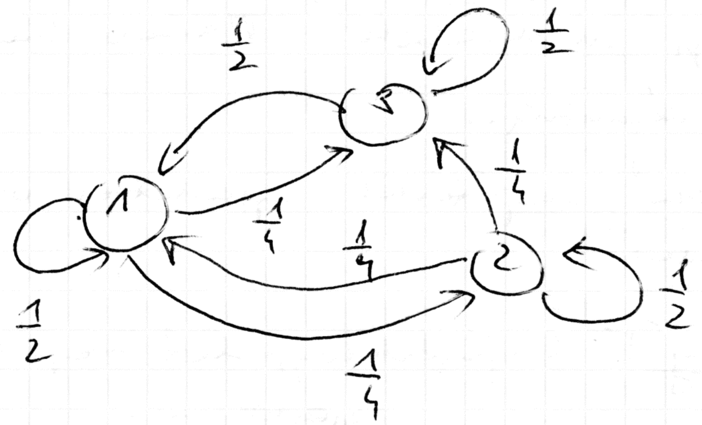
- Ha

$\sum_{i\in S} y_i = \infty$, akkor nem létezik stacionárius eloszlás.

Következmény: Ha a Markov-lánc állapottere véges és irreducibilis, akkor ~~…~~ $\exists!$ stacionárius eloszlás.

↑ $\forall$ időszeletben ugyanazt fogjuk látni.

Pl:



Az átmenet-valószínűségmátrix:

$$P = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Keressük azt a $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ sorvektort, hogy

$\pi P = \pi$ és $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$.

Ezt megoldva:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_1$$

$$\frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_2 \longrightarrow \pi_1 = 2\pi_2$$

$$\frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_3$$

$$\pi_2 + 2\pi_3 = 2\pi_1 \to \pi_2 + 2\pi_3 = 4\pi_2$$

$$2\pi_3 = 3\pi_2$$

$$\pi_3 = \frac{3}{2}\pi_2$$

$$4{,}5\,\pi_2 = 1$$

$$\pi_2 = \frac{2}{9}$$

$$2\pi_2 + \pi_2 + \frac{3}{2}\pi_2 = 1$$

így $\pi_2 = \frac{2}{9}$

$$\pi_1 = \frac{4}{9}$$

$$\pi_3 = \frac{3}{9}$$

Vagyis $\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3] = \left[\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]$ ez lesz stacionárius Markov-láncunk le.

<u>Tétel:</u> Ha egy Markov-lánc irreducibilis, aperiodikus és létezik stacionárius eloszlása (→ ergodikus Markov-láncok), akkor tetszőleges kezdeti eloszlásra a Markov-lánc n-edik időbeli eloszlása konvergál a stacionárius eloszláshoz:

Tetsz. kezdeti $\underline{a}$ eloszlásra

$$P_{\underline{a}}(X_n = i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_i \quad \forall i \in S$$

(elfelejti a kezdeti eloszlást).

Mátrixalakban:

$$\underline{a}P^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{\pi}$$

$\forall$ koordinátája konvergál.

Ha véges állapotterű, akkor exponenciálisan gyorsan elfelejti a kezdeti eloszlást.

⇓

<u>Tétel</u>: Ha egy Markov-lánc irreducibilis, aperiodikus, (létezik stac. eloszlása), véges állapotterű, akkor tetszőleges $\underline{a}$ kezdeti eloszlás esetén

$$\left| P_{\underline{a}}(X_n = i) - \pi_i \right| \leq \text{konst.} \cdot \delta^n, \quad \text{ahol } \delta < 1.$$

az n-edik állapotban a Markov-lánc i állapotot vesz fel.

Az a jó, ha a δ jó kicsi. → hamar belezuhan a stacionárius eloszlásba.

<u>Def</u>: Azt mondjuk, hogy egy Markov-lánc ergodikus, ha irreducibilis, aperiodikus és $\exists$ stacionárius eloszlása.

$\lim\limits_{n \to \infty} P_{\underline{a}}(X_n = i)$ -t határoztuk meg

$$\lim_{n \to \infty} P_{\underline{a}}(X_n = i) = \pi_i$$

Elindítjuk a Markov-láncot, kellően sok idő múlva egy stac. viselkedés, s meg tudjuk mondani, hogy milyen valószínűséggel tartózkodik i-ben.

(6.) Ergod tétel, $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(j)}{n} = \pi_j$

$N_n(j)$ = n lépés alatt hányszor járt j-ben.

„Ezt szeretnénk bizonyítani. Hát nem fogjuk."

Legyen $X_0, X_1, \dots$ egy ergodikus Markov-lánc.
Legyen adott egy $f: S \to \mathbb{R}$ költségfüggvény.
A példában legyen $f(1) = 3$

$f(2) = 5$

$f(3) = 10$

n lépés alatt a költség $f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})$

Az átlagos költség: $\frac{f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})}{n}$

A hosszútávú átlagos költség:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})}{n}$$

Ez egy lépésre eső átlagos költség.

Tétel (Ergod).

Legyen $X_0, X_1, \dots$ egy ergodikus Markov-lánc π stacionárius eloszlással és adott egy költségfüggvény $f: S \to \mathbb{R}$ úgy, hogy

$\sum_i f(i)\pi_i < \infty$

Ekkor az időátlag: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})}{n} =$

$= \sum_{i\in S} f(i)\pi_i$ a térátlaggal egyezik meg.

Időátlag = Térátlag.

A továbbá példa (múlt órán is) esetén a fűtés költsége:

$$f(1)\pi_1 + f(2)\pi_2 + f(3)\pi_3 =$$

$$= 3\cdot\frac{4}{9} + 5\cdot\frac{2}{9} + 10\cdot\frac{3}{9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(j)}{n} = \pi_j$$ -hez:

legyen $f(i) = \begin{cases} 1, \text{ ha } i = j \\ 0 \text{ különben} \end{cases}$

Ez egy indikátor fv, ahol ha összegezzük a első n lépésre:

$$f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1}) = N_n(j)$$

Alkalmazzuk most erre az ergodtételt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(j)}{n} = \sum_{i\in S} f(i)\pi_i = \pi_j$$

Vagyis arra a kérdésre, hogy az idő ~~hány~~ (lépések) hány részletében jár a Markov-lánc az 1 állapotban a példánk: $\frac{4}{9}\cdot 100\,\%$.