1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2000/01 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. (a) Bizonyítsa be vektoralgebrai eszközökkel a szinusz–tételt!
(b) Igaz–e, hogy $a \neq 0$ esetén $a \times b = a \times c$–ből következik $b = c$.

MO. (a) Háromszög T területének duplája két különböző oldalpárja keresztszorzatával: $|c \times a| = 2\,T = |c \times b|$

$$\rightsquigarrow \quad |c|\,|a|\,\sin\beta = |c|\,|b|\,\sin\alpha \quad \rightsquigarrow \quad \frac{|a|}{|b|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,.$$

(b) Nem: csak annyi következik, hogy $a \,||\, b - c$, pl. $a \times b = a \times (a + b)$.

2. Határozza meg a következő határértékeket! a) $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^3}$ b) $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(3 - \frac{3}{n^3}\right)^{n^3}$

MO.

a) 0, mert végül $0 \leq \left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^{n^3} = \left(\left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^{n}\right)^{n^2} \leq \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n^2} \longrightarrow 0\,,$

hisz persze $\left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^{n} \longrightarrow e^{-3} \approx \dfrac{1}{20} \leq \dfrac{1}{10}$.

b) ∞, mert végül $\left(3 - \dfrac{3}{n^3}\right)^{n^3} \geq 2^{n^3} \longrightarrow \infty$.

3. Mutassa meg, hogy az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény egyenletesen folytonos a $[0, 2]$ és az $[1, \infty)$ intervallumokban! Igaz–e, hogy f egyenletesen folytonos az egész $[0, \infty)$ intervallumon?

MO. $[0, 2]$: Heine. $[1, \infty]$–en deriváltja korlátos: $|f'(x)| = \left|\dfrac{1}{3\,x^{2/3}}\right| \leq \dfrac{1}{3}$ ha $x \geq 1$. Így persze az egész jobb félegyenesen is egyenletesen folytonos, hisz adott ε–hoz a két részintervallumon létező δ–áknál és 1–nél kisebb jó lesz mindenütt.

4. Legyen n tetszőleges nemnegatív egész. Határozza meg a $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0+} x \cdot (\ln x)^n$ határértéket!

MO. L'Hospitalt felhasználva, n–re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0+} x \cdot (\ln x)^n = 0$ minden természetes n–re. Valóban $n = 0$ esetén $x \xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{} 0$. Másrészt, $n \geq 1$–re

$$x \cdot (\ln x)^n = \frac{(\ln x)^n}{\frac{1}{x}} \sim \frac{n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -n\,x(\ln x)^{n-1} \xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{} 0 \text{ az indukciós hipotézis alapján.}$$

5. Ábrázolja vázlatosan a gyökök, a szakadási helyeken és a végtelenben vett határértékek és a szélsőértékhelyek meghatározása alapján az $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - x}$ függvényt!

MO. Gyök $x = 0$–ban. Csak $x = 1$–ben szakad. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1-} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{x^2(3 - 2\,x)}{(x - 1)^2}$, ami az origóban nem vált előjelet, $x = 3/2$–ben csökkenően vált előjelet, lokális maximuma tehát az $x = 3/2$–ben van, $f(3/2) = -\frac{27}{4}$.

6. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1 + x^3}\,dx = ?$

MO. $$\int_0^1 x^2\sqrt{1 + x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 3\,x^2\sqrt{1 + x^3}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \left.\frac{(1 + x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{2}{9}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{2}{9}\left(\sqrt{8} - 1\right).$$