

1. feladat (10 pont)

$$a_n = \sqrt[3]{3n} \frac{5n^3 + (-1)^n n^3 + (-1)^n}{8n^3 + 3\sqrt{n} + 1}$$

$$\overline{\lim} a_n = ?, \quad \underline{\lim} a_n = ?, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

2. feladat (18 pont)

a) Írja le a numerikus sorok konvergenciájának szükséges feltételét!

Az állítást bizonyítsa be!

b) Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n$$

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^2+1}$$

3. feladat (15 pont)

$$g(x) = \frac{\sin x}{2x+x^2} \quad (x \neq 0, x \neq -2), \quad h(x) = \frac{\ln(1-2x)}{2e^x} \quad (x \leq 0)$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ha } x > 0 \\ h(x), & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

a) $g'(x) = ?$, $h'(x) = ?$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = ?$

c) Folytonos-e f az $x=0$ pontban? ($f(+0) = ?$, $f(-0) = ?$)

4. feladat (10 pont)

Írja le az inverz függvény deriváltjára vonatkozó képletet!

Ennek alapján vezesse le az arcsin x deriváltját!

5. feladat (7 pont)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{sh}(x-1)} = ?$$

6. feladat (12 pont)*

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} dx = ?$

b) $\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+2x+3)} dx = ?$

7. feladat (10 pont)*

a) $\int \cos x \sin^3 x dx = ?$

b) $\int x \sin(3x) dx = ?$

8. feladat (10 pont)*

a) Ismertesse a Newton-Leibniz tételt!

b) Határozza meg az $f(x) = -x^2 + x + 6$ parabola és az x tengely közti korlátos síkidom területét!

9. feladat (08 pont)*

Vezesse be az $x = \operatorname{sh} t$ új változót az alábbi integrálba és hozza egyszerűbb alakra az integrandust! (Az itegrált nem kell kiszámítania!)

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

Pótfeladat (csak az elégséges és közepes vizsgához javítjuk ki):

10. feladat (12 pont)

Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az

$$f(x) = e^{-x^2}$$

függvény konvex, illetve konkáv!

11. feladat (8 pont)

Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$$

függvénynek?

A *-gal jelölt feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!