②

Illeszkedés vizsgálat:

$\varepsilon = 0,1$ elsőfajú hibavalószínűség

típus	A	B	C	D	E
gyakoriságok	184	145	100	68	63

$\rightarrow n = 560$

~~$\hat{p} = \left(\frac{184}{560}, \frac{145}{560}, \frac{100}{560}, \frac{68}{560}, \frac{63}{560}\right)$ $n = \sum N_i$~~

$\underline{p} = (0,35,\ 0,25,\ 0,2,\ 0,1,\ 0,1)$ $r = 5$

H_0: A nagyobb típusai p szerint oszlanak el

H_1: A " " nem p "

teszt statisztika: $\chi^2_{r-1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} =$

$$= \frac{(184 - 560 \cdot 0,35)^2}{560 \cdot 0,35} + \frac{(145 - 560 \cdot 0,25)^2}{560 \cdot 0,25} + \frac{(100 - 560 \cdot 0,2)^2}{560 \cdot 0,2} +$$

$$+ \frac{(68 - 560 \cdot 0,1)^2}{560 \cdot 0,1} + \frac{(63 - 560 \cdot 0,1)^2}{560 \cdot 0,1} = 5,64$$

A 4 szabadságfokú χ^2 eloszláshoz és 90 szignifikanciaszinthez tartozó kritikus érték $K = 7,779$

$\chi^2_{r-1} < K \Rightarrow H_0$-t elfogadjuk 90% ~~os~~ szinten.

3

$$P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

megfigyelések: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$

p becslése ϑ

$$L_\vartheta(\underline{x}) = P(\underline{X} = \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \binom{x_i-1}{r-1} \cancel{p}\vartheta^r (1-\cancel{p}\vartheta)^{x_i-r}$$

$$l_\vartheta(\underline{x}) = \log L_\vartheta(\underline{x}) = \log \prod_{i=1}^{n} \binom{x_i-1}{r-1} \cancel{p}\vartheta^r (1-\cancel{p}\vartheta)^{x_i-r} = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\binom{x_i-1}{r-1} \cancel{p}\vartheta^r (1-\cancel{p}\vartheta)^{x_i-r}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\log\binom{x_i-1}{r-1} + \log \cancel{p}\vartheta^r + \log(1-\cancel{p}\vartheta)^{x_i-r}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\log\binom{x_i-1}{r-1} + (x_i-r)\log(1-\vartheta)\right) + n\cdot r\cdot \log\vartheta$$

$L_\vartheta(\underline{x})$ maximumhelye $\hat{p}$-ben van $\Leftrightarrow$ $l_\vartheta(\underline{x})$ max. helye $\hat{p}$-ben van

$\rightarrow$ itt a deriváltja 0

$$\frac{\partial l_\vartheta(\underline{x})}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - r}{1-\vartheta} + \frac{n\cdot r}{\vartheta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-\vartheta} - \frac{n\cdot r}{1-\vartheta} + \frac{n\cdot r}{\vartheta} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{1-\vartheta} - \frac{n\cdot r}{1-\vartheta} = \frac{-n\cdot r}{\vartheta}$$

$$\vartheta\cdot\sum x_i - \vartheta\cdot n\cdot r = -n\cdot r + n\cdot r\cdot\vartheta$$

$$n\cdot r = 2n r\vartheta - \vartheta\sum x_i$$

$$\underbrace{\frac{n\cdot r}{2\cdot n\cdot r - \sum_{i=1}^{n} x_i}}= \vartheta$$

Ez a p paraméter legvalószínűbb értéke.

5

$A_{ij} = \lambda(i)\, Q_{ij} \qquad i \neq j$

$A_{ii} = -\lambda(i)$

$\lambda(1) = 10 \qquad \lambda(2) = 2 \qquad \lambda(3) = 5$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$\underline{\pi} \cdot A = 0$

$\pi_2 - 5\pi_3 = 0 \qquad \pi_2 = 5\pi_3$

$10\pi_1 - 2\pi_2 + \pi_3 = 0 \qquad 10\,\pi_1 = 9\pi_3 \qquad \pi_1 = 0{,}9\,\pi_3$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

$\pi_3(0{,}9 + 5 + 1) = 1$

$\pi_3 = \dfrac{1}{6{,}9} \qquad \pi_2 = \dfrac{5}{6{,}9} \qquad \pi_1 = \dfrac{0{,}9}{6{,}9}$

a) Hosszú távon egy felhasználó az idő $100 \cdot \pi_i$ százalékában lesz az i. állapotban.

b) A [illegible] közepén $\pi_1 \approx 0{,}13$ a valószínűsége, h. egy felhasználó az 1-es állapotban van.

5 (folyt)

c) ~~Az ergodicitás tétele~~ $f(1)=1,\ f(2)=10,\ f(3)=80$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X(s))\,ds = \sum_{i\in S} f(i)\,\pi_i =$$

$$= 1\cdot\frac{0,9}{6,9} + 10\cdot\frac{5}{6,9} + 80\cdot\frac{1}{6,9} \approx 19$$

Egy perc átlagosan 19 pénzegységbe kerül.

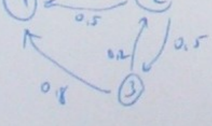
d) $\pi_3 = \frac{1}{6,9} = 0,145$ a valószínűsége, hogy az 5 perces intervallum elején a 3-as állapotban lesz. A 3-as állapotban maradás ideje $X \sim Exp(5)$ valószínűségi változóval jellemezhető.

$$P\left(X > 5/60\right) = 1 - \underbrace{\left(1 - e^{-5\cdot\frac{5}{60}}\right)}_{\text{exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye } (P(X<x))} = e^{-\frac{25}{60}} = 0,66$$

P(az 5 perc alatt végig a 3-as állapotban van) =

= P(az 5 percet a 3-as állapotban kezdi) · P(5 percig nem ugrik el a 3-as állapotból) =

$= 0,145 \cdot 0,66 = 0,096$

e.) 

→ Akkor ugrunk és a diszkrét idejű Markov-lánc az 1-es állapotban van, amikor ugrás történik a f.i. ML-ban is az 1-es állapotba.

5 (folyt)

e)

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\pi} \cdot Q = \underline{\pi}$$

$$0,5\,\pi_2 = \pi_3 \longrightarrow \pi_2 = 2\pi_3$$

$$\pi_1 + 0,2\,\pi_3 = \pi_2 \longrightarrow \pi_1 + 0,2\pi_3 = 2\pi_3 \longrightarrow \pi_1 = 1,8\,\pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$\pi_3\,(1,8 + 2 + 1) = 1$$

$$\pi_3 = 0,208\dot{3}$$

$$\boxed{\pi_1 = 0,375}$$

Az ugrások 37,5%-a történik megy az 1-es állapotba.